ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

AS
262
A6248
v.14
1950
MATH
PER

Том 14

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА ★ 1950

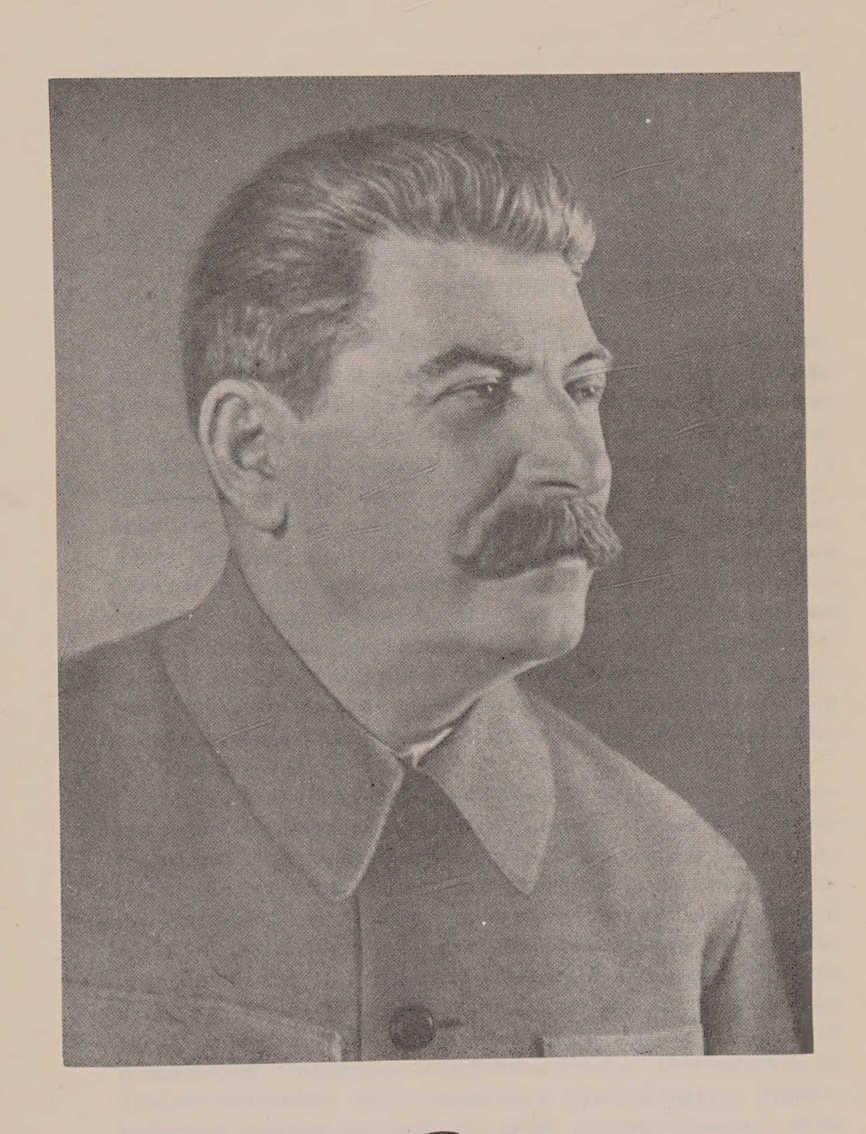
Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

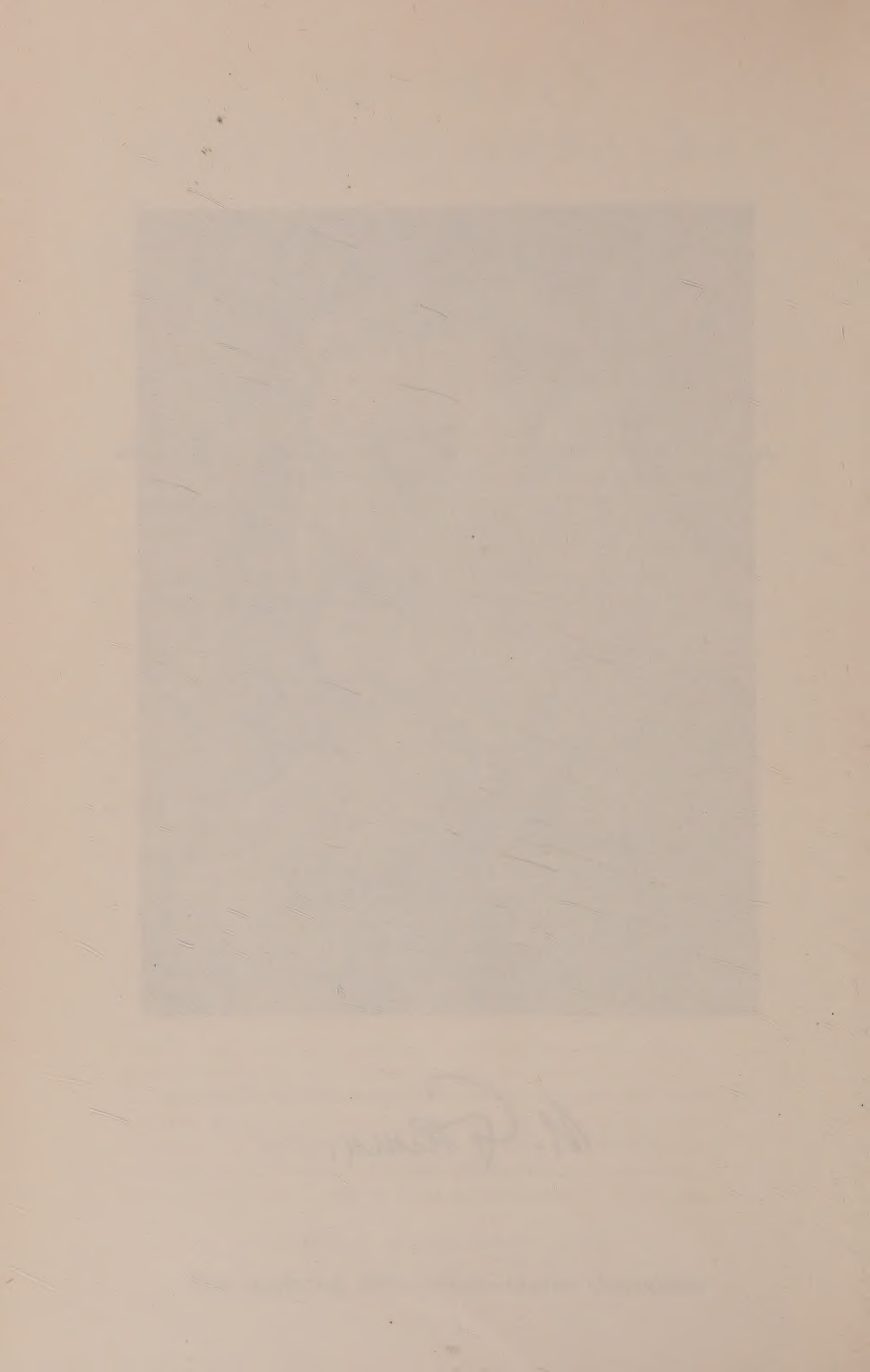
Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

Редакционная коллегия:
акад. С. Н. Бернштейн, акад. И. М. Виноградов (главный редактор),
акад. С. Л. Соболев, доктор физ.-матем. наук И. Р. Шафаревич.

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation



И. Сталин.



К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ИОСИФА ВИССАРИОНОВИЧА СТАЛИНА

21 декабря 1949 г. исполнилось семьдесят лет со дня рождения великого вождя и учителя трудящихся всего мира Иосифа Виссарионовича Сталина. С именем Сталина связано развитие революционной борьбы рабочего класса России и строительство социалистического государства в нашей стране. Наряду с Лениным Сталин является основателем партии большевиков, великим стратегом социалистической революции, гениальным руководителем Советского государства. Под руководством Сталина в нашей стране впервые в истории успешно построено социалистическое общество. В годы Великой Отечественной войны гениальное руководство Генералиссимуса Сталина обеспечило нашей Родине всемирно-историческую победу над врагом. Под руководством Сталина СССР возглавляет борьбу демократических и прогрессивных сил всего мира против поджигателей войны.

Сталин является величайшим ученым, труды которого представляют теоретическое развитие и обогащение марксизма-ленинизма и поднимают эту науку на новую, высшую ступень. Научное творчество Сталина, основанное на постановке и решении наиболее актуальных проблем, устанавливающее тесную связь между теорией и практикой, представляет вдохновляющий образец для всех советских ученых. По инициативе Сталина в СССР созданы исключительно благоприятные условия для развития науки. Советская наука стала подлинно народной и связанной с народным хозяйством страны. Основываясь на лучших традициях дореволюционной русской науки, отличительными чертами которой являются демократичность, материалистическое мировоззрение, создание принципиально новых методов исследования, исчерпывающее решение наиболее важных и трудных проблем, связь теоретических исследований с практическими их приложениями, советская наука в настоящее время достигла небывалого уровня. Под руководством

Сталина советская наука решала большие и ответственные задачи, связанные с техникой и организацией производства при выполнении Сталинских пятилеток. По призыву Сталина советские ученые преданно работали над повышением обороны страны и совершенствованием вооружения Советской Армии в годы Великой Отечественной войны.

Вместе со всей советской наукой развивалась и совершенствовалась советская математика, которая в настоящее время охватывает все основные направления современной математики. По многим математическим дисциплинам Советский Союз занимает первое место в мире. Одной из наиболее характерных черт советской математики является, наряду с разработкой теоретических разделов математики, ее связь с физикой, механикой и техникой. В исследованиях по математике принимает участие большое число творчески работающих математиков во всех союзных республиках.

Советские математики ведут борьбу с преклонением перед буржуазной иностранной наукой.

Для того чтобы дать представление о развитии советской математики, достаточно указать некоторые ее достижения по отдельным разделам.

В теории чисел разработаны новые аналитические методы, благодаря которым удалось решить ряд трудных и важных аддитивных задач. Особенно следует отметить решение аддитивных задач с простыми числами. Теория трансцендентных чисел обогащена открытием новых классов трансцендентных чисел.

По алгебре получено замечательное решение проблемы резольвент и решение ряда задач, связанных с теорией алгебраических чисел. Важное значение имеют также работы по абстрактной алгебре.

В теории функций вещественного переменного разработаны теория *A*-множеств, теория тригонометрических рядов и вопросы приближения функций многочленами и другими классами простейших функций.

Большое развитие получили работы по топологии и по приложению топологических методов к различным математическим дисциплинам. Создана теоретико-множественная топология и теория линейных представлений топологических групп. Весьма плодотворны применения топологии к вариационному исчислению.

Важное значение имеют работы по одному из наиболее современных разделов математики — функциональному анализу. Основные положения этой дисциплины нашли богатые приложения в теории дифференциальных уравнений с частными

производными и в других разделах математического анализа.

Ряд замечательных результатов получен в теории функций комплексного переменного. Большого развития достигли методы геометрической теории функций комплексного переменного, теория конформных и квазиконформных отображений. Особо следует отметить приложения этих теорий к гидроаэродинамике, теории упругости и электротехнике.

Весьма важное значение для механики и физики имеют обыкновенные дифференциальные уравнения. В этой области получен ряд фундаментальных результатов: разработаны приближенные методы, в частности, разработана нелинейная теория возмущений для дифференциальных уравнений с малым параметром. Проведены глубокие исследования по приложению теории функций от матриц к изучению систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Многочисленные и важные исследования выполнены по теории систем дифференциальных уравнений с частными производными, создана весьма общая классификация уравнений и построены эффективные методы решения различных классов краевых задач уравнений математической физики, имеющих большое значение для сейсмологии, газовой динамики и гидродинамики.

Значительное место занимают работы советских математиков по различным разделам геометрии. Здесь особо следует отметить исследования по геометрии в целом.

Широкое развитие получили в нашей стране работы по теории вероятностей и математической статистике. Получен ряд важных результатов по предельным теоремам для сумм случайных величин, создана общая теория стохастических процессов.

Советская математика имеет также значительные достижения по разработке методов приближенных вычислений. Проводятся работы по созданию вычислительных машин и их применению к решению математических задач.

Благодаря мудрой Сталинской национальной политике к развитию нашей советской математики и ее многочисленных приложений привлечены все национальные республики. За время Сталинских пятилеток созданы многие крупные математические школы в национальных академиях: теории упругости в Тбилиси, теории вероятностей в Ташкенте, теории функций комплексного переменного в Ереване и др. Эти школы дали большое количество первоклассных результатов по теории и по приложениям.

Успехи советской математики связаны тесным образом с ростом всей советской культуры, достигнутым благодаря ге-

ниальному руководству нашего любимого вождя товарища Сталина. Лучшие работы по математике удостоены Сталинской премии. Советские ученые считают делом чести оправдать доверие Иосифа Виссарионовича Сталина, развивая еще более интенсивно научно-исследовательскую работу в соответствии с грандиозными задачами строительства коммунистического общества.

В день семидесятилетия Иосифа Виссарионовича Сталина советские математики вместе со всем советским народом и трудящимися во всем мире горячо приветствуют своего любимого вождя и желают ему здоровья и долгих лет на благо нашей великой Родины.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 7—44

Л. С. ПОНТРЯГИН

КЛАССИФИКАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ $(n+1)$-МЕРНОЙ СФЕРЫ В ПОЛИЭДР K_n, ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА КОТОРОГО И ГРУППЫ БЕТТИ РАЗМЕРНОСТЕЙ $2, \ldots, n-1$ ТРИВИАЛЬНЫ

Через K_n обозначается связный полиэдр, фундаментальная группа которого и группы Бетти размерностей $2, \ldots, n-1$ тривиальны ($n \geqslant 2$). Известно, что n-мерная гомотопическая группа $\pi^n(K_n)$ изоморфна n-мерной группе Бетти $\Delta^n(K_n)$. В работе вычисляется гомотопическая группа $\pi^{n+1}(K_n)$. Кроме того, выясняется, при каких условиях $(n+2)$-мерный цикл из K_n является сферическим.

Введение

Два непрерывные отображения f и g полиэдра P в полиэдр Q называются гомотопными или гомотопически эквивалентными, если существует непрерывное семейство отображений $h_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ полиэдра P в полиэдр Q такое, что $h_0 = f$, $h_1 = g$. В силу этого принципа эквивалентности, все непрерывные отображения полиэдра P в полиэдр Q распадаются на классы попарно гомотопных. Задача гомотопической классификации отображений одного полиэдра в другой представляет собой одну из основных проблем современной топологии. Речь идет здесь о том, чтобы, зная полиэдры P и Q или их обозримо вычислимые инварианты, описать все классы отображений полиэдра P в полиэдр Q.

На понятии гомотопической эквивалентности отображений основано понятие гомотопической эквивалентности полиэдров. Говорят, что два полиэдра A и B принадлежат к одному гомотопическому типу или гомотопически эквивалентны между собой, если существуют такое непрерывное отображение φ полиэдра A в полиэдр B и такое непрерывное отображение ψ полиэдра B в полиэдр A, что отображение $\psi\varphi$ полиэдра A в себя гомотопно тождественному и отображение $\varphi\psi$ полиэдра B в себя гомотопно тождественному. В силу этого принципа эквивалентности, все полиэдры распадаются на гомотопические типы. Очевидно, что два гомеоморфные полиэдра принадлежат одному и тому же гомотопическому типу. Таким образом, гомотопическая классификация полиэдров является более грубой, чем топологическая, и из всех топологических инвариантов выделяется часть более устойчивых — гомотопических инвариантов.

Среди локальных инвариантов полиэдра также естественно выделяются гомотопические инварианты. Пусть a — произвольная точка полиэдра A и K — его триангуляция, в которой точка a является вершиной. Обозначим через K_a край звезды вершины a, т. е. совокупность

всех симплексов звезды, не содержащих a. Известно, что гомотопический тип полиэдра $|K_a|$ не зависит от выбора триангуляции K, а зависит лишь от полиэдра A и точки a. Гомотопические инварианты полиэдра $|K_a|$ и называются локальными гомотопическими инвариантами полиэдра A в точке a.

Современное состояние топологии весьма глубоко оценивается тем фактом, что все известные до сих пор топологические инварианты, для которых имеется алгоритм вычисления, так или иначе оказываются гомотопическими: тотальными, локальными или комбинациями тех и других. Таковы, например, кольцо гомологий (1), используемые в настоящей работе «квадраты» Стинрода (2), а также менее универсальный инвариант Александера, введенный им для доказательства негомеоморфности двух линзовых пространств (3). Все перечисленные инварианты являются тотальными, т. е. определяются гомотопическим типом. Последний играет особенно важную роль в теории многообразий, так как для замкнутых многообразий гомотопический тип определяет все известные топологические инварианты. Попытки доказать негомеоморфность двух замкнутых многообразий, принадлежащих к одному гомотопическому типу, до сих пор не увенчались успехом. Особенно типична попытка доказать негомеоморфность двух линзовых пространств с совпадающим инвариантом Александера; Рейдемейстеру (4) удалось доказать только, что рассмотренные им их триангуляции комбинаторно не эквивалентны, а позже обнаружилось, что многообразия эти принадлежат к одному и тому же гомотопическому типу (5). Точно так же безуспешными оказались все попытки решить проблему Пуанкаре: существуют ли трехмерные многообразия, гомотопически эквивалентные трехмерной сфере, но не гомеоморфные ей?

Повидимому можно утверждать, что до сих пор топология развивалась в рамках гомотопических понятий. В этих рамках получены многие важные результаты, но область далека от исчерпания; более того, основные проблемы, имеющиеся в ней, далеки от полного решения. С легкостью решается проблема гомотопической классификации одномерных полиэдров; имеется также гомотопическая классификация поверхностей. Но уже для трехмерных многообразий вопрос не решен, хотя и будет, вероятно, скоро решен.

Ясно, что задача гомотопической классификации полиэдров была бы полностью решена, если бы была дана гомотопическая классификация отображений полиэдров друг в друга. Это одно уже показывает, насколько велико значение гомотипической классификации отображений. Однако, гомотопическая классификация отображений продвинута еще совершенно недостаточно. В первую очередь здесь необходимо решить вопрос об отображениях сферы S^{n+k} размерности $n+k$ в сферу S^n размерности n, так как в него упирается вся проблема; но до сих пор вопрос решен лишь для $k \leqslant 2$ [(6), (7), (8), (9)], а для $k \geqslant 3$ возникают непреодолимые трудности. Случай сфер является первоочередным не только потому, что мы имеем здесь дело с простейшими объектами, но и потому, что к этому случаю в какой-то степени сводится общий случай. Так, классификация отображений сферы S^n в сферу S^n дала

возможность проклассифицировать отображения n-мерного полиэдра P^n в сферу S^n, сферы S^n в связный полиэдр K_n произвольной размерности, фундаментальная группа которого и группы Бетти размерностей $2, \ldots, n-1$ тривиальны, и даже отображения полиэдра P^n в полиэдр K_n ([10]). Точно так же, после того как была дана классификация отображений сферы S^{n+1} в сферу S^n, удалось, хотя и с большим трудом, дать классификацию отображений полиэдра P^{n+1} в сферу S^n [см. ([9]), ([2])] и сферы S^{n+1} в полиэдр K_n. Последняя и составляет предмет настоящей работы. На очереди стоит классификация отображений: полиэдра P^{n+1} в полиэдр K_n, сферы S^{n+2} в полиэдр K_n и полиэдра P^{n+2} в сферу S^n. Желательно также найти путь к снятию требования тривиальности фундаментальной группы полиэдра K_n.

Гомотопические классы отображений сферы S^n, $n \geqslant 2$, в связный полиэдр Q с тривиальной фундаментальной группой естественно организуются в коммутативную группу $\pi^n(Q)$, так называемую гомотопическую группу полиэдра Q. Гомотопическая группа $\pi^n(Q)$ определяется также и для полиэдра Q с произвольной фундаментальной группой; элементами ее являются особые гомотопические классы отображений поляризованной сферы S^n в полиэдр Q, переводящих полюс сферы в фиксированное «начало» полиэдра Q ([10]). Группа $\pi^n(Q)$ (построенная Гуревичем) весьма удобна для целей классификации отображений полиэдра P в полиэдр Q, так как она может быть использована как область коэффициентов при построении групп гомологий.

В предлагаемой работе вычисляется группа $\pi^{n+1}(K_n)$. Так как фундаментальная группа полиэдра K_n тривиальна, то нет необходимости фиксировать полюс сферы и начало полиэдра K_n, и в работе указания на них будут опускаться.

Во всем исследовании случаи $n=2$ и $n \geqslant 3$ резко отличаются друг от друга. В формулировках, зависящих от n, будет, как правило, предполагаться, что при $n=2$ рассматриваемые сферы и элементы ориентированы и цепи целочисленны, а при $n \geqslant 3$ сферы и элементы не ориентированы и цепи рассматриваются по модулю два. Случаи нарушения этого правила всегда оговариваются.

В работе существенным образом используются новые операции $\smile_i$ и $\succeq$ над ∇-цепями, аналогичные умножению Колмогорова — Александера. Операция $\smile_i$ [определенная Стинродом ([2])] ставит в соответствие двум цепям u и v размерностей p и q симплициального комплекса K, вершины которого упорядочены, цепь $u \smile_i v$ размерности $p+q-i$. При $i=0$ операция эта совпадает с умножением Александера; в этом случае она естественно применяется к целочисленным цепям. При $i>0$ операция $\smile_i$ будет использована в работе только по модулю два. Операция $\succeq$ была введена мною в ([11]), где она обозначалася через $\dot{\times}$. Она ставит в соответствие p-мерному классу ∇-гомологий z^* по четному модулю m $2p$-мерный класс ∇-гомологий $z^* \succeq z^*$ по модулю $2m$. Операция $\succeq$ следующим образом выражается через операции $\smile_0$ и $\smile_1$. Пусть z — целочисленная цепь, редуцируя которую по модулю m, получаем ∇-цикл из z^*; тогда $\nabla z = ma$. Положим:

$$z \succeq z = z \smile_0 z + ma \smile_1 z; \tag{1}$$

редуцируя цепь $z \smile z$ по модулю $2m$, получаем цикл, класс гомологий $z^* \smile z^*$ которого определяется классом гомологий z^*. Операция $\smile_1$, употребленная в формуле ([1]), обозначалась мною в ([11]) через $*$; впоследствии она была обобщена Стинродом в операцию $\smile_i$ с произвольным i.

В дальнейшем будут употребляться следующие обозначения. Если f есть симплициальное отображение комплекса P в комплекс Q, то через $\hat{f}$ будем обозначать соответствующее ему гомоморфное отображение группы цепей комплекса P в группу цепей комплекса Q, а через f^* — сопряженное с $\hat{f}$ гомоморфное отображение группы цепей комплекса Q в группу цепей комплекса P. Индексом $I(x)$ r-мерной ∇-цепи x r-мерного псевдомногообразия M (например, сферы или элемента) будем называть сумму значений цепи x по всем r-мерным симплексам псевдомногообразия M. В дальнейшем важны два случая. В первом случае псевдомногообразие ориентировано, цепь целочисленна и суммирование проводится по положительно ориентированным симплексам. Во втором случае псевдомногообразие не ориентировано, цепь и индекс берутся по модулю два.

Нижеследующая теорема 1 выражает известный гомотопический инвариант γ [([12]), ([9]), ([7])] отображения сферы S^{n+1} в сферу S^n, $n \geqslant 2$, при помощи операции $\smile_{n-2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть f — симплициальное отображение границы S^{n+1} триангулированного элемента P^{n+2} в триангулированную сферу S^n, s^n — n-мерный ∇-цикл из S^n, индекс которого равен 1, $x = f^* s^n$ и z — ∇-цикл из P^{n+2}, пересечение которого с S^{n+1} равно x. Зададим на P^{n+2} порядок вершин, обладающий тем свойством, что, рассматриваемый на S^{n+1}, он переходит при отображении f в некоторый порядок вершин комплекса S^n. Положим:*

$$\gamma(f) = I(z \smile_{n-2} z). \tag{2}$$

Оказывается, что при $n = 2$ целое число $\gamma(f)$ совпадает с гопфовским инвариантом отображения f, а при $n \geqslant 3$ вычет $\gamma(f)$ равен нулю или единице в зависимости от того, гомотопно отображение f нулю, или нет. Таким образом, в обоих случаях величина $\gamma(f)$ является единственным гомотопическим инвариантом отображения f.

В дальнейшем важную роль играет полиэдр H_q^n, составленный из q сфер $S_1^n, \ldots, S_q^n$ с одной общей точкой, называемый букетом. Нижеследующее предложение А) выясняет структуру гомотопической группы $\pi^{n+1}(H_q^n)$ букета H_q^n.

А) Пусть f — симплициальное отображение границы S^{n+1} триангулированного элемента P^{n+2} в триангулированный букет H_q^n, s_i^n — цепь из H_q^n, имеющая на S_i^n индекс 1, а в сферах S_r^n с $r \neq i$ — индекс 0, $x_i = f^* s_i^n$, и z_i — цикл из P^{n+2}, пересечение которого с S^{n+1} равно x_i. Введем в P^{n+2} какой-нибудь порядок вершин, который индуцирует в S^{n+1} порядок вершин, переходящий при отображении f в некоторый порядок вершин комплекса H_q^n, и положим:

$$\text{при } n = 2: \qquad \gamma_{ij}(f) = I(z_i \smile_0 z_j), \tag{3}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(f) = I(z_i \smile_{n-2} z_i). \tag{4}$$

Оказывается, что при $n=2$ симметрическая квадратная целочисленная матрица $\gamma(f)=\|\gamma_{ij}(f)\|$, а при $n\geqslant 3$ однострочная матрица $\gamma(f)=\|\gamma_i(f)\|$ вычетов является единственным гомотопическим инвариантом отображения f и может быть задана произвольно. Если α есть гомотопический класс отображения f, то можно положить:

$$\gamma_{ij}(\alpha)=\gamma_{ij}(f),\quad \gamma_i(\alpha)=\gamma_i(f),\quad \gamma(\alpha)=\gamma(f). \tag{5}$$

Оказывается, что

$$\gamma(\alpha_1+\alpha_2)=\gamma(\alpha_1)+\gamma(\alpha_2), \tag{6}$$

так что γ есть изоморфное отображение группы $\pi^{n+1}(H_q^n)$ на соответствующую аддитивную группу матриц.

Пусть f — симплициальное отображение ориентированной сферы S^r в комплекс Q, принадлежащее классу $\alpha\in\pi^r(Q)$; тогда класс гомологий цикла $\hat{f}(S^r)$ определяется классом α и потому может быть обозначен через $\Phi^r(\alpha)$. Очевидно, что Φ^r есть гомоморфное отображение группы $\pi^r(Q)$ в r-мерную целочисленную группу Бетти $\Delta^r(Q)$ комплекса Q. Ядро гомоморфизма Φ^r будем обозначать через $\pi_0^r(Q)$. Элементы группы $\Phi^r(\pi^r(Q))$ и составляющие их циклы называются сферическими. В настоящей работе доказывается, что все $(n+1)$-мерные циклы комплекса K_n являются сферическими, т. е., что

$$\Phi^{n+1}(\pi^{n+1}(K_n))=\Delta^{n+1}(K_n). \tag{7}$$

B) Так как Φ^n есть изоморфное отображение группы $\pi^n(K_n)$ на группу $\Delta^n(K_n)$ [см. ([10])], то существует такой букет H_q^n, составленный из ориентированных сфер, и такое его симплициальное отображение f в K_n, что циклы

$$\hat{f}(S_i^n)\quad (i=1,\ldots,q) \tag{8}$$

составляют канонический базис n-мерных Δ-гомологий комплекса K_n; определяющая система соотношений для них состоит из соотношений:

$$\tau_i f(S_i^n)\sim 0\quad (i=1,\ldots,q), \tag{9}$$

где $\tau_i\equiv 0 \pmod{\tau_{i+1}}$; $i=1,\ldots,q-1$. Из двойственности между Δ-цепями и ∇-цепями следует существование таких целочисленных ∇-цепей

$$y_i\quad (i=1,\ldots,q), \tag{10}$$

что

$$\nabla y_i\equiv 0 \pmod{\tau_i};\quad \hat{f}(S_i^n)\cdot y_j=\delta_{ij}. \tag{11}$$

Здесь $\cdot$ обозначает скалярное умножение, а δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через k наибольшее i такое, что τ_i четно. При $n=2$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\text{при } i=j\leqslant k:\quad d_{ij}=2\tau_i,\quad y_{ij}=y_i\smile y_i,\\ &\text{в остальных случаях: } d_{ij}=(\tau_i,\tau_j),\quad y_{ij}=y_i\smile_0 y_j.\end{aligned} \tag{12}$$

Здесь y_{ij} можно рассматривать как цикл по модулю d_{ij}. Через φ_{rs} обозначим симплициальное отображение сферы S^3 в букет H_q^2, при котором все элементы матрицы $\gamma(\varphi_{rs})$, за исключением $\gamma_{rs}(\varphi_{rs})=\gamma_{sr}(\varphi_{rs})$,

обращаются в нуль, в то время как $\gamma_{rs}(\varphi_{rs}) = \gamma_{sr}(\varphi_{rs}) = 1$. При $n \geqslant 3$ положим

$$y_{ii} = y_i \smile_{n-2} y_i \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{13}$$

Здесь y_{ii} можно рассматривать как цикл по модулю два [см. (2)]. Через φ_r обозначим симплициальное отображение сферы S^{n+1} в букет H_q^n, при котором все элементы матрицы $\gamma(\varphi_r)$, за исключением $\gamma_r(\varphi_r)$, равны нулю, в то время как $\gamma_r(\varphi_r) = 1$. Элемент группы $\pi_0^3(K_2)$, определяемый отображением $f\varphi_{rs}$ сферы S^3, обозначим через α_{rs}, а элемент группы $\pi_0^{n+1}(K_n)$, определяемый отображением $f\varphi_r$ сферы S^{n+1}, — через α_r.

ТЕОРЕМА 2. *Элементы:*

$$\begin{aligned} &\text{при } n = 2: \quad \alpha_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, q;\ i \leqslant j), \\ &\text{при } n \geqslant 3: \quad \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, k) \end{aligned} \tag{14}$$

составляют систему образующих группы $\pi_0^{n+1}(K_n)$ *и удовлетворяют соотношениям:*

$$\begin{aligned} &\text{при } n = 2: \quad d_{ij}\alpha_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, q;\ i \leqslant j), \\ &\text{при } n \geqslant 3: \quad 2\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k). \end{aligned} \tag{15}$$

Если размерность комплекса K_n *не превышает* $n+1$, *то соотношения* (15) *образуют полную систему. В этом случае группа* $\pi^{n+1}(K_n)$ *распадается в прямую сумму своей подгруппы* $\pi_0^{n+1}(K_n)$ *и некоторой другой подгруппы, изоморфной группе* $\Delta^{n+1}(K_n)$ [см. (7)].

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $u_1, \ldots, u_r$ — *базис целочисленных* Δ*-гомологий размерности* $n+2$ *комплекса* K_n. *Положим:*

$$\begin{aligned} &\text{при } n = 2: \quad u_{ij}^l = u_l \cdot y_{ij}, \\ &\text{при } n \geqslant 3: \quad u_i^l = u_l \cdot y_{ii}. \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь u_{ij}^l *суть вычеты по модулю* d_{ij}, *а* u_i^l — *вычеты по модулю* 2. *Оказывается, что полная система соотношений для образующих* (14) *группы* $\pi_0^{n+1}(K_n)$ *состоит из соотношений* (15) *и соотношений:*

$$\begin{aligned} &\text{при } n = 2: \quad \sum_{i \leqslant j} u_{ij}^l \alpha_{ij} = 0 \quad (l = 1, \ldots, r), \\ &\text{при } n \geqslant 3: \quad \sum_{i=1}^{k} u_i^l \alpha_i = 0 \quad (l = 1, \ldots, r). \end{aligned} \tag{17}$$

Структура всей группы $\pi^{n+1}(K_n)$ и ее связь с группой $\Delta^{n+1}(K_n)$ [см. (7)] полностью описываются теоремой 4, которая формулируется раздельно для случаев $n = 2$ и $n \geqslant 3$.

ТЕОРЕМА 4 ($n = 2$). *Пусть* $v_1, \ldots, v_s$; $w_1, \ldots, w_t$ — *трехмерный целочисленный канонический базис* Δ*-гомологий комплекса* K_2, *где* v_l $(l=1,\ldots,s)$ *есть цикл порядка* m_l $(m_l \equiv 0 \pmod{m_{l+1}})$, *а* w_l $(l=1,\ldots,t)$ — *свободный цикл. Обозначим через* u'_l *такую целочисленную цепь из* K_2, *что*

$$\Delta u'_l = m\, v_l \quad (l = 1, \ldots, s).$$

Тогда $u'_l \cdot y_{ij}$ [см. В)] *можно рассматривать как вычет по модулю* (d_{ij}, m_l). *Пусть* v^l_{ij} — *целые числа, удовлетворяющие условиям:*

$$v^l_{ij} \equiv u'_l \cdot y_{ij} \pmod{(d_{ij}, m_l)}; \quad l = 1, \ldots, s.$$

Тогда в группе $\pi^3(K_2)$ *существуют элементы* $\beta_1, \ldots, \beta_s$; $\delta_1, \ldots, \delta_t$, *составляющие вместе с элементами* (14) *систему образующих группы* $\pi^3(K_2)$, *причем полная система соотношений для этих образующих может быть составлена из соотношений* (15), (17) *и соотношений*

$$m_l \beta_l - \sum_{i \leqslant j} v^l_{ij} \alpha_{ij} = 0 \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{18}$$

Сверх того,

$$-v_l \in \Phi^3(\beta_l) \quad (l = 1, \ldots, s'), \quad -w_l \in \Phi^3(\delta_l) \quad (l = 1, \ldots, t).$$

ТЕОРЕМА 4 ($n \geqslant 3$). *Пусть* $\pi^{n+1}(K_n) = {'\pi^{n+1}} + {''\pi^{n+1}}$ — *разложение группы* $\pi^{n+1}(K_n)$ *в прямую сумму подгруппы* $'\pi^{n+1}$, *составленной из всех элементов группы* $\pi^{n+1}(K_n)$, *порядки которых суть степени двух, и некоторой подгруппы* $''\pi^{n+1}$. *Тогда*

$$\Delta^{n+1}(K_n) = {'\Delta^{n+1}} + {''\Delta^{n+1}},$$

где

$$'\Delta^{n+1} = \Phi^{n+1}('\pi^{n+1}), \quad ''\Delta^{n+1} = \Phi^{n+1}(''\pi^{n+1}),$$

есть аналогичное разложение группы $\Delta^{n+1}(K_n)$. *Для циклов, составляющих элементы группы* $'\Delta^{n+1}$, *выберем канонический базис гомологий* $v_1, \ldots, v_s$, *где* v_l *есть цикл порядка* m_l, *а* m_l *есть степень двух. Пусть* u'_l — *такая целочисленная цепь из* K_n, *что*

$$\Delta u'_l = m_l v_l \quad (l = 1, \ldots, s).$$

Положим $v^l_i = u'_l \cdot y_{ii}$; *здесь* v^l_i *можно рассматривать как вычет по модулю два. Оказывается, что в группе* $'\pi^{n+1}$ *можно выбрать такие элементы* $\beta_1, \ldots, \beta_s$, *что вместе с* (14) *они составят систему образующих группы* $'\pi^{n+1}$, *причем полную систему соотношений для этой системы образующих можно составить из соотношений* (15), (17) *и соотношений*

$$m_l \beta_l - \sum_{i=1}^{k} v^l_i \alpha_i = 0 \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{19}$$

Сверх того,

$$-v_l \in \Phi^{n+1}(\beta_l) \quad (l = 1, \ldots, s).$$

В противоположность $(n+1)$-мерным циклам, не все $(n+2)$-мерные циклы комплекса K_n являются сферическими. Критерий их сферичности дается нижеследующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. *Целочисленный* Δ-*цикл* u *размерности* $n+2$ *комплекса* K_n *тогда и только тогда является сферическим, когда*

$$\text{при } n = 2: \qquad u \cdot y_{ij} \equiv 0 \pmod{d_{ij}}, \tag{20}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad u \cdot y_{ii} \equiv 0 \pmod{2} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{21}$$

Таково в основном содержание предлагаемой работы. Сверх того, в ней дается геометрическое представление $(n+2)$-мерных асферических циклов комплекса K_n.

Результаты этой работы, относящиеся к группе $\pi_0^3(K_2)$, уже были мною опубликованы ([11]).

§ 1. Гомотопические группы сфер и букетов

В этом параграфе я напоминаю некоторые понятия и результаты теории гомотопий и доказываю ряд необходимых для дальнейшего вспомогательных предложений.

A) Ориентированную n-мерную сферу $S^n (n \geqslant 1)$ с выбранной в ней точкой — „полюсом" p — будем называть поляризованной. Пусть K — произвольный связный полиэдр с фиксированной в нем точкой — „началом" a. Непрерывное отображение f поляризованной сферы S^n в K, при котором $f(p) = a$, назовем n-мерным сфероидом в K и будем обозначать через (f, S^n). Два сфероида (f_1, S_1^n) и (f_2, S_2^n) будем считать принадлежащими к одному типу, если существует гомеоморфное отображение φ сферы S_1^n на сферу S_2^n, сохраняющее ориентацию и переводящее полюс в полюс, такое, что отображения f_1 и $f_2\varphi$ поляризованной сферы S_1^n эквиваленты в K, т. е. могут быть связаны деформацией, сохраняющей образ полюса неподвижным. В силу этого условия, n-мерные сфероиды в K распадаются на попарно непересекающиеся между собой типы, множество которых мы обозначим через $\pi^n = \pi^n(K)$. Множество $\pi^n(K)$ превращается в n-мерную гомотопическую группу полиэдра K при помощи операции сложения, определяемой следующим образом. Пусть α_1, α_2 — два типа n-мерных сфероидов, и (f_1, S_1^n), (f_1, S_2^n) — два сфероида, принадлежащие соответственно типам α_1, α_2. Проведем через полюс третьей поляризованной сферы S^n сферу S^{n-1}, разрезающую S^n на замкнутые элементы E_1^n и E_2^n. Через φ_i $(i = 1, 2)$ обозначим отображение элемента E_i^n на сферу S_i^n, переводящее всю его границу S^{n-1} в полюс p_i и гомеоморфно с сохранением ориентации отображающее $E_i^n - S^{n-1}$ на $S_i^n - p_i$. Отображения $f_1\varphi_1$ и $f_2\varphi_2$ вместе дают непрерывное отображение f сферы S^n в K, определяющее сфероид (f, S^n). Тип сфероида f обозначим через α. Доказывается, что α однозначно определяется типами α_1 и α_2; по определению считают, что $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Нулем группы $\pi^n(K)$ служит тип сфероидов, гомотопных нулю, т. е. стягиваемых в начало a. Порядком сфероида будем называть порядок того элемента гомотопической группы, к которому он принадлежит. Если отображение f симплициально, а полюс и начало являются вершинами соответствующих триангуляций, то сфероид (f, S^n) будем называть симплициальным.

В дальнейшем будут рассматриваться почти исключительно полиэдры с тривиальной фундаментальной группой. Так как для таких полиэдров эквивалентность сфероидов (f, S^n) и (g, S^n), употребленная выше, равносильна обычной гомотопности отображений f и g, то выбором полюса и начала в этом случае можно пренебречь.

Доказательство утверждений, высказанных в A), см. в ([10]).

B) Через H_q^n обозначим полиэдр, составленный из n-мерных сфер

$S_1^n, \ldots, S_q^n$, имеющих лишь одну общую точку — начало a. Сферы S_i^n будем иногда считать ориентированными. Полиэдр H_q^n будем называть n-мерным букетом. Выясним структуру группы $\pi^3(H_q^2)$. Пусть (f, S^3) — симплициальный сфероид типа α в H_q^2. В сфере S_i^2 выберем две различные точки q_i^1 и q_i^2, каждая из которых лежит внутри некоторого треугольника триангуляции полиэдра H_q^2. Полный прообраз точки q_i^l $(l = 1, 2)$ можно рассматривать как целочисленный одномерный цикл в сфере S^3. Коэффициент зацепления $\mathfrak{B}(f^{-1}(q_i^1), f^{-1}(q_j^{-2}))$ циклов $f^{-1}(q_i^1)$ и $f^{-1}(q_j^2)$ обозначим через $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(f)$. Легко видеть, что $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Доказывается, что матрица $\gamma = \gamma(f) = \| \gamma_{ij}(f) \|$ однозначно определяется типом γ $(\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(\alpha),\ \gamma = \gamma(\alpha))$, в свою очередь определяет его, и что для каждой целочисленной симметрической матрицы $\| \varepsilon_{ij} \|$ существует тип α такой, что $\gamma_{ij}(\alpha) = \varepsilon_{ij}$. Сверх того,

$$\gamma_{ij}(\alpha_1 + \alpha_2) = \gamma_{ij}(\alpha_1) + \gamma_{ij}(\alpha_2). \tag{1}$$

При $q = 1$ число $\gamma(\alpha) = \gamma_{11}(\alpha)$ есть известный гопфовский инвариант ([12]).

Результаты, формулированные в B), были впервые опубликованы в ([11]). Доказательство для случая $q = 2$ см. в ([13]); оно легко распространяется на случай произвольного q.

C) Пусть $(\varphi, \sum^2)$ — сфероид в букете H_q^2, имеющий на сфере S_i^2 степень отображения σ_i, и (h, S^3) — сфероид в $\sum^2$. Тогда для сфероида $(\varphi h, S^3)$ в H_q^2 инварианты γ_{ij} определяются соотношением:

$$\gamma_{ij}(\varphi h) = \gamma(h)\sigma_i\sigma_j. \tag{2}$$

Будем считать, что отображение φ симплициально; тогда полный прообраз точки q_i^1 в $\sum^2$ состоит из конечного числа точек, и степень отображения φ в каждой из этих точек равна $+1$ или -1. Точки прообраза, для которых степень равна $+1$, обозначим через $p_1^1, \ldots, p_{r_1}^1$; точки прообраза, для которых степень равна -1, обозначим через $n_1^1, \ldots, n_{s_1}^1$. Мы имеем

$$\varphi^{-1}(q_i^1) = p_1^1 + \cdots + p_{r_1}^1 - n_1^1 - \cdots - n_{s_1}^1, \quad r_1 - s_1 = \sigma_i,$$

что имеет вполне определенный алгебраический смысл. Точно так же для точки q_j^2 положим:

$$\varphi(q_j^2) = p_1^2 + \cdots + p_{r_2}^2 - n_1^2 - \cdots - n_{s_2}^2, \quad r_2 - s_2 = \sigma_j.$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(\varphi h) &= \mathfrak{B}(h^{-1}\varphi^{-1}(q_i^1),\ h^{-1}\varphi^{-1}(q_j^2)) = \\ &= \sum_{\alpha_1=1}^{r_1}\sum_{\alpha_2=1}^{r_2} \mathfrak{B}(h^{-1}(p_{\alpha_1}^1), h^{-1}(p_{\alpha_2}^2)) - \sum_{\beta_1=1}^{s_1}\sum_{\alpha_2=1}^{r_2} \mathfrak{B}(h^{-1}(n_{\beta_1}^1),\ h^{-1}(p_{\alpha_2}^2)) - \\ &- \sum_{\alpha_1=1}^{r_1}\sum_{\beta_2=1}^{s_2} \mathfrak{B}(h^{-1}(p_{\alpha_1}^1),\ h^{-1}(n_{\beta_2}^2)) + \sum_{\beta_1=1}^{s_1}\sum_{\beta_2=1}^{s_2} \mathfrak{B}(h^{-1}(n_{\beta_1}^1),\ h^{-1}(n_{\beta_2}^2)) = \\ &= \gamma(h) r_1 r_2 - \gamma(h) s_1 r_2 - \gamma(h) r_1 s_2 + \gamma(h) s_1 s_2 = \\ &= \gamma(h)(r_1 - s_1)(r_2 - s_2) = \gamma(h)\sigma_1\sigma_2.\end{aligned}$$

Итак, соотношение (2) доказано.

D) Пусть (f, S^2) — сфероид порядка $\tau > 0$ в полиэдре K. Через d обозначим самое число τ, если оно нечетно, и 2τ, если τ четно. Пусть,

далее, (g, S^3) — сфероид в S^2. Оказывается, что если $\gamma(g)$ делится на d, то сфероид (fg, S^3) гомотопен нулю в K.

Отображению f соответствует естественный гомоморфизм $\hat{f}$ группы $\pi^3(S^2)$ в группу $\pi^3(K)$. С другой стороны, в силу В), существует естественное изоморфное отображение γ^{-1} аддитивной группы целых чисел в группу $\pi^3(S^2)$. Положим $\theta = \hat{f}\gamma^{-1}$. Наше утверждение заключается в том, что $\theta(x) = 0$ для всякого $x \equiv 0 \pmod d$.

Пусть $\sum^2$ — вспомогательная поляризованная сфера и (h, S^3) — сфероид в $\sum^2$ такой, что $\gamma(h) = 1$. Пусть, далее, $(\varphi_1, \sum^2)$, $(\varphi_2, \sum^2)$, $(\varphi_3, \sum^2)$ — сфероиды в S^2 со степенями τ, 1, $\tau + 1$. В силу (2),

$$\gamma(\varphi_1 h) = \tau^2, \quad \gamma(\varphi_2 h) = 1, \quad \gamma(\varphi_3 h) = (\tau + 1)^2. \tag{3}$$

Так как порядок сфероида (f, S^2) равен τ, то сфероид $(f\varphi_1, \sum^2)$ гомотопен нулю, а сфероиды $(f\varphi_2, \sum^2)$ и $(f\varphi_3, \sum^2)$ гомотопны между собой. Из этого следует, что сфероид $(f\varphi_1 h, S^3)$ гомотопен нулю, а сфероиды $(f\varphi_2 h, S^3)$ и $(f\varphi_3 h, S^3)$ гомотопны между собой. Отсюда, на основании (3), заключаем, что $\theta(\tau^2) = 0$, $\theta(1) = \theta((\tau + 1)^2)$, или, так как θ есть гомоморфизм:

$$\theta(\tau^2) = 0, \quad \theta(\tau^2 + 2\tau) = 0. \tag{4}$$

Из (4) непосредственно вытекает, что при $x \equiv 0 \pmod d$ имеем $\theta(x) = 0$, ибо d есть общий наибольший делитель чисел τ^2 и $\tau^2 + 2\tau$.

Е) Пусть f — отображение букета H_2^2 в полиэдр K, переводящее начало в начало и такое, что сфероиды (f, S_1^2) и (f, S_2^2) имеют соответственно порядки $\tau_1 > 0$ и τ_2. Общий наибольший делитель (τ_1, τ_2) чисел τ_1, τ_2 обозначим через d. Пусть, далее, (g, S^3) — такой сфероид в H_2^2, что $\gamma_{11}(g) = \gamma_{22}(g) = 0$. Оказывается, что если $\gamma_{12}(g)$ делится на d, то сфероид (fg, S^3) гомотопен нулю в K.

Отображению f соответствует естественный гомоморфизм $\hat{f}$ группы $\pi^3(H_2^2)$ в группу $\pi^3(K)$. С другой стороны, в силу В), существует естественное изоморфное отображение γ^{-1} аддитивной группы симметрических целочисленных матриц второго порядка на группу $\pi^3(H_2^2)$. Положим $\theta = \hat{f}\gamma^{-1}$. Наше утверждение заключается теперь в том, что при целом $x \equiv 0 \pmod d$ матрица $\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$ переводится гоморфизмом θ в нуль.

Пусть $\sum^2$ — вспомогательная поляризованная сфера, и (h, S^3) — сфероид в $\sum^2$ такой, что $\gamma(h) = 1$. Пусть, далее, $(\varphi_1, \sum^2)$ — сфероид в S_1^2 со степенью τ_1, $(\varphi_2 \sum^2)$ — сфероид в H_2^2 со степенями отображений на S_1^2 и S_2^2, соответственно равными τ_1 и 1, и $(\varphi_3, \sum^2)$ — сфероид в S_2^2 со степенью 1. В силу (2), имеем

$$\gamma(\varphi_1 h) = \begin{Vmatrix} \tau_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \gamma(\varphi_2 h) = \begin{Vmatrix} \tau_1^2 & \tau_1 \\ \tau_1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \gamma(\varphi_3 h) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Так как сфероид (f, S_1^2) имеет порядок τ_1, то сфероид $(f\varphi_1, \sum^2)$ гомотопен нулю, а сфероиды $(f\varphi_2, \sum^2)$ и $(f\varphi_3, \sum^2)$ гомотопны между собой. Из этого следует, что сфероид $(f\varphi_1 h, S^3)$ гомотопен нулю, а сфероиды $(f\varphi_2 h, S^3)$ и $(f\varphi_3 h, S^3)$ гомотопны между собой. Отсюда, на основании (5), заключаем, что

$$\theta\left(\begin{Vmatrix} \tau_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\right) = 0, \quad \theta\left(\begin{Vmatrix} \tau_1^2 & \tau_1 \\ \tau & 1 \end{Vmatrix}\right) = \theta\left(\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}\right). \tag{6}$$

Из (6) следует

$$\theta\left(\begin{Vmatrix}0 & \tau_1\\ \tau_1 & 0\end{Vmatrix}\right)=0. \tag{7}$$

Если $\tau_2>0$, то точно так же получается:

$$\theta\left(\begin{Vmatrix}0 & \tau_2\\ \tau_2 & 0\end{Vmatrix}\right)=0. \tag{8}$$

Из (7) и (8) справедливость нашего утверждения вытекает непосредственно.

F) При $n\geqslant 3$ группа $\pi^{n+1}(S^n)$ сферы S^n содержит лишь два элемента и потому изоморфна группе вычетов по модулю два. Сфероиду (f, S^{n+1}) типа α в S^n поставим в соответствие вычет $\gamma(f)=\gamma(\alpha)$ по модулю два, нулевой, если сфероид f гомотопен нулю, и единичный, если он не гомотопен нулю. Рассмотрим теперь группу $\pi^{n+1}(H_q^n)$ букета H_q^n [см. B)]. Через ψ_i обозначим отображение букета H_q^n на сферу $S_i^n\subset H_q^n$ такое, что при $x\in S_i^n$ имеем $\psi_i(x)=x$, а при $x\in H_q^n - S_i^n$ имеем $\psi_i(x)=a$. Если (f, S^{n+1}) — произвольный сфероид типа α в H_q^n, то положим $\gamma_i(f)=\gamma(\psi_i f)$. Однострочная матрица $\gamma=\gamma(f)=\|\gamma_i(f)\|$ однозначно определяется типом α и в свою очередь определяет его:

$$\gamma_i(f)=\gamma_i(\alpha),\quad \gamma(f)=\gamma(\alpha).$$

Легко видеть, что при этом

$$\gamma_i(\alpha_1+\alpha_2)=\gamma_i(\alpha_1)+\gamma_i(\alpha_2)\quad (i=1,\ldots, q). \tag{9}$$

Группа $\pi^{n+1}(S^n)$ впервые была вычислена в ([7]); подробное доказательство для случая $n=2$ см. в ([9]). Вычисление группы $\pi^{n+1}(H_q^n)$ см. в ([13]).

G) Пусть $(\varphi, \sum^n)$ — сфероид в букете H_q^n, $n\geqslant 3$, имеющий на сфере S_i^n степень отображения σ_i, и (h, S^{n+1}) — сфероид в $\sum^n$. Тогда

$$\gamma_i(\varphi h)=\gamma(h)\sigma_i. \tag{10}$$

Из этого непосредственно следует, что для всякого сфероида (f, S^{n+1}) в H_q^n существует гомотопный ему сфероид вида $(\varphi h, S^{n+1})$, так как система уравнений $\gamma(h)\sigma_i=\gamma_i(f)$ всегда может быть разрешена относительно чисел σ_i, если принять за $\gamma(h)$ единичный вычет.

Соотношение (10) докажем сперва для случая, когда букет H_q^n содержит лишь одну сферу, т. е. для поляризованной сферы S^n. Степень отображения φ сферы $\sum^n$ в сферу S^n обозначим через σ. Тогда соотношение (10) приобретет вид:

$$\gamma(\varphi h)=\gamma(h)\sigma. \tag{11}$$

Очевидно, мы вправе считать, что $\sigma>0$.

Через $\overline{H}_\sigma^n$ обозначим вспомогательный букет, составленный из σ сфер $\overline{S}_j^n$. В сфере $\overline{S}_j^n$ рассмотрим сфероид (h_j, S^{n+1}) такой, что $\gamma(h_j)=\gamma(h)$. Пусть, далее, $(\psi, \sum^n)$ — сфероид в $\overline{H}_\sigma^n$, имеющий степень, равную единице на каждой из сфер $\overline{S}_j^n$. Легко видеть, что

$$\gamma_j(\psi h)=\gamma(h), \tag{12}$$

ибо отображение $\overline{\psi}_j\psi$ (где $\overline{\psi}_j$ — отображение букета $\overline{H}_\sigma^n$, аналогичное отображению $\overline{\psi}_i$, см. F)) гомотопно гомеоморфному. Таким образом,

если обозначить через α_j тип сфероида (h_j, S^{n+1}) в $\bar{H}^n_\sigma$ и через α — тип сфероида $(\psi h, S^{n+1})$, то

$$\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_\sigma \tag{13}$$

[см. F)]. Пусть χ — отображение букета $\bar{H}^n_\sigma$ в сферу S^n, гомеоморфное на каждой из сфер $\bar{S}^n_j$. Тогда

$$\gamma(\chi h_j) = \gamma(h_j) = \gamma(h),$$

а в силу (13), из этого получаем:

$$\gamma(\chi\psi h) = \sum_{j=1}^{\sigma} \gamma(\chi h_j) = \sigma\gamma(h). \tag{14}$$

Так как отображение $\chi\psi$ имеет степень σ, то оно гомотопно φ, и потому $\gamma(\chi\psi h) = \gamma(\varphi h)$. Отсюда и из (14) и вытекает (11).

Соотношение (10) получается из соотношения (11) путем применения отображения ψ_i.

H) Пусть (f, S^n), $n \geqslant 3$, — сфероид в полиэдре K, имеющий нечетный порядок τ, и (g, S^{n+1}) — произвольный сфероид в S^n. Тогда сфероид (fg, S^{n+1}) гомотопен нулю в K.

Для доказательства рассмотрим вспомогательный сфероид $(\varphi, \sum^n)$ в S^n со степенью τ и сфероид (h, S^{n+1}) в $\sum^n$ такой, что $\gamma(h) = \gamma(g)$. Сфероиды φh и g гомотопны между собой в силу (11). Так как сфероид (f, S^n) имеет порядок τ, то сфероид $(f\varphi, \sum^n)$ гомотопен нулю в K. Поэтому и сфероид $(f\varphi h, S^{n+1})$, а вместе с ним и сфероид (fg, S^{n+1}), гомотопен нулю в K.

§ 2. Вспомогательные операции над классами ∇-гомологий

В следующем параграфе я определяю инвариант $\gamma(f)$ отображения f сферы S^{n+1} в сферу S^n [см. § 1, B) и F)] при помощи операций над ∇-циклами. Таким определением весьма удобно пользоваться при изучении отображений сферы S^{n+1} в комплекс. При $n = 2$ это изучение, результаты которого изложены в ([11]), потребовало от меня введения новой операции $\dot{\times}$, которую здесь я обозначаю через $\smile\!\!\!\smile$ (см. стр. 20, определение 1). При $n \geqslant 3$ я использую для этого изучения введенную Стинродом ([2]) операцию $\smile_i$ [см. A)], являющуюся обобщением введенной мною в ([11]) операции $*$. Настоящий параграф посвящен описанию операций $\smile_i$ и $\smile\!\!\!\smile$.

Я буду пользоваться следующими обозначениями и терминологией. Пусть f — симплициальное отображение комплекса K' в комплекс K, и u — некоторая r-мерная цепь из K; через $f^* u$ будем обозначать цепь из K', принимающую на симплексе T^r из K' значение $u(f(T^r))$, если f не вырождается на симплексе T^r, и значение нуль — в противном случае. Пусть ω — некоторый порядок вершин в комплексе K и ω' — некоторый порядок вершин в комплексе K'. Говорят, что f переводит ω' в ω, если из $a' < b'$, где a' и b' — вершины из K, следует: $f(a') \leqslant f(b')$.

A) Пусть K — конечный симплициальный комплекс, вершины которого снабжены порядком ω, i — целое неотрицательное число, u и v — две целочисленные ∇-цепи из K размерностей p и q. Опера-

ция $\smile_i$ ставит в соответствие цепям u и v целочисленную цепь w размерности $p+q-i$:

$$w = u \smile_i v.$$

Операция эта зависит от заданного порядка ω. ∇-граница при этом определяется соотношением:

$$\nabla w = (-1)^{p+q-i} u \smile_{i-1} v + (-1)^{pq+p+q} v \smile_{i-1} u + \nabla u \smile_i v + (-1)^p u \smile_i \nabla v. \quad (1)$$

Операция $\smile_0$ совпадает с известной операцией умножения Колмогорова — Александера. Если f есть симплициальное отображение комплекса K' с порядком вершин ω' в комплекс K, переводящее ω' в ω, то мы имеем:

$$f^*(u \smile_i v) = f^* u \smile_i f^* v. \quad (2)$$

Если в комплексе K заданы два различных порядка вершин ω_0 и ω_1, то каждому из них соответствует своя операция $\smile_i$; операции эти мы обозначим через $\smile_i^0$ и $\smile_i^1$ соответственно. Для установления связи между $\smile_i^0$ и $\smile_i^1$ вводится операция $\vee_i$, зависящая от обоих порядков ω_0 и ω_1 и ставящая в соответствие цепям u и v целочисленную цепь $u \vee_i v$ размерности $p+q-i-1$. Связь между операциями $\smile_i^0$ и $\smile_i^1$ дается следующим соотношением:

$$\nabla(u \vee_i v) = u \smile_i^1 v - u \smile_i^0 v -$$
$$- [(-1)^{p+q-i} u \vee_{i-1} v + (-1)^{pq+p+q} v \vee_{i-1} u + \nabla u \vee_i v + (-1)^p u \vee_i \nabla v]. \quad (3)$$

Цепь $u \vee_i v$ обращается в нуль на каждом симплексе, на котором порядки ω_0 и ω_1 совпадают. Если в комплексе K' также имеются два порядка вершин ω_0' и ω_1' такие, что f переводит ω_0' в ω_0, а ω_1' в ω_1, то

$$f^*(u \vee_i v) = f^* u \vee_i f^* v. \quad (4)$$

Операции $\smile_i$ и $\vee_i$ дистрибутивны. Все сказанное можно понимать и по произвольному модулю m.

Доказательство утверждений, высказанных в А), см. в ([2]).

В) Нижеследующее утверждение зависит от целого $i \geqslant 0$; при $i=0$ оно понимается по произвольному модулю m, включая и $m=0$; при $i>0$ — по модулю $m=2$. Пусть K — симплициальный комплекс, L — его замкнутый подкомплекс, и z, z' — два ∇-цикла размерности p из K, пересечения которых с L равны одной и той же цепи x и разность которых гомологична нулю в $K-L$. Тогда $z \smile_i z$ и $z' \smile_i z'$ суть циклы, разность которых гомологична нулю в $K-L$. Далее, если в K имеются два порядка вершин ω_0 и ω_1, совпадающие на x, то разность $z \smile_i^1 z - z \smile_i^0 z$ гомологична нулю в $K-L$.

То, что $z \smile_i z$ и $z' \smile_i z'$ суть циклы, непосредственно следует из (1). Пусть $z' - z = \nabla y$, где y обращается в нуль на L. Тогда

$$z' \smile_i z' - z \smile_i z = \nabla y \smile_i z + z \smile_i \nabla y + \nabla y \smile_i \nabla y = c.$$

Формула (1) дает: $c = \nabla d$, где

$$d = y \smile_i z + (-1)^p z \smile_i y + y \smile_i \nabla y + y \smile_{i-1} y.$$

При этом d вместе с y обращается в нуль на L.

Формула (3) дает:

$$z \smile_i^1 z - z \smile_i^0 z = \nabla (z \vee_i z),$$

причем $z \vee_i z$ обращается в нуль на L, так как порядки ω_0 и ω_1 совпадают на x.

C) Пусть K — симплициальный комплекс, L — его замкнутый подкомплекс, x — целочисленный ∇-цикл размерности p из L, и z, z' — две такие целочисленные цепи из K, что пересечение их с L равно x, редуцированные же по четному модулю m, они представляют собой циклы в K, разность которых есть цикл по модулю m, гомологичный нулю в $K-L$. Составим выражения:

$$z \smile\!\!\smile z = z \smile_0 z + \nabla z \smile_1 z, \quad z' \smile\!\!\smile z' = z' \smile_0 z' + \nabla z' \smile_1 z';$$

оказывается, что, редуцированные по модулю $2m$, они представляют собою циклы, разность которых гомологична нулю по модулю $2m$ в $K-L$. Далее, при изменении порядка вершин в K, не затрагивающем порядка вершин в x, цепь $z \smile\!\!\smile z$, редуцированная по модулю $2m$, изменяется на цикл, гомологичный нулю в $K-L$.

Положим $\nabla z = ma$, $\nabla z' = ma'$. Из (1), ввиду четности m, следует

$$\nabla (z \smile\!\!\smile z) = ma \smile_0 z + (-1)^p mz \smile_0 a +$$
$$+ m(a \smile_0 z - z \smile_0 a + (-1)^{p+1} \cdot ma \smile_1 a) \equiv 0 \pmod{2m},$$

т. е. цепь $z \smile\!\!\smile z$, редуцированная по модулю $2m$, есть ∇-цикл. Так как, по предположению, цепь $z' - z$, редуцированная по модулю m, есть цикл, гомологичный нулю в $K-L$, то

$$z' - z = \nabla y + mw,$$

где y и w обращаются в нуль на L. В силу формулы (1),

$$z' \smile\!\!\smile z' - z \smile\!\!\smile z \equiv \nabla d \pmod{2m},$$

где

$$d = y \smile_0 z + (-1)^p z \smile_0 y + y \smile_0 \nabla y + ma \smile_1 y + mw \smile_1 z + mw \smile_1 \nabla y.$$

При этом d вместе с y и w обращается в нуль на L. Таким образом, цепь $z' \smile\!\!\smile z' - z \smile\!\!\smile z$, редуцированная по модулю $2m$, гомологична нулю в $K-L$.

Вычисляя цепь $z \smile\!\!\smile z$ при двух различных порядках вершин, совпадающих на x, мы получим цепи

$$z \smile\!\!\smile^0 z = z \smile_0^0 z + ma \smile_1^0 z, \quad z \smile\!\!\smile^1 z = z \smile_0^1 z + ma \smile_1^1 z.$$

В силу формулы (3),

$$z \smile\!\!\smile^1 z - z \smile\!\!\smile^0 z \equiv \nabla d \pmod{2m},$$

где

$$d = z \vee_0 z + ma \vee_1 z.$$

Так как на x оба порядка вершин совпадают, то d обращается в нуль на L.

Таким образом, утверждение C) полностью доказано.

Определение 1. Пусть K — симплициальный комплекс, z^* — некоторый класс ∇-гомологий из K по четному модулю m и z — целочисленная цепь, которая после редукции по модулю m оказывается циклом из класса z^*. В силу C), цепь $z \smile\!\!\smile z$, редуцированная по мо-

дулю $2m$, есть ∇-цикл по модулю $2m$, класс гомологий которого определяется классом гомологий z^* и потому может быть обозначен через $z^* \smile z^*$. Обычным образом доказывается, что так определенная операция $z^* \smile z^*$ инвариантна относительно выбора триангуляции полиэдра $|K|$.

§ 3. Построение инварианта γ с помощью ∇-гомологий

Здесь инвариант $\gamma(f)$ отображения f сферы S^{n+1} в сферу S^n [см. § 1, B) и F)] определяется и изучается при помощи описанных в предыдущем параграфе операций над ∇-цепями. Полученное определение обобщается, далее, на случай отображения сферы S^{n+1} в букет H_q^n [см. § 1, B)].

Нижеследующая конструкция A) устанавливает связь между операцией $\smile_i$ и отображениями сферы S^{n+1} в сферу S^n.

A) Существует клеточный комплекс M^{n+2} $(n \geqslant 2)$, состоящий из трех клеток E^0, E^n, E^{n+2} и обладающий следующими свойствами:

a) Комплекс $S^n = E^0 + E^n$ составляет полиэдр, гомеоморфный сфере.

b) Пусть M_1^{n+2} — некоторое симплициальное подразделение клеточного комплекса M^{n+2}, индицирующее на S^n подразделение S_1^n. Через e^n обозначим какой-нибудь ∇-цикл из M_1^{n+2}, пересечение s_1^n которого с S_1^n имеет в S_1^n индекс 1, и через e^{n+2} — какой-нибудь ∇-цикл из M_1^{n+2}, имеющий в M_1^{n+2} индекс 1 (под индексом понимается алгебраическое число симплексов цепи). Тогда

$$e_1^n \smile_{n-2} e_1^n \sim e_1^{n+2}. \tag{1}$$

c) Пусть P^{n+2} — замкнутый элемент с границей S^{n+1} и f — непрерывное отображение сферы S^{n+1} в сферу S^n; тогда отображение f можно распространить в отображение f всего элемента P^{n+2} в полиэдр M^{n+2}, и инвариант $\gamma(f)$ отображения f сферы S^{n+1} в сферу S^n равен степени отображения f элемента P^{n+2} на элементе E^{n+2} (которая при $n \geqslant 3$ понимается по модулю два).

Доказательство утверждения A) см. в ([2]).

Нижеследующая теорема дает выражение инварианта $\gamma(f)$ отображения f сферы S^{n+1} в сферу S^n при помощи операции $\smile_{n-2}$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть f — симплициальное отображение границы S^{n+1} триангулированного элемента P^{n+2} в трангулированную сферу S^n, s^n — n-мерный ∇-цикл из S^n, индекс которого равен 1, $x = f^* s^n$ и z — ∇-цикл из P^{n+2}, пересечение которого с S^{n+1} равно x. Зададим на P^{n+2} порядок ω вершин, обладающий тем свойством, что, рассматриваемый на S^{n+1}, он переходит при отображении f в некоторый порядок ω' вершин комплекса S^n. Оказывается, что инвариант $\gamma(f)$ отображения f равен индексу $I(z \smile_{n-2} z)$ цепи $z \smile_{n-2} z$.*

Доказательство. Пусть ω_0 и ω_1 — два порядка вершин в S^{n+1}, которые при отображении f переходят в ω'; покажем, что

$$I(z \smile_{n-2}^{0} z) = I(z \smile_{n-2}^{1} z). \tag{2}$$

В силу формулы (3) § 2,

$$z \smile^1_{n-2} z - z \smile^0_{n-2} z = \nabla (z \vee_{n-2} z). \qquad (3)$$

Далее,

$$\nabla (z \vee_{n-2} z) \sim \nabla (x \vee_{n-2} x) \text{ в } P^{n+2} - S^{n+1}. \qquad (4)$$

Так как f переводит порядки ω_0 и ω_1 в один и тот же порядок ω', то, в силу формулы (4) § 2,

$$x \vee_{n-2} x = f^* s^n \vee_{n-2} f^* s^n = f^* (s^n \vee_{n-2} s^n) = f^* (0) = 0. \qquad (5)$$

Ввиду того что индекс всякой $(n+2)$-мерной ∇-цепи из P^{n+2}, гомологичной нулю в $P^{n+2} - S^{n+1}$, равен нулю, из (3), (4) и (5) следует (2).

Сферу S^n будем считать совпадающей со сферой того же наименования, расположенной в комплексе M^{n+2} [см. А)]. Так как неизвестно, может ли заданная триангуляция сферы S^n индуцироваться какой-либо триангуляцией полиэдра M^{n+2}, то в полиэдре M^{n+2} выберем просто настолько мелкую триангуляцию M_1^{n+2}, чтобы индуцированная ею триангуляция S_1^n сферы S^n допускала симплициальную аппроксимацию e тождественного отображения комплекса S_1^n на комплекс S^n. Симплициальное отображение f триангулированной сферы S^{n+1} в триангулированную сферу S^n распространим в непрерывное отображение f элемента P^{n+2} в M_1^{n+2}. Через P_1^{n+2} обозначим настолько мелкое подразделение комплекса P^{n+2}, чтобы отображение f комплекса P_1^{n+2} в комплекс M_1^{n+2} допускало симплициальную аппроксимацию g. Триангуляцию, индуцированную на S^{n+1} триангуляцией P_1^{n+2}, обозначим через S_1^{n+1}; тогда S_1^{n+1} есть подразделение триангуляции S^{n+1}. Так как e аппроксимирует тождественно отображение комплекса S_1^n на комплекс S^n, а g аппроксимирует непрерывное отображение f комплекса S_1^{n+1} в комплекс S_1^n, то eg аппроксимирует непрерывное отображение f комплекса S_1^{n+1} в комплекс S^n. Из этого вытекает, что если a есть произвольная вершина триангуляции S_1^{n+1}, а A — тот симплекс минимальной размерности из S^{n+1}, к которому принадлежит точка a, то $eg(a)$ есть вершина симплекса $f(A)$; таким образом, среди вершин симплекса A существует вершина $h(a)$, удовлетворяющая условию:

$$eg(a) = fh(a). \qquad (6)$$

Для того чтобы аппроксимировать тождественное отображение комплекса P_1^{n+2} на комплекс P^{n+2} симплициальным, нужно каждой вершине b триангуляции P_1^{n+2} поставить в соответствие вершину симплекса B триангуляции P^{n+2}, причем симплекс B однозначно определен как симплекс минимальной размерности, содержащий точку b. Такое соответствие на S_1^{n+1} уже установлено и обозначено через h; распространив его на весь комплекс P_1^{n+2}, мы получим симплициальное отображение h комплекса P_1^{n+2} на комплекс P^{n+2}, аппроксимирующее тождественное отображение.

На комплексе M_1^{n+2} зададим такой порядок ω'' вершин, который, рассматриваемый на S_1^n, переводится отображением e в порядок ω'. На комплексе P_1^{n+2} зададим такой порядок ω_0 вершин, чтобы при отображении g он переходил в ω''. С другой стороны, на комплексе P_1^{n+2}

построим порядок ω_1 вершин, переходящий при отображении h в порядок ω.

Положим $s_1^n = e^* s^n$. Так как отображение e имеет степень 1, то индекс цепи s_1^n равен единице. Через e_1^n обозначим какой-нибудь цикл из M_1^{n+2}, пересечение которого с S_1^n равно s_1^n, и через e_1^{n+2} — некоторую цепь из M_1^{n+2}, индекс которой равен единице. В силу (1),

$$e_1^n \smile_{n-2} e_1^n \sim e_1^{n+2}, \tag{7}$$

где операция $\smile_{n-2}$ построена при помощи порядка ω''. Из того, что степень отображения g элемента P_1^{n+2} на элементе E_1^{n+2} равна $\gamma(f)$, и из формул (2) § 2 и (7) следует:

$$I(g^* e_1^n \smile_{n-2}^0 g^* e_1^n) = \gamma(f), \tag{8}$$

где операция $\smile_{n-2}^0$ построена при помощи порядка ω_0. Из формулы (2) § 2 получаем:

$$I(h^* z \smile_{n-2}^1 h^* z) = I(z \smile_{n-2} z), \tag{9}$$

где операция $\smile_{n-2}^1$ построена на основе порядка ω_1, а операция $\smile_{n-2}$ — на основе операции ω.

Нетрудно проверить, что пересечение цикла $g^* e_1^n$ с S_1^{n+1} равно $(eg)^* s^n$, а пересечение цикла $h^* z$ с S_1^{n+1} равно $(fh)^* s^n$. В силу (6), оба эти пересечения совпадают между собой, и потому, в силу В) § 2,

$$g^* e_1^n \smile_{n-2}^0 g^* e_1^n - h^* z \smile_{n-2}^0 h^* z \sim 0 \quad \text{в} \quad P^{n+2} - S^{n+1}. \tag{10}$$

Следовательно,

$$I(g^* e_1^n \smile_{n-2}^0 g^* e_1^n) = I(h^* z \smile_{n-2}^0 h^* z). \tag{11}$$

Применяя соотношение (2) к ∇-циклу $h^* z$ в комплексе P_1^{n+2} и отображению $fh = eg$ сферы S_1^{n+1} в сферу S^n, получим:

$$I(h^* z \smile_{n-2}^0 h^* z) = I(h^* z \smile_{n-2}^1 h^* z). \tag{12}$$

Из соотношений (8), (11), (12) и (9) следует, наконец, что

$$\gamma(f) = I(z \smile_{n-2} z).$$

Итак, теорема 1 полностью доказана.

Теореме 1 можно придать нижеследующую формулировку В), в которой не используется элемент P^{n+2}. Формулировка эта не будет, впрочем, применяться в дальнейшем.

В) Пусть f — симплициальное отображение триангулированной сферы S^{n+1} в триангулированную сферу S^n, s^n — некоторая цепь из S^n индекса 1 и $f^* s^n = x = \nabla y$. Введем в S^{n+1} какой-нибудь порядок вершин, переходящий при отображении f в некоторый порядок вершин комплекса S^n. Тогда

$$\gamma(f) = I(x \smile_{n-2} y) + I(y \smile_{n-3} y). \tag{13}$$

Для доказательства соотношения (13) будем рассматривать комплекс S^{n+1} как границу триангулированного элемента P^{n+2}; ∇-границу и индекс в S^{n+1} будем обозначать через ∇ и I соответственно, а ∇-границу и индекс в P^{n+2} будем обозначать через ∇' и I' соответственно. По предположению, $x = \nabla y$ и потому, полагая $z = \nabla' y$, мы получим в

P^{n+2} цикл z, пересечение которого с S^{n+1} равно x. Таким образом. в силу теоремы 1,

$$\gamma(f) = I'(\nabla' y \smile_{n-2} \nabla' y).$$

В силу формулы (1) § 2 мы имеем:

$$\nabla' y \smile_{n-2} \nabla' y = \nabla'(\nabla' y \smile_{n-2} y + y \smile_{n-3} y).$$

Далее,

$$\nabla'(\nabla' y \smile_{n-2} y) \sim \nabla'(\nabla y \smile_{n-2} y) \text{ в } P^{n+2} - S^{n+1},$$

и, таким образом,

$$I'(\nabla'(\nabla' y \smile_{n-2} y + y \smile_{n-3} y)) = I'(\nabla'(x \smile_{n-2} y + y \smile_{n-3} y)).$$

Так как ∇-граница каждого $(n+1)$-мерного симплекса из S^{n+1}, взятая в P^{n+2}, состоит из единственного $(n+2)$-мерного симплекса, то

$$I'(\nabla'(x \smile_{n-2} y + y \smile_{n-3} y)) = I(x \smile_{n-2} y + y \smile_{n-3} y),$$

и соотношение (13), таким образом, доказано.

C) Пусть f — симплициальное отображение границы S^3 триангулированного элемента P^4 в триангулированный букет H^2_q, s^2_i — некоторая целочисленная цепь из сферы S^2_i, индекс которой в S^2_i равен $+1$, и $x_i = f^* s^2_i$. Пусть, далее, z_i — ∇-цикл из P^4, пересечение которого с S^3 равно x_i, и y_i — такая цепь из S^3, что $x_i = \nabla y_i$, где ∇ обозначает ∇-границу, взятую в S^3. Тогда

$$\text{при } i \neq j: \qquad \gamma_{ij}(f) = I'(z_i \smile_0 z_j) = I(x_i \smile_0 y_j), \tag{14}$$

где I' есть индекс, взятый в P^4, а I — индекс, взятый в S^3.

∇-границу в P^4 будем обозначать через ∇'. Тогда $\nabla' y_j$ есть ∇-цикл из P^4, пересечение которого с S^3 равно x_j, и потому $z_j - \nabla' y_j$ есть цикл в $P^4 - S^3$, который, ввиду известных свойств элемента, гомологичен нулю в $P^4 - S^3$. Таким образом, $z_j - \nabla' y_j = \nabla' c$, где c обращается в нуль на S^3, и мы имеем

$$z_i \smile_0 (z_j - \nabla' y_j) = z_i \smile_0 \nabla' c = \nabla'(z_i \smile_0 c) \sim 0 \text{ в } P^4 - S^3.$$

Отсюда следует, что

$$I'(z_i \smile_0 z_j) = I'(z_i \smile_0 \nabla' y_j) = I'(\nabla'(z_i \smile_0 y_j)) = I(x_i \smile_0 y_j). \tag{15}$$

Если u — произвольная ∇-цепь из S^3, то через $B(u)$ обозначим дуальную по отношению к ней звездную цепь. Индекс пересечения $I(B(x_i), B(y_j))$ цикла $B(x_i)$ с цепью $B(y_j)$ представляет собою коэффициент зацепления $\mathfrak{V}(B(x_i), B(x_j))$, который, как легко видеть, равен $\gamma_{ij}(f)$ [см. § 1, B)]. С другой стороны, в силу известной связи между произведениями ∇-цепей и пересечениями Δ-цепей в многообразии,

$$I(B(x_i), B(y_j)) = I(x_i \smile_0 y_j),$$

откуда, по формуле (15), следует (14).

D) Пусть f — симплициальное отображение триангулированной сферы S^{n+1} в триангулированный букет H^n_q, P^{n+2} — триангулированный элемент с границей S^{n+1} и s^n_i — цепь из H^n_q, имеющая в сфере S^n_i индекс 1, а в сферах S^n_r с $r \neq i$ — индекс 0. Положим $x_i = f^* s^n_i$ и пусть z_i — цикл из P^{n+2}, пересекающийся с S^{n+1} по циклу x_i. Введем в P^{n+2}

какой-нибудь порядок вершин, который индуцирует в S^{n+1} порядок вершин, переходящий при отображении f в некоторый порядок вершин комплекса H_q^n. Оказывается, что тогда

$$\text{при } n=2: \qquad \gamma_{ij}(f) = I(z_i \smile_0 z_j), \tag{16}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(f) = I(z_i \smile_{n-2} z_i), \tag{17}$$

где I есть индекс, взятый в P^{n+2}.

Из B) § 2 следует, что $I(z_i \smile_{n-2} z_i)$ при произвольном $n \geqslant 2$ не зависит от выбора цикла z_i, а определяется цепью x_i. Покажем, что при $n=2$ и $i \neq j$ индекс $I(z_i \smile_0 z_j)$ определяется цепями x_i, x_j. Пусть z'_i — другой цикл из P^4, пересекающийся с S^3 по x_i; покажем, что

$$I(z'_i \smile_0 z_j) = I(z_i \smile_0 z_j).$$

Действительно, цикл $z'_i - z_i$ обращается в нуль на S^3 и потому гомологичен нулю в $P^4 - S^3$. Таким образом, существует цепь c, равная нулю на S^3, такая, что $z'_i - z_i = \nabla c$, и мы имеем:

$$I(z'_i \smile_0 z_j) - I(z_i \smile_0 z_j) = I(\nabla c \smile_0 z_j) = I(\nabla(c \smile_0 z_j)) = 0.$$

При произвольном $n \geqslant 2$ часть цепи s_i^n, лежащую в S_i^n, обозначим через s_{i1}^n. Мы имеем: $s_i^n = s_{i0}^n + s_{i1}^n$, где цикл s_{i0}^n имеет индекс 0 в каждой сфере букета и потому гомологичен нулю в букете:

$$s_{i0}^n = \nabla t_i^{n-1}. \tag{18}$$

Положим $f^* s_{i1}^n = x_{i1}$, $f^* t_i^{n-1} = y_i$. Мы имеем:

$$x_i = x_{i1} + \nabla' y_i, \tag{19}$$

где ∇' есть ∇-граница, взятая в S^{n+1}. Пусть z_{i1} — цикл из P^{n+2}, пересекающийся с S^{n+1} по x_{i1}. Ввиду независимости правых частей соотношений (16) и (17) от выбора циклов z_i, мы можем принять, что

$$z_i = z_{i1} + \nabla y_i,$$

где ∇ обозначает ∇-границу, взятую в P^{n+2}.

Докажем соотношение (16). Мы имеем:

$$z_i \smile_0 z_j = z_{i1} \smile z_{j1} + \nabla y_i \smile_0 z_{j1} + z_{i1} \smile_0 \nabla y_j + \nabla y_i \smile_0 \nabla y_j =$$
$$= z_{i1} \smile_0 z_{j1} + \nabla(y_i \smile_0 z_{j1} + z_{i1} \smile_0 y_j + y_i \smile_0 \Delta y_j).$$

Далее,

$$I(\nabla(y_i \smile_0 z_{j1} + z_{i1} \smile_0 y_j + y_i \smile_0 \nabla y_j)) = I'(y_i \smile_0 x_{j1} + x_{i1} \smile_0 y_j + y_i \smile_0 \nabla' y_j),$$

где I' есть индекс, взятый в S^3. Но

$$y_i \smile_0 x_{j1} + x_{i1} \smile_0 y_j + y_i \smile_0 \nabla' y_j = f^*(t'_i \smile_0 s_{j1}^2 + s_{i1}^2 \smile_0 t'_j + t'_i \smile_0 \nabla t'_j) = 0,$$

так как размерность цепи, стоящей под знаком f^*, равна трем, а цепь эта расположена в двумерном комплексе H_q^2. Таким образом, в силу теоремы 1 и предложения C),

$$I(z_i \smile_0 z_j) = I(z_{i1} \smile_0 z_{j1}) = \gamma_{ij}(f),$$

и формула (16) доказана.

Докажем соотношение (17). Мы имеем:

$$z_i \smile_{n-2} z_i = z_{i1} \smile_{n-2} z_{i1} + \nabla y_i \smile_{n-2} z_{i1} + z_{i1} \smile_{n-2} \nabla y_i + \nabla y_i \smile_{n-2} \nabla y_i =$$
$$= z_{i1} \smile_{n-2} z_{i1} + \nabla(y_i \smile_{n-2} z_{i1} + z_{i1} \smile_{n-2} y_i + y_i \smile_{n-2} \nabla y_i + y_i \smile_{n-3} y_i).$$

Далее,

$$I\left(\nabla\left(y_i \smile_{n-2} z_{i1} + z_{i1} \smile_{n-2} y_i + y_i \smile_{n-2} \nabla y_i + y_i \smile_{n-3} y_i\right)\right) =$$
$$= I'\left(y_i \smile_{n-2} x_{i1} + x_{i1} \smile_{n-2} y_i + y_i \smile_{n-2} \nabla' y_i + y_i \smile_{n-3} y_i\right),$$

где I' есть индекс, взятый в S^{n+1}. Но

$$y_i \smile_{n-2} x_{i1} + x_{i1} \smile_{n-2} y_i + y_i \smile_{n-2} \nabla' y_i + y_i \smile_{n-3} y_i =$$
$$= f^*\left(t_i^{n-1} \smile_{n-2} s_{i1}^n + s_{i1}^n \smile_{n-2} t_i^{n-1} + t_i^{n-1} \smile_{n-2} \nabla t_i^{n-1} + t_i^{n-1} \smile_{n-3} t_i^{n-1}\right) = 0,$$

так как размерность цепи, стоящей под знаком f^*, равна $n+1$, а цепь эта расположена в n-мерном комплексе H_q^n. Таким образом, в силу теоремы 1,

$$I(z_i \smile_{n-2} z_i) = I(z_{i1} \smile_{n-2} z_{i1}) = \gamma_i(f),$$

и формула (17) доказана.

§ 4. Вычисление группы $\pi^{n+1}(K_n^{n+1})$

В этом и следующем параграфах будет дана полная классификация отображений сферы S^{n+1} в связный полиэдр K_n произвольной размерности, фундаментальная группа которого и все группы Бетти размерностей $2, \ldots, n-1$ тривиальны; точнее говоря, будет вычислена гомотопическая группа $\pi^{n+1}(K_n)$ полиэдра K_n. В настоящем параграфе будут даны некоторые вспомогательные предложения и полностью вычислена группа $\pi^{n+1}(K_n^{n+1})$ полиэдра K_n^{n+1} размерности $n+1$.

A) Пусть K — конечный связный симплициальный комплекс произвольной размерности, $\pi^r = \pi^r(K)$ — его гомотопическая группа размерности r и $\Delta^r = \Delta^r(K)$ — его r-мерная группа Бетти по целочисленному полю коэффициентов. Пусть, далее, $\alpha \in \pi^r$ и (f, s^r) — некоторый симплициальный сфероид типа α. Тогда алгебраический образ $\hat{f}(S^r)$ сферы S^r представляет собой целочисленный Δ-цикл и класс гомологий z^* этого цикла является элементом группы Δ^r. Легко видеть, что z^* определяется элементом α, $z^* = \Phi^r(\alpha)$, и что Φ^r есть гомоморфное отображение группы π^r в группу Δ^r. Ядро гомоморфизма Φ^r в группе π^r обозначим через $\pi_0^r = \pi_0^r(K)$. Образ $\Phi^r(\pi^r)$ группы π^r в группе Δ^r состоит из классов гомологий, которые, как и составляющие их циклы, называются сферическими. Через K^s обозначим комплекс, составленный из всех симплексов комплекса K, размерности которых не превосходят s. Из ([14]) непосредственно следует, что если K обладает тривиальной фундаментальной группой, то элемент α группы π^r тогда и только тогда принадлежит подгруппе π_0^r, когда существует такой сфероид (f, S^r) типа α, что $f(S^r) \subset K^{r-1}$. Этот факт будет существенным образом использован в дальнейшем.

B) Через K_n мы обозначим связный комплекс произвольной размерности, фундаментальная группа которого и группы Бетти рвзмерностей $2, \ldots, n-1$ тривиальны. Известно [см. ([10])], что для комплекса K_n гомоморфизм Φ^n является изоморфным отображением группы π^n на группу Δ^n. Через K_n^s обозначим, как и в A), комплекс, составленный из всех симплексов комплекса K_n, размерности которых не превосходят s. Легко видеть, что в комплексе K_n^n фундаментальная группа и группы Бетти размерностей $2, \ldots, n-1$ также тривиальны. Покажем,

что для комплекса K_n гомоморфизм Φ^{n+1} есть гомоморфизм на всю группу Δ^{n+1}, т. е. что в комплексе K_n все $(n+1)$-мерные циклы являются сферическими.

Пусть $z = \sum_{i=1}^{l} a_i A_i^{n+1}$ — произвольный $(n+1)$-мерный целочисленный цикл комплекса K_n (здесь A_i^{n+1} суть $(n+1)$-мерные ориентированные симплексы из K_n, а a_i — целые числа). Пусть, далее, S^n — ориентированная сфера, взятая в достаточно мелкой триангуляции, и $T_1^n, \ldots, T_l^n$ — некоторая совокупность попарно непересекающихся симплексов комплекса S^n. Через f обозначим отображение симплекса T_i^n на границу ΔA_i^{n+1} симплекса A_i^{n+1} со степенью a_i такое, что при нем вся граница симплекса T_i^n переходит в одну из вершин симплекса A_i^{n+1}. Отображение f симплексов $T_1^n, \ldots, T_l^n$ распространим непрерывно в отображение f всей сферы S^n, при котором оставшаяся часть ее переходит в K_n^1. Полученный сфероид (f, S^n) гомотопен нулю в K_n^{n+1}; именно, отображение f каждого симплекса T_i^n можно стянуть в ту вершину, в которую отображена его граница, не перемещая образов точек самой границы, так что деформация будет протекать в симплексе A_i^{n+1}. Описанная деформация позволяет распространить отображение f сферы S^n в отображение f элемента E_0^{n+1}, ограниченного сферой S^n, таким образом, чтобы $f(E_0^{n+1}) \subset K_n^{n+1}$ и степень отображения f элемента E_0^{n+1} на симплексе A_i^{n+1} была равна a_i. Без ограничения общности мы можем считать, что элемент E_0^{n+1} триангулирован, и что отображение f является симплициальным отображением его в K_n^{n+1}. При этом условии алгебраический образ элемента E_0^{n+1} совпадает с циклом z. В частности, алгебраический образ $\hat{f}(S^n)$ сферы S^n просто равен нулю, так как z есть цикл, и потому сфероид (f, S^n) гомотопен нулю в K_n^n. Таким образом, отображение f сферы S^n можно распространить на второй элемент E_1^n, ограниченный сферой S^n, так что $f(E_1^n) \subset K_n^n$. Отображение f на сфере $S^{n+1} = E_0^{n+1} - E_1^{n+1}$ составляет сфероид (f, S^{n+1}), причем, очевидно, $\hat{f}(S^{n+1}) = z$.

C) Обозначим через p число Бетти размерности n комплекса K_n и через $\tau_{p+1}, \ldots, \tau_q$ — его n-мерные кручения, занумерованные так, что каждое из них делится на следующее, и положим $\tau_1 = \ldots = \tau_p = 0$. Через k обозначим наибольшее из значений i, для которых τ_i четно. Так как Φ^n для комплекса K_n есть изоморфизм [см. B)], то существует симплициальное отображение f букета H_q^n [см. § 1, B)] в K_n, при котором циклы

$$\hat{f}(S_1^n), \ldots, \hat{f}(S_q^n) \tag{1}$$

составляют базис n-мерных гомологий комплекса K_n с определяющими соотношениями

$$\tau_i \hat{f}(S_i^n) \sim 0 \quad (i = 1, \ldots, q), \tag{2}$$

а сфероиды

$$(f, S_1^n), \ldots, (f, S_q^n) \tag{3}$$

составляют базис n-мерных гомотопий комплекса K_n с такими же определяющими соотношениями. Пусть (φ_{ij}, S^3) — сфероид в H_q^2, для которого инвариант $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ равен единице, а все остальные элементы матрицы γ [см. § 1, B)] равны нулю, и α_{ij} — тип сфероида $(f\varphi_{ij}, S^3)$ в K_2. При $n \geqslant 3$ пусть (φ_i, S^{n+1}) — сфероид в H_q^n, для которого γ_i равно единице, а все остальные элементы матрицы γ равны нулю [см. § 1, F)], и α_i — тип сфероида $(f\varphi_i, S^{n+1})$ в K_n. Оказывается тогда, что элементы

$$\alpha_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, q;\ i \leqslant j) \tag{4}$$

составляют систему образующих группы $\pi_0^3(K_2)$, а при $n \geqslant 3$ элементы

$$\alpha_i \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

— систему образующих группы $\pi_0^{n+1}(K_n)$. Очевидно, все элементы (5) имеют порядок 2.

Из того, что гомотопические группы $\pi^1, \ldots, \pi^{n-1}$ комплекса K_n все тривиальны [см. B)], а его базис гомотопий размерности n составляют сфероиды (3), следует существование такого отображения ψ комплекса K_n^n в H_q^n, что отображение $f\psi$ комплекса K_n^n в K_n гомотопно тождественному вложению комплекса K_n^n в K_n. Пусть (g, S^{n+1}) — произвольный симплициальный сфероид в K_n такой, что $\hat{g}(S^{n+1}) \sim 0$. В силу A), существует гомотопный ему сфероид (g', S^{n+1}), удовлетворяющий условию $g'(S^{n+1}) \subset K_n^n$. Таким образом, сфероид (g, S^{n+1}) гомотопен сфероиду $(f\psi g', S^{n+1})$. Из этого и из предложений B), F), H) § 1 непосредственно вытекает справедливость утверждения C).

Для решения вопроса о зависимости между образующими (4), (5) приходится привлечь к рассмотрению базис ∇-гомологий, двойственный к базису (1).

D) Из двойственности между Δ-цепями и ∇-цепями непосредственно вытекает существование n-мерных целочисленных ∇-цепей

$$y_1, \ldots, y_q \tag{6}$$

комплекса K_n, удовлетворяющих условиям:

$$\nabla y_i \equiv 0 \pmod{\tau_i}, \tag{7}$$

$$\hat{f}(S_i^n) \cdot y_j = \delta_{ij}, \tag{8}$$

где $\cdot$ обозначает скалярное умножение, а δ_{ij} — символ Кронекера. При $n \geqslant 3$ цепи $y_1, \ldots, y_k$ можно рассматривать как ∇-циклы по модулю два, и мы положим:

$$y_{ii} = y_i \smile_{n-2} y_i \quad (n \geqslant 3;\ i = 1, \ldots, k); \tag{9}$$

здесь y_{ii} есть $(n+2)$-мерный ∇-цикл по модулю два. При $n = 2$ все пары $\{i, j\}$ $(i, j = 1, \ldots, q)$ разобьем на два класса: Ω и Ω'. К Ω' отнесем пары вида $\{i, i\}$, $i = p+1, \ldots, k$; к классу Ω — все остальные. Если $\{i, j\} \in \Omega$, то положим $d_{ij} = (\tau_i, \tau_j)$: если же $\{i, i\} \in \Omega'$, то положим $d_{ii} = 2\tau_i$. Далее, положим:

$$\text{при } \{i, j\} \in \Omega: \quad y_{ij} = y_i \smile_0 y_j, \tag{10}$$

$$\text{при } \{i, i\} \in \Omega': \quad y_{ii} = y_i \,\underset{\smile}{\smile}\, y_i. \tag{11}$$

Таким образом, y_{ij} можно рассматривать как ∇-цикл по модулю d_{ij} (модуль нуль обозначает обычную целочисленность).

ЛЕММА 1. *Пусть m — неотрицательное целое число, Q — симплициальный комплекс и S^{n+1} — такой его подкомплекс, гомеоморфный $(n+1)$-мерной сфере, что в $Q - S^{n+1}$ всякий n-мерный ∇-цикл по модулю m гомологичен нулю. Пусть, далее, q^{n+2} — такая Δ-цепь из Q по модулю m, что $S^{n+1} = \Delta q^{n+2}$, и g — симплициальное отображение комплекса Q в комплексе K_n, имеющее на S^{n+1} вид $f\varphi$, где φ есть некоторое симплициальное отображение сферы S^{n+1} в букет H_q^n* [см. С)]. *Тогда $\hat{g}(q^{n+2})$ есть Δ-цикл по модулю m в K_n, и в обозначениях* D)

$$\text{при } n = 2: \qquad \gamma_{ij}(\varphi) \equiv \hat{g}(q^{n+2}) \cdot y_{ij} \,(\mathrm{mod}\ (d_{ij},\ m)), \tag{12}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(\varphi) \equiv \hat{g}(q^{n+2}) \cdot y_{ii} \,(\mathrm{mod}\ (2,\ m)). \tag{13}$$

Доказательство. Тот факт, что $\hat{g}(q^{n+2})$ есть цикл по модулю m, непосредственно вытекает из того, что $\hat{\varphi}(S^{n+1}) = 0$. Перейдем к доказательству соотношений (12) и (13).

В комплексе K_n введем некоторый порядок ω_1 вершин, в H_q^n введем такой порядок ω_2 вершин, который при отображении f переходит в ω_1. В S^{n+1} введем такой порядок ω_3 вершин, который при отображении φ переходит в порядок ω_2. Так как порядок ω_3 вершин комплекса S^{n+1} переходит при отображении $f\varphi$ в порядок ω_1, то порядок ω_3 можно распространить в порядок ω_4 вершин всего комплекса Q, переходящий при отображении g в порядок ω_1. Мы имеем:

при $n = 2$, $\{i, j\} \in \Omega$:
$$\hat{g}(q^{n+2}) \cdot y_{ij} \equiv q^{n+2} \cdot (g^* y_i \smile_0^4 g^* y_j) \,(\mathrm{mod}\,(d_{ij},\ m)), \tag{14}$$

при $n = 2$, $\{i, i\} \in \Omega'$:
$$\hat{g}(q^{n+2}) \cdot y_{ii} \equiv q^{n+2} \cdot (g^* y_i \smile^4 g^* y_i) \,(\mathrm{mod}\,(d_{ii},\ m)), \tag{15}$$

при $n \geqslant 3$:
$$\hat{g}(q^{n+2}) \cdot y_{ii} \equiv q^{n+2} \cdot (g^* y_i \smile_{n-2} g^* y_i) \,(\mathrm{mod}\,(2,\ m)). \tag{16}$$

Положим: $s_i^n = f^* y_i$, $x_i = \varphi^* s_i^n$. Из (8) непосредственно следует, что индекс цепи s_i^n в сфере S_i^n равен единице, а во всех остальных сферах S_r^n $(r \neq i)$ равен нулю. Далее, из того, что на S^{n+1} отображение g совпадает с $f\varphi$, следует, что пересечение цепи $g^* y_i$ с комплексом S^{n+1} равно цепи x_i.

Над комплексом S^{n+1} построим конус P^{n+2} с вершиной O. Комплекс P^{n+2} имеет, кроме вершин комплекса S^{n+1}, только одну вершину O. Порядок ω_3, имеющийся в S^{n+1}, распространим произвольным образом в некоторый порядок ω_5 вершин комплекса P^{n+2}. Дадим теперь симплициальное отображение h комплекса Q в комплекс P^{n+2}, считая, что на S^{n+1} отображение h тождественно, а все остальные вершины комплекса Q переводит в O. Так как отображение h переводит

порядок ω_3 в порядок ω_5, то торядок ω_3 можно распространить в порядок ω_6 вершин всего комплекса Q, переходящий при отображении h в порядок ω_5. Теперь в комплексе Q имеются уже два порядка — ω_4 и ω_6; они совпадают на S^{n+1}, что и будет использовано в дальнейшем.

Пусть z_i — целочисленный ∇-цикл из P^{n+2}, пересечение которого с S^{n+1} равно x_i. Так как пересечения цепей g^*y_i и h^*z_i с комплексом S^{n+1} совпадают между собой, то $g^*y_i - h^*z_i$ есть цепь из $Q - S^{n+1}$, которую можно рассматривать как цикл по модулю τ_i. В силу свойств комплекса Q,

$$g^*y_i - h^*z_i \sim 0 \,(\mathrm{mod}\,(\tau_i,\ m)). \tag{17}$$

Из предложения D) § 3 получаем:

$$\text{при } n = 2: \qquad \gamma_{ij}(\varphi) = I\,(z_i \smile_0^5 z_j), \tag{18}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(\varphi) = I\,(z_i \smile_{n-2}^5 z_i). \tag{19}$$

Так как $h(q^{n+2}) = P^{n+2}\,(\mathrm{mod}\,m)$, то из (18) и (19) следует:

при $n = 2$:

$$I\,(z_i \smile_0^5 z_j) \equiv q^{n+2}\cdot(h^*z_i \smile_0^6 h^*z_j)\ (\mathrm{mod}\,m), \tag{20}$$

при $n \geqslant 3$:

$$I\,(z_i \smile_{n-2}^5 z_i) \equiv q^{n+2}\,(h^*z_i \smile_{n-2}^6 h^*z_i)\ \mathrm{mod}\,(2,\ m)). \tag{21}$$

В силу предложений B) и C) § 2, из (17) следует:

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } n = 2,\ \{i,\ j\} \in \Omega:\\ q^{n+2}\cdot(h^*z_i \smile_0^6 h^*z_j) \equiv q^{n+2}\cdot(g^*y_i \smile_0^4 g^*y_j)\ (\mathrm{mod}\,(d_{ij},\ m)),\end{array}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } n = 2,\ \{i,\ i\} \in \Omega':\\ q^{n+2}(h^*z_i \smile_0^6 h^*z_i) \equiv q^{n+2}\cdot(g^*y_i \,\underset{\smile}{\smile}^4\, g^*y_i)\ (\mathrm{mod}\,(d_{ii},\ m)),\end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{при } n \geqslant 3:\\ q^{n+2}\cdot(h^*z_i \smile_{n-2}^6 h^*z_i) \equiv q^{n+2}\cdot(g^*y_i \smile_{n-2}^4 g^*y_i)\ (\mathrm{mod}\ (2,\ m)).\end{array}\right\} \tag{24}$$

Сопоставляя формулы (14), (15), (16) с формулами (18) — (24), мы и получаем соотношения (12) и (13). Этим лемма 1 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Определяющая система соотношений для образующих* (4) *группы* $\pi_0^3\ (K_2^3)$ [см. A)] *имеет вид*:

$$d_{ij}\alpha_{ij} = 0 \quad (i,\ j = 1, \ldots, q) \quad [\text{см. D)}]. \tag{25}$$

При $n \geqslant 3$ *определяющая система соотношений для образующих* (5) *группы* $\pi_0^{n+1}\ (K_n^{n+1})$ [см. A)] *имеет вид*:

$$2\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{26}$$

Доказательство. Соотношения (25) и (26) непосредственно вытекают из предложений D), E), F) § 1; остается показать, что соотношения эти образуют полные системы.

Пусть $(\varphi,\ S^{n+1})$ — произвольный сфероид в H_q с инвариантами γ_{ij} или γ_i соответственно. Сфероид $(f\varphi,\ S^{n+1})$ [см. C)] входит тогда в класс:

$$\text{при } n = 2: \qquad \sum_{i \leqslant j} \gamma_{ij}\alpha_{ij}, \tag{27}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \sum_{i=1}^{k} \gamma_i\alpha_i. \tag{28}$$

Допустим, что сфероид $(f\varphi, S^{n+1})$ гомотопен нулю в K_n^{n+1} и покажем, что тогда

$$\text{при } n=2: \qquad \gamma_{ij} \equiv 0 \pmod{d_{ij}} \quad (i, j = 1, \ldots, q), \tag{29}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \gamma_i \equiv 0 \pmod 2 \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{30}$$

Пусть P^{n+2} — элемент, ограниченный сферой S^{n+1}. Так как, по предположению, сфероид $(f\varphi, S^{n+1})$ гомотопен нулю, то отображение $f\varphi$ можно распространить в отображение g всего элемента P^{n+2} в комплекс K_n^{n+1}. Без ограничения общности можно считать, что отображения φ и g являются симплициальными. Полагая $m=0$ и $Q=P^{n+2}$, мы окажемся в условиях применимости леммы 1. Так как цепь y_{ij} имеет размерность $n+2$ и расположена в $(n+1)$-мерном комплексе K_n^{n+1}, то $y_{ij}=0$, и потому соотношения (12), (13) переходят в соотношения (29), (30).

Итак, теорема 2 полностью доказана.

Дополним теорему 2 следующим предложением:

E) Группа $\pi^{n+1}(K_n^{n+1})$ изоморфна прямой сумме групп $\pi_0^{n+1}(K^{n+1})$ и $\Delta^{n+1}(K_n^{n+1})$ [см. А)].

В силу А), для комплекса K_n^{n+1} имеем: $\Phi^{n+1}(\pi^{n+1}) = \Delta^{n+1}$, причем ядро гомоморфизма Φ^{n+1} есть π_0^{n+1}. Так как группа $\Delta^{n+1}(K_n^{n+1})$ $(n+1)$-мерного комплекса K_n^{n+1} не имеет элементов конечного порядка, то группа π^{n+1} изоморфна прямой сумме ядра π_0^{n+1} гомоморфизма Φ^{n+1} и факторгруппы π^{n+1}/π_0^{n+1}, изоморфной группе Δ^{n+1}.

§ 5. Вычисление группы $\pi^{n+1}(K_n)$

В предыдущем параграфе была построена система образующих

$$\text{при } n=2: \qquad \alpha_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, q;\ i \leqslant j), \tag{1}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{2}$$

группы $\pi_0^{n+1}(K_n)$ и найдена полная система соотношений:

$$\text{при } n=2: \qquad d_{ij}\alpha_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, q;\ i \leqslant j), \tag{3}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad 2\alpha_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

для случая, когда размерность комплекса K_n не превышает $n+1$ (см. теорему 2). В этом параграфе система (3), (4) будет пополнена соотношениями, имеющими место в комплексе K_n произвольной размерности. Далее, система (1), (2) будет дополнена до системы образующих группы $\pi^{n+1}(K_n)$ и для пополненной системы будет указана полная система соотношений.

А) Комплекс Q, рассмотренный в лемме 1, в дальнейшем будет иметь специальный вид. При $m=0$ за Q примем $(n+2)$-мерный триангулированный шар с границей S^{n+1} и за q^{n+2} — целочисленную $(n+2)$-мерную Δ-цепь, равную сумме всех согласованно ориентированных $(n+2)$-мерных симплексов из Q, так что

$$\Delta q^{n+2} = S^{n+1}. \tag{5}$$

При $m>0$ комплекс Q строится следующим образом. Пусть R — замкнутая область $(n+2)$-мерного эвклидова пространства, ограниченная двумя концентрическими сферами S^{n+1} и S_1^{n+1}; зададим ориентации области R и сфер S^{n+1}, S_1^{n+1} так, чтобы $\Delta R = S^{n+1} - S_1^{n+1}$. Пусть ψ — отображение сферы S_1^{n+1} на некоторую ориентированную сферу $\sum^{n+1}$ со степенью m. Каждую точку $x \in S_1^{n+1}$ приклеим к точке $\psi(x)$ и полученный так из R и $\sum^{n+1}$ полиэдр, взятый в некоторой триангуляции, обозначим через Q. За q^{n+2} примем целочисленную цепь, равную сумме всех $(n+2)$-мерных положительно ориентированных симплексов из Q, так что:

$$\Delta q^{n+2} = S^{n+1} - m \sum^{n+1}. \tag{6}$$

После редукции по модулю m последнее соотношение перейдет в условие $S^{n+1} = \Delta q^{n+2}$ леммы 1. Легко проверить, что для комплекса Q выполнено и гомологическое условие леммы 1: в $Q - S^{n+1}$ всякий n-мерный ∇-цикл по модулю m гомологичен нулю.

ЛЕММА 2. *Пусть m — целое неотрицательное число и u — целочисленная $(n+2)$-мерная ∇-цепь из K_n, удовлетворяющая условию:*

$$\Delta u = mv. \tag{7}$$

Тогда существует симплициальное отображение g комплекса Q [см. А] *в комплекс K_n такое, что*

$$\hat{g}(q^{n+2}) = u, \tag{8}$$

и совпадающее на S^{n+1} с отображением $f\varphi$, где φ — симплициальное отображение сферы S^{n+1} в букет H_q^n [см. § 4, С)]. *Заметим, что из соотношений* (6), (7) *и* (8) *следует:*

$$\hat{g}\left(\sum^{n+1}\right) = -v. \tag{9}$$

Доказательство. При $m=0$ проведем в шаре Q сферу S_0^{n+1}, концентрическую с S^{n+1}. Сфера эта разбивает Q на две замкнутые области R_0 и R_1, первая из которых примыкает к S^{n+1}, а вторая гомеоморфна шару. При $m>0$ сферу S_0^{n+1}, концентрическую со сферой S^{n+1}, проведем в области R. Сфера S_0^{n+1} разбивает R на две замкнутые области, R_0 и R_1, первая из которых примыкает к S^{n+1}, а вторая — к S_1^{n+1}. В соответствии с этим при произвольном m комплекс Q распадется в сумму двух комплексов Q_0 и Q_1, а цепь q^{n+2} — в сумму двух цепей, q_0^{n+2} и q_1^{n+2}.

Согласно предложению В) § 4 (все $(n+1)$-мерные Δ-циклы из K_n сферичны), в K_n существует такой симплициальный сфероид $\left(h, \sum^{n+1}\right)$, что

$$\hat{h}\left(\sum^{n+1}\right) = -v. \tag{10}$$

При любом m положим

$$u = \sum_{i=1}^{\mu} a_i A_i^{n+2}, \tag{11}$$

где A_i^{n+2} суть ориентированные симплексы комплекса K_n, а a_i — целые числа. На сфере S_0^{n+1} выберем систему попарно непересекающихся симплексов $T_0^{n+1}, T_1^{n+1}, \ldots, T_\mu^{n+1}$. При $m=0$ симплекс T_0^{n+1} не нужен. При $m>0$ пусть ψ' — отображение симплекса T_0^{n+1} на сферу $\sum^{n+1}$ со степенью m, при котором граница симплекса переходит в вершину. При $x \in T_0^{n+1}$ положим $g(x)=h\psi'(x)$. При произвольном m на симплексе T_i^{n+1}, $i \geqslant 1$, отображение g определим так, чтобы оно отображало T_i^{n+1} на границу симплекса A_i^{n+2} со степенью a_i и переводило границу симплекса T_i^{n+1} в одну из вершин симплекса A_i^{n+2}. На остальной части сферы S_0^{n+1} (не вошедшей в симплексы T_i^{n+1}) определим g так, чтобы эта часть перешла в K_n^1. Отображение g симплекса T_i^{n+1}, $i \geqslant 1$, можно стянуть в ту вершину симплекса A_i^{n+2}, в которую перешла граница симплекса T_i^{n+1}, так что при этом вся деформация будет проходить лишь по симплексу A_i^{n+2}. Пользуясь этой деформацией, мы без труда убеждаемся в том, что при $m=0$ сфероид (g, S_0^{n+1}) гомотопен нулю, а при $m>0$ сфероиды (g, S_0^{n+1}) и $(h\psi, S_1^{n+1})$ [см. A)] принадлежат к одному типу. Поэтому отображение g сферы S_0^{n+1} можно продолжить в отображение g всей области R_1 так, чтобы при $m>0$ оно совпало на S_1^{n+1} с отображением $h\psi$. При этом, ввиду указанного способа деформирования, $g(R_1) \subset K_n^{n+2}$, и степень отображения g области R_1 на симплексе A_i^{n+2} равна a_i. Ввиду того что при $m>0$ на S_1^{n+1} отображение g совпадает с $h\psi$, можно рассматривать отображение g как определенное на Q и совпадающее с h на $\sum^{n+1}$. Без ограничения общности можно принять, что g есть симплициальное отображение комплекса Q_1 в K_n; при этом:

$$\hat{q}(q_1^{n+2})=u. \tag{12}$$

При $m>0$ имеем: $S_0^{n+1}=\Delta q_1^{n+2}+m\sum^{n+1}$, откуда в силу (12), (7) и (10),

$$\hat{g}(S_0^{n+1})=0; \tag{13}$$

последнее верно и при $m=0$, когда Q_1 есть элемент.

Соотношение (13) показывает, что тип сфероида (g, S_0^{n+1}) принадлежит к группе $\pi_0^{n+1}(K_n^{n+1})$. Поэтому [см. § 4, C)] существует сфероид $(f\varphi, S^{n+1})$ одного с ним типа в K_n^{n+1}. Так как сфероиды (g, S_0^{n+1}) и $(f\varphi, S^{n+1})$ принадлежат к одному типу, то отображение g, рассматриваемое на S_0^{n+1}, можно распространить на замкнутую область R_0 так, чтобы при этом на S^{n+1} оно совпало с $f\varphi$ и удовлетворяло условию $g(R_0) \subset K_n^{n+1}$. Из этого и из (12) следует (8). Таким образом, лемма 2 полностью доказана.

Если размерность комплекса K_n больше $n+1$, то между образующими (1) или соответственно (2), вообще говоря, имеются соотношения, не вытекающие из соотношений (3) или соответственно (4); полная система этих дополнительных соотношений дается нижеследующей теоремой.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$u_1, \ldots, u_r \tag{14}$$

— базис целочисленных Δ-гомологий размерности $n+2$ комплекса K_n, т. е. такая система целочисленных Δ-циклов размерности $n+2$ из K_n, что для любого целочисленного Δ-цикла u размерности $n+2$ из K_n имеет место соотношение вида:

$$u \sim \sum_{l=1}^{r} a_l u_l. \tag{15}$$

Положим [см. § 4, D)]

$$\text{при } n=2: \quad u_{ij}^l = u_l \cdot y_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, q), \tag{16}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \quad u_i^l = u_l \cdot y_{ii} \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{17}$$

Здесь u_{ij}^l суть вычеты по модулю d_{ij}, а u_i^l — вычеты по модулю два. Оказывается тогда, что полная система соотношений для образующих (1) *группы $\pi_0^3(K_2)$ состоит из соотношений системы* (3) *и соотношений*

$$\sum_{i<j} u_{ij}^l \alpha_{ij} = 0, \tag{18}$$

а для образующих (2) *группы $\pi_0^{n+1}(K_n)\,(n \geqslant 3)$ — из соотношений системы* (4) *и соотношений:*

$$\sum_{i=1}^{k} u_i^l \alpha_i = 0 \quad (l = 1, \ldots, r). \tag{19}$$

Доказательство. Допустим, что в K_n имеет место соотношение:

$$\text{при } n=2: \quad \sum_{i<j} t_{ij} \alpha_{ij} = 0, \tag{20}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \quad \sum_{i=1}^{k} t_i \alpha_i = 0, \tag{21}$$

где t_{ij} можно рассматривать как вычет по модулю d_{ij} [см. (3)] а t_i — как вычет по модулю 2 [см. (4)]. Это значит, что в H_q^n существует сфероид (φ, S^{n+1}), удовлетворяющий условиям:

$$\text{при } n=2: \quad \gamma_{ij}(\varphi) \equiv t_{ij} \pmod{d_{ij}} \quad (i, j = 1, \ldots, q), \tag{22}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \quad \gamma_i(\varphi) = t_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{23}$$

такой, что сфероид $(f\varphi, S^{n+1})$ гомотопен нулю в K_n, и возможно, следовательно, распространить отображение $f\varphi$, заданное на сфере S^{n+1}, в отображение g элемента Q, ограниченного сферой S^{n+1}. Без ограничения общности можно считать, что отображения φ и g являются симплициальными. Пусть q^{n+2} — такая целочисленная цепь из Q, что $\Delta q^{n+1} = S^{n+1}$; положим:

$$\hat{g}(q^{n+2}) = u. \tag{24}$$

Так как u есть целочисленный Δ-цикл размерности $n+2$ из K_n, то при некоторых значениях чисел $a_1, \ldots, a_r$ имеет место соотношение (15) и, следовательно:

$$\text{при} \quad n=2: \qquad u\cdot y_{ij} = \sum_{l=1}^{r} a_l u_{ij}^l, \tag{25}$$

$$\text{при} \quad n \geqslant 3: \qquad u\cdot y_{ii} = \sum_{l=1}^{r} a_l u_i^l. \tag{26}$$

С другой стороны, из леммы 1 следует, что

$$\text{при} \quad n=2: \qquad \gamma_{ij}(\varphi) \equiv u\cdot y_{ij} \pmod{d_{ij}}, \tag{27}$$

$$\text{при} \quad n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(\varphi) = u\cdot y_{ii}. \tag{28}$$

Формулы (22), (25), (27) показывают, что соотношение (20) вытекает из соотношений (18), а формулы (23), (26), (28) показывают, что соотношение (21) является следствием соотношений (19).

Покажем, что соотношения (18) (19) действительно имеют место.

На основании леммы 2 ($m=0$), мы заключаем, что существует отображение g_l элемента Q в K_n, удовлетворяющее условию

$$\hat{g}\,(q^{n+2}) = u_l, \tag{29}$$

причем на границе S^{n+1} элемента Q отображение g_l представимо в форме $f\varphi_l$, где φ_l есть отображение сферы S^{n+1} в H_q^n. Таким образом, сфероид $(f\varphi_l, S^{n+1})$ гомотопен нулю в K_n. Сфероид $(f\varphi_l, S^{n+1})$ принадлежит типу:

$$\text{при} \quad n=2: \qquad \sum_{i<j} \gamma_{ij}(\varphi_l)\,\alpha_{ij}, \tag{30}$$

$$\text{при} \quad n \geqslant 3: \qquad \sum_{i=1}^{k} \gamma_i(\varphi_l)\,\alpha_i. \tag{31}$$

С другой стороны, в силу леммы 1,

$$\text{при} \quad n=2: \qquad \gamma_{ij}(\varphi_l) \equiv u_l\cdot y_{ij} \pmod{d_{ij}}, \tag{32}$$

$$\text{при} \quad n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(\varphi_l) = u_l\cdot y_{ii}. \tag{33}$$

Из формул (32), (16) и из того факта, что тип (30) является нулевым, следует (18). Таким же образом из формул (33), (17) и из того факта, что тип (31) является нулевым, следует (19).

Итак, теорема 3 полностью доказана.

Перейдем, наконец, к вычислению самой группы $\pi^{n+1}(K_n)$.

Ввиду значительных различий, имеющихся здесь между случаями $n=2$ и $n \geqslant 3$, случаи эти будут разобраны в отдельно формулированных теоремах.

ТЕОРЕМА 4 ($n=2$). *Пусть*

$$v_1, \ldots, v_s;\; w_1, \ldots, w_t \tag{34}$$

— трехмерный целочисленный канонический базис Δ-гомологий комплекса K_2, где $v_l\,(l=1, \ldots, s)$ есть цикл порядка m_l ($m_l \equiv 0 \pmod{m_{l+1}}$), а $w_l\,(l=1, \ldots, t)$ — свободный цикл. Обозначим через u_l' такую целочисленную цепь из K_2, что

$$\Delta u_l' = m_l v_l \quad (l = 1, \ldots, s), \tag{35}$$

и через d_{ij}^l — *общий наибольший делитель чисел* d_{ij} *и* m_l. *Тогда*

$$u_l' \cdot y_{ij} \tag{36}$$

можно рассматривать как вычет по модулю d_{ij}^l, *так как* u_l' *можно трактовать как* Δ-*цикл по модулю* m_l, *а* y_{ij} — *как* ∇-*цикл по модулю* d_{ij}. *Пусть* v_{ij}^l — *целые числа, удовлетворяющие условиям:*

$$v_{ij}^l \equiv u_l' \cdot y_{ij} \pmod{d_{ij}^l} \quad (i, j = 1, \ldots, q; \ l = 1, \ldots, s); \tag{37}$$

тогда в группе $\pi^3(K_2)$ *существуют элементы*

$$\beta_1, \ldots, \beta_s; \ \delta_1, \ldots, \delta_t, \tag{38}$$

составляющие вместе с элементами (1) *систему образующих группы* $\pi^3(K_2)$, *причем полная система соотношений для этих образующих может быть составлена из соотношений* (3), (18) *и соотношений:*

$$m_l \beta_l - \sum_{i \leqslant j} v_{ij}^l \alpha_{ij} = 0 \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{39}$$

К сказанному можно прибавить, что

$$-v_l \in \Phi^3(\beta_l) \quad (l = 1, \ldots, s), \tag{40}$$

$$-w_l \in \Phi^3(\delta_l) \quad (l = 1, \ldots, t). \tag{41}$$

Доказательство. В силу леммы 2, существуют комплекс $Q = Q_l$, построенный для числа $m = m_l$ [см. А)], и симплициальное отображение g_l этого комплекса в комплекс K_2, удовлетворяющие условию:

$$\hat{g}_l(q_l^4) = u_l' \quad (l = 1, \ldots, s), \tag{42}$$

причем на сфере S_l^3 отображение g_l имеет вид $f\varphi_l$, где φ_l есть симплициальное отображение сферы S_l^3 в букет H_q^2.

В силу леммы 1,

$$\gamma_{ij}(\varphi_l) \equiv u_l' \cdot y_{ij} \equiv v_{ij}^l \pmod{d_{ij}^l} \tag{43}$$

[см. (37)]. Таким образом, существуют целые числа ξ_{ij}^l и η_{ij}^l, удовлетворяющие условиям:

$$v_{ij}^l = \gamma_{ij}(\varphi_l) + \xi_{ij}^l d_{ij} + \eta_{ij}^l m_l. \tag{44}$$

В силу соотношений (3), из (44) следует:

$$\sum_{i \leqslant j} v_{ij}^l \alpha_{ij} = \sum_{i \leqslant j} \gamma_{ij}(\varphi_l) \alpha_{ij} + m_l \sum_{i \leqslant j} \eta_{ij}^l \alpha_{ij}. \tag{45}$$

В этом соотношении первая сумма справа есть тип сфероида $(f\varphi_l, S_l^3)$. Она же равна $m_l \beta_l'$, где β_l' есть тип сфероида $(g_l, \sum_l^3)$. Таким образом,

$$\sum_{i \leqslant j} v_{ij}^l \alpha_{ij} = m_l \beta_l, \tag{46}$$

где

$$\beta_l = \beta_l' + \sum_{i \leqslant j} \eta_{ij}^l \alpha_{ij}. \tag{47}$$

Этим (39) доказано. (40) следует из (47) и (9). Далее, так как все циклы размерности 3 в комплексе K_2 сферичны, то существуют $\delta_l \in \pi^3(K_2)$, удовлетворяющие условию (41).

Покажем, что система (1) и построенная нами система (38) вместе составляют базис группы $\pi^3(K_2)$. Пусть δ — произвольный элемент группы $\pi^3(K_2)$ и (ψ, S^3) — симплициальный сфероид типа δ; мы имеем

$$\hat{\psi}(S^3) \sim \sum_{l=1}^{s} b_l v_l + \sum_{l=1}^{t} d_l w_l. \quad (48)$$

Положим:

$$\alpha = \delta + \sum_{l=1}^{s} b_l \beta_l + \sum_{l=1}^{t} d_l \delta_l. \quad (49)$$

В силу (40), (41) и (48), имеем: $\Phi^3(\alpha) = 0$, т. е. $\alpha \in \pi_0^3(K_2)$. Поэтому

$$\alpha = \sum_{i<j} a_{ij} \alpha_{ij}. \quad (50)$$

Из (49) и (50) следует, что системы (1) и (38) вместе образуют базис группы $\pi^3(K_2)$.

Покажем теперь, что системы (3), (18), (39), вместе взятые, составляют полную систему соотношений между выбранными образующими группы $\pi^3(K_2)$. Допустим, что имеет место соотношение:

$$\sum_{i<j} a_{ij} \alpha_{ij} + \sum_{l=1}^{s} b_l \beta_l + \sum_{l=1}^{t} d_l \delta_l = 0. \quad (51)$$

Применяя к соотношению (51) гомоморфизм Φ^3 и переходя к соответствующим циклам, получим:

$$-\sum_{l=1}^{s} b_l v_l - \sum_{l=1}^{t} d_l w_l \sim 0. \quad (52)$$

Так как базис (34) является каноническим, то из (52) получаем:

$$b_l = m_l c_l \quad (l = 1, \ldots, s); \qquad d_l = 0 \quad (l_l = 1, \ldots, t). \quad (53)$$

Таким образом, соотношение (51) получает вид:

$$\sum_{i<j} a_{ij} \alpha_{ij} + \sum_{l=1}^{s} c_l m_l \beta_l = 0. \quad (54)$$

Умножая (39) на c_l, суммируя по l и вычитая полученное так соотношение из (54), мы придем к соотношению, связывающему только элементы системы (1) группы $\pi_0^3(K_2)$. По теореме 3, оно является следствием соотношений (3), (18). Этим доказано, что соотношения (3), (18), (39) составляют полную систему.

Итак, теорема 4 ($n = 2$) полностью доказана.

Рассмотрению случая $n \geqslant 3$ предпошлем элементарное алгебраическое предложение.

B) Пусть G — коммутативная группа с конечным числом образующих, и $'G$ — ее подгруппа, составленная из всех элементов, порядки которых являются степенями двух; тогда G разлагается в прямую

сумму подгруппы $'G$ и подгруппы $''G$, которая определена с точностью до изоморфизма.

ТЕОРЕМА 4 ($n \geqslant 3$). *Пусть* $\pi^{n+1} = '\pi^{n+1} + ''\pi^{n+1}$ — *разложение группы* $\pi^{n+1} = \pi^{n+1}(K_n)$ *в прямую сумму, указанное в* B). *Положим*

$$\Phi^{n+1}('\pi^{n+1}) = '\Delta^{n+1}, \quad \Phi^{n+1}(''\pi^{n+1}) = ''\Delta^{n+1}.$$

Так как ядро π_0^{n+1} *гомоморфизма* Φ^{n+1} *входит в* $'\pi^{n+1}$ [см. (4)], *то на подгруппе* $''\pi^{n+1}$ *отображение* Φ^{n+1} *является изоморфным, и группа* $\Delta^{n+1} = \Delta^{n+1}(K_n)$ *распадается в прямую сумму своих подгрупп* $'\Delta^{n+1}$ *и* $''\Delta^{n+2}$, *причем обозначения оказываются согласованными с приведенными в* B). *Для циклов, составляющих элементы группы* $'\Delta^{n+1}$, *выберем канонический базис гомологий:*

$$v_1, \ldots, v_s, \tag{55}$$

где v_l *есть цикл порядка* m_l, *а* m_l *есть степень двух. Пусть* u'_l — *такая целочисленная цепь из* K_n, *что*

$$\Delta u'_l = m_l v_l \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{56}$$

Положим:

$$v_i^l = u'_l y_{ii} \quad (i = 1, \ldots, k;\ l = 1, \ldots, s); \tag{57}$$

здесь v_i^l *можно рассматривать как вычет по модулю два. Оказывается, что в группе* $'\pi^{n+1}$ *можно выбрать такие элементы*

$$\beta_1, \ldots, \beta_s, \tag{58}$$

что вместе с (2) *они составят систему образующих группы* $'\pi^{n+1}$, *причем полную систему соотношений для этой системы образующих можно составить из соотношений* (4), (19) *и соотношений:*

$$m_l \beta_l - \sum_{i=1}^{k} v_i^l \alpha_i = 0 \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{59}$$

К сказанному можно прибавить, что

$$-v_l \in \Phi^{n+1}(\beta_l) \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{60}$$

Этой теоремой структура группы π^{n+1} и ее связь с группой Δ^{n+1} полностью определяются.

Доказательство. В силу леммы 2, существуют комплекс $Q = Q_l$, построенный для числа $m = m_l$ [см. A)], и симплициальное отображение g_l этого комплекса в комплекс K_n, удовлетворяющие условию:

$$\hat{g}_l(q_l^{n+2}) = u'_l \quad (l = 1, \ldots, s), \tag{61}$$

причем на сфере S_l^{n+1} отображение g_l имеет вид $f\varphi_l$, где φ_l есть симплициальное отображение сферы S_l^{n+1} в букет H_q^n.

В силу леммы 1,

$$\gamma_i(\varphi_l) = v_i^l. \tag{62}$$

Таким образом, сфероид $(f\varphi_l, S_l^{n+1})$ принадлежит к типу $\sum_{i=1}^{k} v_i^l \alpha_i$; с дру-

гой стороны, из структуры комплекса Q_l и существования отображения g_l непосредственно вытекает, что тип β_l сфероида $(g_l, \sum_l^{n+1})$ удовлетворяет соотношению:

$$m_l\beta_l = \sum_{i=1}^{k} v_i^l \alpha_i. \tag{63}$$

Таким образом, соотношения (59) доказаны. (60) следует из (9).

Покажем, что элементы (2) и (58) вместе составляют базис группы $'\pi^{n+1}$. Пусть β — произвольный элемент группы $'\pi^{n+1}$; так как его порядок равен степени двух, то $\Phi^{n+1}(\beta) \in {'\Delta^{n+1}}$, и потому существует цикл $\sum_{l=1}^{s} b_l v_l$, принадлежащий классу $\Phi^{n+1}(\beta)$. Из (60) следует, что элемент $\beta + \sum_{l=1}^{s} b_l \beta_l$ принадлежит группе π_0^{n+1} и потому выражается через элементы системы (2), т. е.

$$\beta = \sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i - \sum_{l=1}^{s} b_l \beta_l. \tag{64}$$

Таким образом, установлено, что системы (2) и (58) вместе составляют базис группы $'\pi^{n+1}$.

Покажем, наконец, что соотношения (4), (19) и (59) вместе составляют полную систему соотношений для выбранных образующих группы $'\pi^{n+1}$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i + \sum_{l=1}^{s} b_i \beta_l = 0. \tag{65}$$

Применяя к соотношению (65) отображение Φ^{n+1} и переходя к гомологиям, получаем

$$-\sum b_l v_l \sim 0, \tag{66}$$

и, следовательно,

$$b_l = m_l c_l \quad (l = 1, \ldots, s). \tag{67}$$

Таким образом, соотношение (65) переписывается в виде:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \alpha_i + \sum_{l=1}^{s} c_l m_l \beta_l = 0. \tag{68}$$

Вычитая из него соотношения (59), помноженные на c_l, мы приходим к соотношению, связывающему лишь элементы системы (2), которое, по доказанному ранее, вытекает из соотоошений (4) и (19). Таким образом, соотношение (65) является следствием соотношений (4), (19) и (59).

Итак, теорема 4 ($n \geqslant 3$) полностью доказана.

§ 6. Асферические циклы размерности $n+2$ в K_n

В настоящем параграфе дается гомологический критерий сферичности $(n+2)$-мерного целочисленного цикла в K_n. Далее, разбирается

аналогичный вопрос для циклов по модулю $m \geqslant 2$ и затем более детально выясняется геометрическая структура асферических циклов.

ТЕОРЕМА 5. *Целочисленный Δ-цикл u размерности $n+2$ комплекса K_n тогда и только тогда является сферическим, когда*

$$\text{при } n=2: \qquad u \cdot y_{ij} \equiv 0 \pmod{d_{ij}} \tag{1}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad u \cdot y_{ii} \equiv 0 \pmod 2 \ (i = 1, \ldots, k) \tag{2}$$

[см. § 4, D)].

Доказательство. Допустим, что существует симплициальный сфероид (g, S^{n+2}), удовлетворяющий условию:

$$\hat{g}(S^{n+2}) \sim u, \tag{3}$$

и покажем, что соотношения (1), (2) выполнены. В самом деле:

$$\text{при } n=2: \qquad u \cdot y_{ij} \equiv I(g^* y_{ij}) \pmod{d_{ij}}, \tag{4}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad u \cdot y_{ii} \equiv I(g^* y_{ii}) \pmod 2, \tag{5}$$

где I означает индекс, взятый в сфере S^{n+2}. Далее, имеем:

$$\text{при } n=2,\ \{i,j\} \in \Omega: \quad I(g^* y_{ij}) \equiv I(g^* y_i \smile_0 g^* y_j) \equiv 0 \pmod{d_{ij}}, \tag{6}$$

$$\text{при } n=2,\ \{i,i\} \in \Omega': \quad I(g^* y_{ii}) \equiv I(g^* y_i \, \underset{\smile}{\smile} \, g^* y_i) \equiv 0 \pmod{d_{ii}}, \tag{7}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad I(g^* y_{ii}) \equiv I(g^* y_i \smile_{n-2} g^* y_i) \equiv 0 \pmod 2, \tag{8}$$

так как в $(n+2)$-мерной сфере каждый n-мерный ∇-цикл гомологичен нулю, а операции $\smile_0$, $\underset{\smile}{\smile}$, $\smile_{n-2}$ здесь гомологически инвариантны. Из (4), (5), (6), (7), (8) следует (1), (2).

Покажем теперь, что если соотношения (1), (2) выполнены, то цикл u является сферическим. В силу леммы 2, существует такое симплициальное отображение g триангулированного элемента P^{n+2}, что

$$\hat{g}(P^{n+2}) = u, \tag{9}$$

причем на границе S^{n+1} элемента P^{n+2} отображение g имеет вид $f\varphi$, где φ есть симплициальное отображение сферы S^{n+1} в букет H_q^n. В силу леммы 1,

$$\text{при } n=2: \qquad \gamma_{ij}(\varphi) \equiv u \cdot y_{ij} \equiv 0 \pmod{d_{ij}}, \tag{10}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad \gamma_i(\varphi) \equiv u \cdot y_{ii} \equiv 0 \pmod 2; \tag{11}$$

таким образом, на основании теоремы 2, заключаем, что сфероид (g, S^{n+1}) гомотопен нулю в K_n^{n+1}. Поэтому отображение g сферы S^{n+1} можно распространить на элемент P_1^{n+2}, также имеющий своей границей сферу S^{n+1}, причем $g(P_1^{n+2}) \subset K_n^{n+1}$. Так мы получаем отображение g сферы $S^{n+2} = P^{n+2} - P_1^{n+2}$, удовлетворяющее условию

$$\hat{g}(S^{n+2}) = u. \tag{12}$$

Таким образом, теорема 5 полностью доказана.

Для того чтобы формулировать теорему для модульных циклов, аналогичную теореме 5, нужно построить комплекс, играющий в этом случае роль сферы.

A) К комплексу Q, построенному для числа $m \geqslant 2$ [см. § 2, A)], приклеим по сфере S^{n+1} элемент P_1^{n+2} его границей. Полученный так комплекс обозначим через Q_m и положим $q_m^{n+2} = q^{n+2} - P_1^{n+2}$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть u — целочисленная цепь размерности $n+2$ комплекса K_n, удовлетворяющая условию*

$$\Delta u = mv \quad (m \geqslant 2). \tag{13}$$

Для того чтобы существовало симплициальное отображение g комплекса Q_m [см. A)] *в комплекс K_n, удовлетворяющее условию*

$$\hat{g}(q_m^{n+2}) \sim u \ (\operatorname{mod} m), \tag{14}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{при } n = 2: \qquad u \cdot y_{ij} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} (d_{ij}, m)), \tag{15}$$

$$\text{при } n \geqslant 3: \qquad u \cdot y_{ii} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} (2, m)) \tag{16}$$

[см. § 4, D)].

Доказательство этого предложения проводится аналогично доказательству теоремы 5 при помощи построений, имеющихся в теоремах 4 ($n=2$) и 4 ($n \geqslant 3$). Подробного его изложения я не привожу.

Если целочисленный цикл u размерности $n+2$ в комплексе K_n не является сферическим, то возникает вопрос, нельзя ли подобрать для него более или менее стандартный полиэдр, могущий играть ту же роль, какую сфера S^{n+2} играет для сферического цикла. Оказывается, что это сделать возможно.

B) Будем исходить из трех заданных неотрицательных целых чисел a, b, c. При $h = 1, \ldots, a$ пусть M_h^4 — комплексная проективная плоскость, взятая с ее естественной ориентацией, $\sum_h^2$ — комплексная проективная прямая, взятая в M_h^4, и N_h^4 — ориентированное многообразие с ориентированным краем S_h^3, получаемое из M_h^4 путем вырезывания малой шаровидной дыры, край S_h^3 которой не пересекается с $\sum_h^2$. Легко видеть, что существует непрерывное отображение ξ_h многообразия N_h^4 на сферу $\sum_h^2$, тождественное на сфере $\sum_h^2$; при этом сфероид (ξ_h, S_h^3) в сфере $\sum_h^2$ имеет инвариант γ, равный $+1$. Далее, при $h = a+1, \ldots, a+b$ пусть M_h^4 — комплексная проективная плоскость, взятая с ориентацией, противоположной естественной, $\sum_h^2$ — проективная прямая из M_h^4, и N_h^4 — ориентированное многообразие с ориентированным краем S_h^3, получаемое из M_h^4 путем вырезывания малой шаровидной дыры, край S_h^3 которой не пересекается с $\sum_h^2$. Легко видеть, что существует непрерывное отображение ξ_h многообразия N_h^4 на сферу $\sum_h^2$, тождественное на $\sum_h^2$; при этом сфероид (ξ_h, S_h^3) в сфере $\sum_h^2$ имеет инвариант γ, равный -1. Наконец, при $h = a+b+1, \ldots, \ldots, a+b+c$ пусть M_h — ориентированное произведение двух ориентированных двумерных сфер; множители, реализованные в произведении, обозначим через $'\sum_h^2$ и $''\sum_h^2$, а ориентированное многообразие с ориентированным краем S_h^3, получаемое из M_h^4 путем вырезывания

малой шаровидной дыры с краем S_h^3, не пересекающимся с $'\sum_h^2 + ''\sum_h^2$, обозначим через N_h^4. Легко видеть, что существует непрерывное отображение ξ_h многообразия N_h^4 в букет $'\sum_h^2 + ''\sum_h^2$, тождественное на самом букете; при этом сфероид (ξ_h, S_h^3) в букете $'\sum_h^2 + ''\sum_h^2$ имеет инварианты, определяемые соотношениями $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$, $\gamma_{12} = \gamma_{21} = 1$. Пусть E^4 — ориентированный шар с ориентированной границей $'S_0^3$ и F^4 — ориентированное многообразие с ориентированным краем $'S_0^3 - ('S_1^3 + \ldots + 'S_{a+b+c}^3)$, полученное из E^4 путем вырезывания $a+b+c$ шаровидных дыр, края $'S_1^3, \ldots, 'S_{a+b+c}^3$ которых не пересекаются друг с другом и с $'S_0^3$. Отобразим ориентированную сферу $S_h^3 \subset N_h^4$ на ориентированную сферу $'S_h^3 \subset F^4$ гомеоморфно с сохранением ориентации и отождествим между собой эти две сферы, считая соответствующие точки совпадающими. Полученное так из многообразий $F^4, N_1^4, \ldots, N_{a+b+c}^4$ ориентированное многообразие с краем $'S_0^3$ обозначим через $\overline{L}^4 = \overline{L}_{a,b,c}^4$. Пусть P^4 — ориентированный шар с ориентированной границей S_0^3. Отобразим сферу $S_0^3 \subset P^4$ на сферу $'S_0^3 \subset \overline{L}^4$ гомеоморфно с сохранением ориентации и отождествим обе сферы; полученное в результате такого склеивания замкнутое ориентированное многообразие $P^4 - \overline{L}^4$ обозначим через $L^4 = L_{a,b,c}^4$.

C) При $n \geqslant 3$ пусть F^{n+2} — пространство, заключенное между двумя концентрическими сферами $'S_0^{n+1}$ и $'S_1^{n+1}$, взятое в ориентированном эвклидовом пространстве, так что край ориентированного многообразия F^{n+2} есть $'S_0^{n+1} - 'S_1^{n+1}$. Пусть, далее, η — отображение сферы $'S_1^{n+1}$ на сферу $\sum^n$ с инвариантом γ, равным единице. Отождествив каждую точку $x \in 'S_1^{n+1}$ с точкой $\eta(x) \in \sum^n$, мы получим из F^{n+2} и $\sum^n$ ориентированное псевдомногообразие $\overline{L}^{n+2}$ с краем $'S_0^{n+1}$. Пусть P^{n+2} — ориентированный шар с ориентированной границей S_0^{n+1}. Отобразим сферу $S_0^{n+1} \subset P^{n+2}$ на сферу $'S_0^{n+1} \subset \overline{L}^{n+2}$ гомеоморфно с сохранением ориентации; полученное в результате склеивания этих сфер замкнутое ориентированное псевдомногообразие $P^{n+2} - \overline{L}^{n+2}$ обозначим через L^{n+2}.

ЛЕММА 3. *Пусть $(\varphi, 'S_0^{n+1})$ — произвольный сфероид букета H_q^n, не гомотопный в нем нулю. Тогда существует такое псевдомногообразие $\overline{L}^{n+2}$ с краем $'S_0^{n+1}$* [см. B) и C)], *что отображение φ можно распространить на все псевдомногообразие $\overline{L}^{n+2}$.*

Заметим, что в случае сфероида $(\varphi, 'S_0^{n+1})$, гомотопного нулю в H_q^n, отображение φ можно распространить на шар с границей $'S_0^{n+1}$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $n = 2$. Обозначим через a сумму всех положительных $\gamma_{ii}(\varphi)$, через b — модуль суммы всех отрицательных $\gamma_{ii}(\varphi)$ и через c — сумму модулей всех $\gamma_{ij}(\varphi)$ с $i < j$. Каждому числу $h = 1, \ldots, a+b+c$ можно поставить теперь в соответствие элемент α_h группы $\pi^3(H_q^2)$, удовлетворяющий следующим условиям. При $h = 1, \ldots, a$ существует такое число $i(h)$, что все инварианты $\gamma_{ij}(\alpha_h)$ равны нулю, за исключением лишь $\gamma_{i(h), i(h)}(\alpha_h)$, который равен $+1$. При $h = a+1, \ldots, a+b$ существует такое число $i(h)$, что все инварианты $\gamma_{ij}(\alpha_h)$ равны нулю, за исключением лишь $\gamma_{i(h), i(h)}(\alpha_h)$, который равен -1. При $h = a+b+1, \ldots, a+b+c$ существуют такие числа $i(h), j(h)$, $i(h) < j(h)$, что все инварианты $\gamma_{ij}(\alpha_h)$ равны нулю, за исключением лишь $\gamma_{i(h), j(h)}(\alpha_h) = \gamma_{j(h), i(h)}(\alpha_h)$,

который равен ± 1. Далее,

$$\alpha = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{a+b+c} \tag{17}$$

есть тип исходного сфероида $(\varphi, 'S_0^3)$.

При $h = 1, \ldots, a+b$ пусть ζ_h — гомеоморфное отображение сферы $\sum_h^2 \subset N_h^4$ на сферу $S_{i(h)}^2 \subset H_q^2$; очевидно, сфероид $(\zeta_h \xi_h, S_h^3)$ имеет тип α_h. При $h = a+b+1, \ldots, a+b+c$ пусть ζ_h — гомеоморфное отображение букета $'\sum_h^2 + ''\sum_h^2$ на букет $S_{i(h)}^2 + S_{j(h)}^2 \subset H_q^2$. Здесь мы будем различать два случая:

a) если $\gamma_{i(h), j(h)}(\alpha_h) = +1$, то сферы $'\sum_h^2$ и $''\sum_h^2$ обе отображаются на сферы $S_{i(h)}^2$ и $S_{j(h)}^2$ с сохранением ориентации;

b) если $\gamma_{i(h), j(h)}(\alpha_h) = -1$, то одна из сфер $'\sum_h^2$, $''\sum_h^2$ отображается с сохранением ориентации, другая же — с изменением. Очевидно, что сфероид $(\zeta_h \xi_h, S_h^3)$ имеет тип α_h.

Рассматривая многообразия $N_1^4, \ldots, N_{a+b+c}^4$ как части многообразия $\overline{L}^4 = \overline{L}_{a,b,c}^4$, обозначим отображения $\zeta_1 \xi_1, \ldots, \zeta_{a+b+c} \xi_{a+b+c}$ этих многообразий в H_q^2 одной буквой φ. Таким образом, отображение φ определено у нас на всем крае $'S_0^3 - ('S_1^3 + \cdots + 'S_{a+b+c}^3)$ псевдомногообразия F^4. Из (17) легко следует, что его можно распространить в отображение φ всего многообразия F^4. Таким образом, мы построили отображение φ многообразия $\overline{L}^4$, являющееся продолжением отображения φ, заданного на сфере $'S_0^3$.

Рассмотрим теперь случай $n \geqslant 3$. Обозначим через α тип сфероида $(\varphi, 'S_0^{n+1})$. В силу предложения G) § 1, существует тогда такое отображение ζ сферы $\sum^n$ в букет H_q^n, что сфероид $(\zeta\eta, 'S_1^{n+1})$ тоже имеет тип α. Сферы $'S_0^{n+1}$ и $'S_1^{n+1}$ образуют край многообразия F^{n+2} [см. С)]; так как сфероиды $(\varphi, 'S_0^{n+1})$ и $(\zeta\eta, 'S_1^{n+1})$ имеют один и тот же тип, то отображение φ, заданное на $'S_0^{n+1}$, можно распространить в отображение φ всего многообразия F^{n+2} так, чтобы на $'S_1^{n+1}$ оно совпало с $\zeta\eta$. Ввиду того, что отображение φ на $'S_1^{n+1}$ совпадает с отображением $\zeta\eta$, его можно рассматривать как отображение полиэдра $\overline{L}^{n+2}$.

Итак, лемма 3 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть u — произвольный целочисленный цикл размерности $n+2$ из K_n. Существуют такое псевдомногообразие L^{n+2}* [см. В) и С)] *и такое симплициальное отображение g некоторой его триангуляции в K_n, что*

$$\hat{g}(L^{n+2}) = u. \tag{18}$$

Доказательство. В силу леммы 2, существует такое симплициальное отображение g некоторой триангуляции элемента P^{n+2} в K_n, что

$$\hat{g}(P^{n+2}) = u, \tag{19}$$

причем на границе S_0^{n+1} элемента P^{n+2} отображение g имеет вид $f\varphi$. В силу леммы 3, отображение φ сферы $'S_0^{n+1} = S_0^{n+1}$ в букет H_q^n может быть продолжено в отображение φ псевдомногообразия $\overline{L}^{n+2}$. Будем считать P^{n+2} и $\overline{L}^{n+2}$ кусками одного замкнутого псевдомногообразия L^{n+2} [см. В) и С)]; тогда отображения g и $f\varphi$ кусков

P^{n+2} и $\bar{L}^{n+2}$ соответственно можно рассматривать как отображение g всего псевдомногообразия L^{n+2}, причем равенство (18) выполнено.

D) К псевдомногообразию $\bar{L}^{n+2}$ [см. B) и C)] приклеим краем S^{n+1} полиэдр Q [см. § 5, A)] и полученный так полиэдр обозначим через L_m^{n+2}.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть u — такая целочисленная цепь размерности $n+2$ из K_n, что*

$$\Delta u = mv \quad (m \geqslant 2). \tag{20}$$

Существуют такой полиэдр L_m^{n+2} [см. D)] *и такое симплициальное отображение некоторой его триангуляции в комплекс K_n, что*

$$\hat{g}(L_m^{n+2}) = \dot{u}. \tag{21}$$

Доказательство проводится совершенно так же, как доказательство теоремы 7.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть $(g, 'S_0^{n+1})$ — произвольный сфероид в K_n такой, что $\hat{g}('S_0^{n+1}) \sim 0$. Существует такое псевдомногообразие $\bar{L}^{n+2}$* [см. B) и C)] *с краем $'S_0^{n+1}$, что отображение g можно продолжить в отображение всего $\bar{L}^{n+2}$.*

Доказательство. Так как в силу предложения C) § 4, сфероид $(g, 'S_0^{n+1})$ гомотопен сфероиду $(f\varphi, 'S_0^{n+1})$, то теорема легко следует из леммы 3.

Поступило
10. III. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александер Дж., Кольцо связности абстрактного пространства, Успехи мат. наук, том II, вып. 1 (17) (1947), 156—165.

[2] Steenrod N. E., Products of cocycles and extensions of mappings, Ann. of Math., 48 (1947), 290—320.

[3] Зейферт Г. и Трельфалль В., Топология, 1938, § 77.

[4] Reidemeister K., Homotopieringe und Linsenräume, Hamb. Abhandl. 11 (1935), 102—109.

[5] Whitehead J. H. C., On incidence matrices, nuclei and homotopy types, Ann. of Math. (2) 42 (1941), 1197—1239.

[6] Александров П. С., Комбинаторная топология, 1947, гл. XVI, § 6.

[7] Понтрягин Л., Классификация непрерывных отображений комплекса на сферу. I, Доклады Ак. Наук СССР, XIX, № 3 (1938), 147—149.

[8] Понтрягин Л. С., Гомотопическая классификация отображений $(n+1)$-мерной сферы в n-мерную, Доклады Ак. Наук СССР, LXX № 6, 1950.

[9] Понтрягин Л., Классификация отображений трехмерного комплекса в двумерную сферу, Мат. сборник, 9, № 2 (1941), 331—363.

[10] Рохлин В., Гомотопические группы, Успехи мат. наук, том I, вып. 5—6 (15—16) (1946), 175—223.

[11] Понтрягин Л. С., Отображение трехмерной сферы в n-мерный комплекс, Доклады Ак. Наук СССР, XXXIV, № 2 (1942), 39—41.

[12] Hopf H., Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche, Math. Ann., 104, Nr. 5 (1931), 637—665.

[13] Whitehead J. H. C., On adding relations to homotopy groups, Ann. of Math., 42 (1941), 409—428.

[14] Понтрягин Л. С., Об одной связи между гомологиями и гомотопиями, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 13 (1949), 193—200.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 45—84

Б. Я. ЛЕВИН

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ И О СВЯЗАННЫХ С НИМ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ *

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В статье устанавливаются общие положения теории целых функций конечной степени, позволяющие получать различные точные оценки, аналогичные тем, которые были впервые открыты С. Н. Бернштейном и которые играют важную роль в теории аппроксимации. В основе исследования лежит данное автором обобщение принципа Фрагмена-Линделёфа и теорема, аналогичная теореме Эрмита-Билера, относящаяся к целым функциям конечной степени.

Введение

Целой функцией конечной степени мы, следуя С. Н. Бернштейну будем называть целую функцию $f(z)$, для которой

$$\sigma = \overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty.$$

Число $\sigma \geqslant 0$ называется степенью функции $f(z)$.

Функция

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r} \qquad (0.1)$$

называется индикатором роста функции $f(z)$ и является, как известно (1) (2), опорной функцией некоторой ограниченной выпуклой области, называемой индикаторной диаграммой функции $f(z)$.

Одно из самых замечательных свойств целых функций конечной степени было открыто С. Н. Бернштейном:

Если $f(z)$ — целая функция степени $\sigma \geqslant 0$ и $|f(x)| \leqslant L$ при $-\infty < x < \infty$, то $|f'(x)| \leqslant L\sigma$ $(-\infty < x < \infty)$. При этом знак равенства во втором соотношении возможен лишь, если

$$f(x) = c_1 \cos\sigma x + c_2 \sin\sigma x.$$

Эта теорема, являющаяся основной в теории аппроксимации непрерывных функций на всей числовой оси целыми функциями конечной степени, обобщалась многими авторами в различных направлениях.

* Основные результаты этой статьи были изложены без доказательств в заметке автора (14).

Среди этих обобщений весьма существенным является следующее обобщение С. Н. Бернштейна:

Если $\omega(x) = e^{i\sigma x}\varphi(x)$, *где* $\sigma \geqslant 0$ *и* $\varphi(z)$ — *целая функция нулевого рода, не имеющая корней в нижней полуплоскости, и* $f(x)$ — *целая функция степени, не превышающей* σ, *то из неравенства*

$$|f(x)| \leqslant L\,|\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty)$$

следует

$$|f'(x)| \leqslant L\,|\omega'(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Н. И. Ахиезер сделал следующий шаг, показав, что в формулировке этой теоремы можно функцию $\omega(z) = e^{i\sigma z}\varphi(z)$ заменить функцией более общего класса ([5]).

Стремление максимально расширить класс функций $\omega(z)$ приводит нас к особому классу целых функций.

Определение. Целую функцию конечной степени $f(z)$ мы назовем функцией класса P, если:

a) $f(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости,

b) $h_f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geqslant h_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Множество функций класса P степени σ мы будем обозначать через P_σ. В настоящей статье устанавливается, в частности, следующий факт:

Пусть $\omega(z)$ — *функция конечной степени. Для того чтобы из неравенства* $|f(x)| \leqslant |\omega(x)|$ $(-\infty < x < \infty)$, *в котором* $f(z)$ — *произвольная целая функция степени* $\tau \leqslant \sigma$, *следовало неравенство* $|f'(x)| \leqslant |\omega'(x)|$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega(z)$ *была функцией класса* P *и степени, не меньшей* σ.

Более того, мы доказываем общее положение (теорема 4), позволяющее получать неравенства, аналогичные неравенствам С. Н. Бернштейна, причем оператор дифференцирования заменяется значительно более общим оператором.

Для доказательства этой теоремы и ряда других фактов нам пришлось несколько обобщить известный принцип Фрагмена-Линделёфа. Это обобщение формулировано в лемме 2.

Класс P был введен нами ранее ([6]) в связи с другим вопросом.

Известна следующая теорема Эрмита — Билера:

Для того чтобы полином

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z),$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ — вещественные полиномы, не имел корней в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы

α) $P(z)$ и $Q(z)$ представлялись в форме

$$P(z) = R(z)\,P_1(z), \quad Q(z) = R(z)\,Q_1(z),$$

где $R(z)$, $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — полиномы, имеющие лишь вещественные корни, причем корни $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — простые и взаимно разделяются,

т. е. между двумя последовательными корнями одного из этих полиномов находится точно один корень другого.

β) В некоторой точке $x = x_0$

$$Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0.$$

В связи с некоторыми вопросами теории регулирования Н. Г. Чеботарев обобщил эту теорему, рассматривая вместо полиномов некоторые специальные функции конечной степени ([7]).

Несколько более общий класс функций конечной степени был рассмотрен Л. С. Понтрягиным ([8]).

Мною ([6]) и независимо от меня М. Г. Крейном в 1943 г. было показано, что самым общим классом функций конечной степени, на который распространяется критерий Эрмита — Билера, является класс P.

В работе М. Г. Крейна, которая так и осталась неопубликованной, формулировка основной теоремы является более законченной, чем в моей заметке ([6]), поэтому я, пользуясь разрешением автора, публикую здесь эту теорему в формулировке М. Г. Крейна (см. теорему 1).

Замечу, что в тоже время была опубликована заметка Н. Н. Меймана ([9]), в которой теорема Эрмита — Билера обобщается на произвольные целые функции $\omega(z)$, удовлетворяющие условиям:

1) $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости;

2) $\left|\frac{\omega(\bar{z})}{\omega(z)}\right| \leqslant 1$ в верхней полуплоскости.

Эти функции Н. Н. Мейман назвал функциями класса HB. *

Комбинируя обобщенную теорему Эрмита — Билера с некоторыми следствиями из леммы 2, мы получаем ряд экстремальных свойств целых функций конечной степени, являющихся обобщением некоторых теорем С. Н. Бернштейна из его книги «Экстремальные свойства полиномов».

Пользуясь этим же методом, мы устанавливаем некоторые новые неравенства для целых функций конечной степени, которые содержат как частный случай неравенства, доказанные недавно С. Б. Стечкиным ([11]), С. М. Никольским ([12]) и С. Н. Бернштейном ([13]).

В конце статьи дано дополнение, в котором мы находим необходимые и достаточные условия того, чтобы целая функция конечной степени имела мажоранту класса P.

§ 1. В этом параграфе мы докажем две леммы общего характера, на которые будем опираться в дальнейшем изложении, и установим некоторые общие свойства функций класса P (см. введение).

ЛЕММА 1. *Если* $\psi(z)$ — *функция, голоморфная и экспоненциального типа в верхней полуплоскости* (*т. е.* $\overline{\lim}\frac{\ln|\psi(z)|}{|z|} < \infty$ *при* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *и* $|z| \to \infty$), *и* $|\psi(x)| \leqslant 1$ **, *то существует*

---

* Н. Н. Мейман провел также ряд других исследований, связанных с теоремой Эрмита — Билера ([10]).

** Это условие можно заменить более слабым:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|\psi(x)|}{1+x^2}\, dx < \infty.$$

$$d = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \tag{1.00}$$

и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^\infty \operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}, \tag{1.10}$$

где α_k — *все корни функции* $\psi(z)$ *в верхней полуплоскости.*

Доказательство основывается на известной формуле Карлемана ([14])

$$\frac{1}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta = \sum\left(\frac{1}{r_k}-\frac{r_k}{r^2}\right)\sin\theta_k +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^r\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{x^2}\right)\ln|\psi(x)\cdot\psi(-x)|dx + C_\psi(r), \tag{1.11}$$

где $\alpha_k = r_k e^{i\theta_k}$ — корни функции $\psi(z)$, а $C_\psi(r)$ — ограниченная величина, стремящаяся к определенному пределу при $r\to\infty$.

Первые два члена в правой части равенства (1.11) монотонно растут с ростом r. С другой стороны, как это видно из неравенства

$$\ln|\psi(z)| < (k+\varepsilon)|z| \quad \text{при } \varepsilon > 0, \ \operatorname{Im} z \geqslant 0 \text{ и } |z| \geqslant r_\varepsilon,$$

в левой части равенства (1.11) стоит ограниченная величина. Отсюда легко следуют оба утверждения леммы.

ЛЕММА 2. *Пусть* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ — *целые функции конечной степени, причем* $\omega(z)$ *не имеет корней в верхней полуплоскости и*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{1.12}$$

Тогда функция $\psi(z) = \frac{f(z)}{\omega(z)}$ *экспоненциального типа в верхней полуплоскости, причем*

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{1.20}$$

и

$$|\psi(z)| \leqslant e^{ky} \quad (y = \operatorname{Im} z \geqslant 0). \tag{1.21}$$

Здесь $k = h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *а* $h_f(\theta)$ — *индикатор роста функции* $f(z)$ (см. введение).

Доказательство. По известному критерию Линделёфа принадлежности функции целого порядка $\omega(z)$ к нормальному типу,

$$\left|\sum_{|\alpha_k|<r}\frac{1}{\alpha_k}\right| \leqslant M < \infty, \tag{1.30}$$

где M не зависит от r и α_k — корни функции $\omega(z)$.

Принимая во вниманне условие $\operatorname{Im}\alpha_k \leqslant 0$, мы получаем отсюда, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}$ сходится.

Заметим, далее, что из представления

$$\omega(z) = cz^m e^{pz}\prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}}$$

следует, что при $y > 0$

$$|\omega(iy)| \geqslant |c|\,|y|^m \exp\left(-\operatorname{Im} p - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right) y$$

или при $y > 1$

$$\omega(iy) > |c| \exp k_1 y, \tag{1.40}$$

где c — константа и

$$k_1 = -\left(\operatorname{Im} p + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Отсюда получим, что

$$h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varlimsup_{y\to\infty} \frac{\ln|\psi(iy)|}{y} \leqslant \tau - k_1, \tag{1.41}$$

где τ — степень функции $f(z)$. Далее, из (1.41) и (1.12) убеждаемся, что функция

$$\varphi(z) = \psi(z) \exp[i(k+\varepsilon)z] \tag{1.42}$$

при $k = h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $\varepsilon > 0$ ограничена при $z = x$ $(-\infty < x < \infty)$ и $z = iy$ $(y > 0)$.

Кроме того, по классической теореме Адамара, существует последовательность окружностей $|z| = r_j$ $(r_j \to \infty)$, на которых выполняется неравенство

$$|\omega(z)| > \exp(-|z|^{1+\varepsilon}). \tag{1.43}$$

Так как $|f(z)| < c\exp[(\tau+\varepsilon)|z|]$, то при $j > j_\varepsilon$ и $|z| = r_j$

$$|\varphi(z)| < \exp(|z|^{1+\varepsilon}). \tag{1.44}$$

По принципу Фрагмена — Линделёфа, из ограниченности функции $\varphi(z)$ при $z = x$ $(-\infty < x < \infty)$ и $z = iy$ $(y > 0)$ и из (1.44) следует, что функция $\varphi(z)$ ограничена при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Так как из (1.12) имеем $|\varphi(x)| \leqslant 1$ при $-\infty < x < \infty$, то, в силу того же принципа, получается $|\varphi(z)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$. Таким образом,

$$|\psi(z)| \leqslant e^{(k+\varepsilon)y} \quad (y = \operatorname{Im} z \geqslant 0)$$

при любом $\varepsilon > 0$, а следовательно,

$$|\psi(z)| \leqslant e^{ky} \quad \left(y = \operatorname{Im} z \geqslant 0, \quad k = h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Второе утверждение леммы доказано.

Для доказательства первого утверждения воспользуемся неравенством Неванлинны ([14]) $(y < r)$:

$$\frac{\ln|\psi(iy)|}{y} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-r}^{r} \ln|\psi(x)|\left\{\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{r^2}{r^4+x^2y^2}\right\}dx +$$

$$+\frac{2r}{\pi}\int_0^{\pi} \ln|\psi(re^{i\theta})|\frac{(r^2-y^2)\sin\theta\, d\theta}{|r^2e^{2i\theta}+y^2|^2} \tag{1.50}$$

или

$$\frac{\ln|\psi(iy)|}{y} \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta + \int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})| O\left(\frac{1}{r^3}\right) d\theta. \quad (1.51)$$

Первое слагаемое, по лемме 1, имеет предел $2d$ при $r \to \infty$. С другой стороны, из (1.43) следует, что при $j > j_\varepsilon$

$$\ln|\psi(r_j e^{i\theta})| < r_j^{1+\varepsilon}.$$

Положив в (1.51) $r = r_j$ и перейдя к пределу при $j \to \infty$, получим при $y > 0$

$$2d \geqslant \frac{\ln|\psi(iy)|}{y}$$

или

$$2d \geqslant \overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{\ln|\psi(iy)|}{y} = k. \quad (1.52)$$

С другой стороны, из (1.21) следует

$$\frac{\ln|\psi(re^{i\theta})|}{r} \leqslant k\sin\theta \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \quad (1.53)$$

или

$$\frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \leqslant k.$$

Сопоставляя этот результат с (1.52), получаем

$$2d = \lim_{r\to\infty} \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi \ln|\psi(re^{i\theta})|\sin\theta\, d\theta = k. \quad (1.60)$$

Из (1.53) и (1.60) легко следует, что если $r_n \to \infty$, то для всех значений $0 < \theta < 1$, за исключением, быть может, множества меры нуль, существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\psi(r_n e^{i\theta})|}{r_n} = k\sin\theta. \ *$$

По теореме В. Бернштейна, для целой функции степени σ при всех значениях θ имеет место равенство **

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\chi(n\delta e^{i\theta})|}{n\delta} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\chi(re^{i\theta})|}{r} = h_\chi(\theta),$$

если $\frac{\pi}{\delta} > \sigma$.

---

* Можно доказать более сильное утверждение, а именно, что при $r > r_\varepsilon$ и $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

$$\left|\frac{\ln|\psi(re^{i\theta})|}{r} - k\sin\theta\right| < \varepsilon,$$

если только r не принадлежит некоторому множеству нулевой плотности.

** см. ([14]), стр. 100.

Выберем число δ так, чтобы иметь $\frac{\pi}{\delta} > \max(\sigma, r)$, где σ — степень функции $\omega(x)$, а τ — степень функции $f(x)$, и положим $r_n = n\delta$. Тогда почти для всех значений $\theta\ (0 < \theta < \pi)$ будем иметь

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|f(r_n e^{i\theta})|}{r_n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|\omega(r_n e^{i\theta})|}{r_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\ln|\psi(r_n e^{i\theta})|}{r_n}$$

и, в силу теоремы В. Бернштейна,

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k\sin\theta \quad \left(k = h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right). \tag{1.70}$$

Так как все входящие в это равенство функции непрерывны, то (1.70) выполняется во всем сегменте $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Лемма доказана.

Следствие 1. *Индикаторная диаграмма целой функции $\omega(z)$ конечной степени, не имеющей корней в нижней полуплоскости, симметрична относительно некоторой прямой, параллельной оси абсцисс.*

Для доказательства достаточно положить в лемме 2 $f(z) = \omega(z)$ и $\omega(z)$ заменить функцией $\overline{\omega}(z)$; так как $h_{\overline{\omega}}(\theta) = h_\omega(-\theta)$, то (1.20) запишется в виде

$$h_\omega(\theta) = h_\omega(-\theta) = k\sin\theta.$$

Таким образом, верхняя часть диаграммы $(0 < \theta < \pi)$ получается из нижней $(-\pi < \theta < 0)$ преобразованием симметрии относительно вещественной оси и сдвигом в направлении оси Oy на отрезок k.

Осью симметрии индикаторной диаграммы функции служит прямая $y = \frac{k}{2}$.

Определение. Число $-\frac{k}{2} = h\left(-\frac{\pi}{2}\right) - h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ мы будем называть *дефектом* целой функции конечной степени $\omega(z)$ и обозначать через d_ω.

Из формулы (1.60) следует, что если $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, то

$$d_\omega = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln\left|\frac{\omega(re^{i\theta})}{\overline{\omega}(re^{i\theta})}\right| \sin\theta d\theta. \tag{1.71}$$

Отсюда получаем

Следствие 2. *При перемножении целых функций конечной степени, не имеющих корней в нижней полуплоскости, их дефекты складываются.*

Класс P может быть, очевидно, определен как класс целых функций конечной степени с неотрицательным дефектом, не имеющих корней в нижней полуплоскости.

Из следствия 2 получаем, что *произведение функций класса P есть функция класса P.*

При $\psi(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}$ в неравенстве (1.21) $k = -2d_\omega$ и легко получается

Следствие 3. *Для того чтобы функция конечной степени $\omega(z)$, не имеющая общих невещественных корней с функцией $\overline{\omega}(z)$, принадле-*

жала к классу P, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{\overline{\omega(z)}}{\omega(z)}\right| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{1.72}$$

Таким образом, класс P состоит из всех функций конечной степени, принадлежащих классу HB (см. введение).

Следствие 4. *Если последовательность $\omega_n(z)$ функций класса P сходится равномерно в каждой ограниченной области к функции конечной степени $\omega(z)$, то $\omega(z)$ есть также функция класса P.*

Очевидно, $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости. Кроме того, из неравенств $\left|\frac{\overline{\omega_n(z)}}{\omega_n(z)}\right| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ следует $\left|\frac{\overline{\omega(z)}}{\omega(z)}\right| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

Следствие 5. *Всякая функция $\omega(z)$ класса P представляется в форме*

$$\omega(z) = c \cdot z^m e^{az} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{z \cdot \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)}, \tag{1.73}$$

причем $\nu = \operatorname{Im} a = d_\omega \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \alpha_k \geqslant 0$. *

Доказательство. При доказательстве леммы 2 мы, исходя из известной теоремы Линделёфа, получили, что если целая функция $\omega(z)$ конечной степени не имеет корней в нижней полуплоскости, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)$ сходится. Заметив это, мы, воспользовавшись общим разложением Вейерштрасса для функции $\omega(z)$ не выше чем первого рода, легко получим разложение вида (1.73). Покажем, что $\nu = \operatorname{Im} a \geqslant 0$.

В самом деле, если $\omega(z) \in P$, то $\left|\frac{\overline{\omega(z)}}{\omega(z)}\right| < 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Умножив функцию $\psi(z) = \frac{\overline{\omega(z)}}{\omega(z)}$ на конечное произведение

$$\chi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \frac{z}{\overline{\alpha}_k}}\right)$$

и применяя принцип Фрагмена — Линделёфа, получим

$$|\psi(z)\chi_n(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0. \tag{1.73'}$$

Из сходимости ряда $\sum_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right)$ следует сходимость бесконечного произведения $\chi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \frac{z}{\overline{\alpha}_k}}\right)$ и, переходя к пределу в (1.73') при $n \to \infty$,

* М. Г. Крейн [(6), стр. 239] дал аналогичное представление для произвольной целой функции класса B.

получаем

$$|\psi(z)\chi(z)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

или, что то же, $|e^{2i\nu z}| \leqslant 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Отсюда следует, что $\nu \geqslant 0$. Так как функция $\varphi(z) = \omega(z) e^{-id_\omega z} \in P$, то. по доказанному, $\nu - d_\omega \geqslant 0$. С другой стороны, функция $\varphi(z) = \omega(z) e^{-i\nu z} \in P$, так как

$$\frac{\varphi(z)}{\overline{\varphi}(z)} = \chi(z)$$

и, очевидно, $|\chi(z)| \leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Следовательно, $d_\omega \geqslant \nu$. Итак, $\nu = d_\omega$.

Замечание 1. *Если функция* $\omega(z)$ *имеет представление* (1.73) *при* $\operatorname{Im} a \geqslant 0$, *то существует такая последовательность полиномов* $\omega_n(z)$, *не имеющих корней в нижней полуплоскости, что* $\omega_n(z) \rightrightarrows \omega(z)$ *в любой ограниченной области.*

В самом деле, при заданной области G и заданном $\varepsilon > 0$ можно выбрать число p так, что

$$\left| \omega(z) - cz^m e^{\varkappa_p z} \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad z \in G, \tag{1.74}$$

где

$$\varkappa_p = a + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha_k}\right).$$

Очевидно, что при достаточно большом значении натурального числа q полином

$$\omega_{q,p}(z) = cz^m \left(1 + \frac{\varkappa_p z}{q}\right)^q \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right)$$

удовлетворяет неравенству

$$|\omega(z) - \omega_{p,q}(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in G. \tag{1.75}$$

Этот полином не имеет корней в нижней полуплоскости, так как $\operatorname{Im} \varkappa_p = \nu \geqslant 0$.

§ 2. Покажем, как на функции класса P обобщается теорема Эрмита — Билера.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы целая функция конечной степени*

$$\omega(z) = P(z) + iQ(z), \tag{2.00}$$

где $P(z)$ *и* $Q(z)$ — *вещественные функции, была функцией класса* P, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

A) *Функции* $P(z)$ *и* $Q(z)$ *конечной степени и представляются в форме*

$$P(z) = R(z) \cdot P_1(z) \quad \text{и} \quad Q(z) = R(z) \cdot Q_1(z),$$

где $P_1(z)$, $Q_1(z)$ *и* $R(z)$ — *вещественные целые функции, имеющие лишь вещественные корни, причем корни функций* $P_1(z)$ *и* $Q_1(z)$ *простые и взаимно разделяются (т. е. между любыми двумя корнями одной функции находится корень другой).*

B) *Индикаторные диаграммы функций* $P(z)$ *и* $Q(z)$ *совпадают.*

C) *При некотором вещественном* $x = x_0$

$$Q'(x_0)P(x_0) - P'(x_0)Q(x_0) > 0. \ *$$

Доказательство необходимости: Из следствия 3 § 1 получаем, что функция $\psi(z) = \frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости z ($\operatorname{Im} z > 0$) на единичный круг ($|\psi| < 1$) плоскости ψ. Преобразуя с помощью функции $F = \frac{1}{i}\frac{\psi - 1}{\psi + 1}$ единичный круг плоскости ψ на верхнюю полуплоскость плоскости F, мы получим функцию

$$F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{2.10}$$

отображающую верхнюю полуплоскость плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости F.

Из вещественности этой функции следует также, что она нижнюю полуплоскость отображает на нижнюю.

Иначе, при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.11}$$

Отсюда следует, что все корни и полюсы функции $F(z)$ вещественные. Общие корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ являются также общими корнями функций $\omega(z)$ и $\overline{\omega}(z)$ и, следовательно, вещественные.

Из (2.11) также следует и то, что когда точка z обходит один раз произвольную окружность с центром на вещественной оси, то приращение функции $\arg F(x)$ не превосходит по абсолютной величине числа 2π. Таким образом, разность между числом полюсов и числом корней функции $F(z)$, попавших в такую окружность, не превосходит единицы.

Итак, все корни и полюсы функции $F(z)$ простые, между двумя соседними полюсами функции $F(z)$ находится точно один ее корень и между двумя соседними корнями один полюс. Иначе говоря, выполнено условие A).

Перенумеруем корни функции $P_1(z) - \{a_k\}_{-\infty}^{\infty}$ так, чтобы $a_{-1} \cdot a_0 < 0$ (не нарушая общности, можно считать, что нуль не является корнем функций $P_1(z)$ или $Q_1(z)$), и корни $Q_1(z) - \{b_k\}_{-\infty}^{\infty}$ так, чтобы $a_{k-1} < b_k < a_k$ ($\pm k = 0, 1, 2, \ldots$). Легко видеть, что произведение

$$\Phi(z) = \frac{b_0}{a_0}\prod_{-\infty}^{\infty}\frac{1 - \frac{z}{b_k}}{1 - \frac{z}{a_k}} \tag{2.12}$$

сходится и что

$$\arg\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty}[\arg(z - b_k) - \arg(z - a_k)],$$

---

* Здесь мы исключаем тот тривиальный случай, когда $\omega(z)$ с точностью до постоянного множителя — вещественная функция. Тогда возможно, что функция $Q(z) \equiv 0$ и. следовательно, не имеет индикаторной диаграммы. Кроме того, в этом случае

$$Q'(x)P(x) - Q(x)P'(x) \equiv 0.$$

откуда при $\operatorname{Im} z > 0$ $0 < \arg \Phi(z) < \pi$. Иначе, при $\operatorname{Im} z \neq 0$

$$\operatorname{Im} \Phi(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0. \tag{2.13}$$

С другой стороны, из представления целых функций

$$P_1(z) = c_1 e^{pz} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_k}\right) e^{\frac{z}{a_k}},$$
$$Q_1(z) = c_2 e^{qz} \prod_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{b_k}\right) e^{\frac{z}{b_k}}, * \tag{2.14}$$

где p, q, c_1, c_2 — вещественные числа, следует, что

$$F(z) = ce^{\delta z} \Phi(z), \tag{2.15}$$

причем c и $\delta = q - p + \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{b_k} - \frac{1}{a_k}\right)$ — вещественные числа. Сопоставляя (2.11), (2.13) и (2.15), мы получаем, что при $\operatorname{Im} z > 0$

$$-\pi < \arg ce^{\delta z} < 2\pi,$$

что возможно лишь при $\delta = 0$. Таким образом,

$$Q(z) = c\, \Phi(z) P(z). \tag{2.16}$$

В силу известных неравенств Каратеодори для функций, отображающих полуплоскость на полуплоскость, получаем неравенства

$$c_3 \frac{|\sin \theta|}{r} \leqslant |\Phi(re^{i\theta})| \leqslant c_4 \frac{r}{|\sin \theta|}, \tag{2.17}$$

в которых c_3 и c_4 — константы, зависящие лишь от $\Phi(z)$, и $\left|\theta \pm \frac{\pi}{2}\right| < \frac{\pi}{2}$.

Из (2.16) и (2.17) следует, что при $\theta \neq 0, \pi$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |Q(re^{i\theta})|}{r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln |P(re^{i\theta})|}{r},$$

а в силу непрерывности обоих индикаторов роста, равенство $h_Q(\theta) = h_P(\theta)$ выполняется при всех значениях θ, т. е. индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают.

Для доказательства условия С) достаточно заметить, что, в силу (2.11), отношение $F(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ монотонно возрастает. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности. Из условия А) и представления (2.14) следует (2.15), т. е.

$$Q(z) = ce^{\delta z} \Phi(z) P(z), \tag{2.20}$$

где c и δ — вещественные числа. Далее, из (2.20) и неравенства Каратеодори (2.17) вытекает, что индикаторная диаграмма функции $Q(z)$ получается из индикаторной диаграммы функции $P(z)$ параллельным

---

* Бесконечные произведения сходятся, так как точки взяты из множества корней функции конечной степени.

сдвигом на отрезок δ. Но, по условию B), индикаторные диаграммы функций $P(z)$ и $Q(z)$ совпадают и, следовательно, в (2.20) следует положить $\delta=0$. Сопоставляя (2.20) с (2.13), получаем

$$\operatorname{sign}\{\operatorname{Im} F(z)\cdot \operatorname{Im} z\} = \operatorname{sign} C \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Присоединяя условие C), которое можно записать в форме $F'(x_0)>0$, убеждаемся в том, что

$$\operatorname{Im} F(z)\cdot \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Итак, функция $F=F(z)$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости z на верхнюю полуплоскость плоскости F. Преобразуя с помощью функции $\psi=\frac{F-i}{F+i}$ верхнюю полуплоскость плоскости F на единичный круг плоскости ψ, мы получим, что

$$\left|\frac{\omega(z)}{\bar{\omega}(z)}\right| < 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0.$$

Кроме того, функции $\omega(z)$ и $\bar{\omega}(z)$ не имеют общих невещественных корней, так как в противном случае такие корни были бы у функций $P(z)$ и $Q(z)$, что противоречит условию A). По следствию 3 § 1, функция $\omega(z)$ принадлежит классу P. Теорема доказана.

Из совпадения индикаторов $h_P(\theta)=h_Q(\theta)$ непосредственно следует

З а м е ч а н и е. Если $\omega(z)=P(z)+iQ(z)$ есть функция класса P, то

$$h_\omega(\theta) \leqslant h_P(\theta) = h_Q(\theta).$$

Проанализируем связь между условиями A), B) и C) теоремы 1. При доказательстве достаточности условий мы установили, что если функции конечной степени $P(z)$ и $Q(z)$ удовлетворяют условию A), то индикаторная диаграмма функции $Q(z)$ получается из индикаторной диаграммы функции $P(z)$ параллельным сдвигом на вещественный отрезок δ. Рассмотрим теперь тот случай, когда условие B) не выполнено, т. е. $\delta \neq 0$. При этом, конечно, [см. (2.20)] функция

$$[e^{-\delta x} F(x)]' = c\Phi'(x)$$

сохраняет знак при $-\infty < x < \infty$, ибо $\Phi'(x) \geqslant 0$.

ТЕОРЕМА 2. *Если функции конечной степени $P(z)$ и $Q(z)$ удовлетворяют условию* A) *теоремы* 1 *и* $\delta = h_Q(0) - h_P(0) \neq 0$, *то:*

1) *дефект функции* $\omega(z)$ $d_\omega = 0$;

2) *если* $[e^{-\delta x} F(x)]' \geqslant 0$, *то в каждой из полос*

$$\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi < |\delta|\, y < \left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi \quad (n=1, 2, \ldots;\ y=\operatorname{Im} z) \tag{2.21}$$

и

$$\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi < |\delta|\, y < \left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi \quad (-n=1, 2, \ldots;\ y=\operatorname{Im} z) \tag{2.22}$$

находится точно один корень функции $\omega(z)$. *Все остальные ее корни находятся в полосе*

$$0 \leqslant y < \frac{\pi}{2|\delta|}. \tag{2.23}$$

При $[e^{-\delta x}F(x)]' \leqslant 0$ *утверждение остается верным, если все полосы* (2.21), (2.22) *и* (2.23) *заменить симметричными им относительно вещественной оси.*

Доказательство положения 1) основывается на равенстве (2.20), из которого следует, что

$$\omega(z) = P(z)\chi(z),$$

где $\chi(z) = 1 + ice^{\delta z}\Phi(z)$. Из неравенств (2.17) следует, что предел

$$h_\chi(\theta) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln|\chi(re^{i\theta})|}{r}$$

существует, если $\theta \neq m\frac{\pi}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, причем при $\delta > 0$ (для определенности) и $|\theta - \pi| < \frac{\pi}{2}$ верно $h_\chi(\theta) = 0$, а при $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ верно $h_\chi(\theta) = \delta\cos\theta$. Отсюда получаем

$$h_\omega(\theta) = h_P(\theta) + h_\chi(\theta).$$

Таким образом, индикаторная диаграмма функции $\omega(z)$ является наименьшей выпуклой областью, содержащей индикаторную диаграмму функции $P(z)$ и эту же диаграмму, сдвинутую на отрезок δ. Она, очевидно, симметрична относительно оси абсцисс и, следовательно, $d_\omega = 0$.

Для доказательства положения 2) оценим предварительно сумму

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{z-b_k} - \frac{1}{z-a_k}\right]. \tag{2.30}$$

Функция $u = \frac{1}{z-\zeta}$ отображает, при фиксированном z, вещественную ось плоскости ζ на окружность (c), построенную на отрезке $\left(0, \frac{1}{iy}\right)$ $(y = \operatorname{Im} z)$ как на диаметре. Точки $\frac{1}{z-b_k}$ и $\frac{1}{z-a_k}$ располагаются на этой окружности в том же порядке, в каком расположены точки b_k и a_k на вещественной оси.

Каждый вектор $\left[\frac{1}{z-b_k} - \frac{1}{z-a_k}\right]$ изображается хордой окружности (c), причем эти хорды не пересекаются, а их направления таковы, что соответствующее им направление обхода окружности сохраняется. Сумма проекций всех этих векторов на любое направление меньше диаметра окружности (c). Таким образом, имеем

$$\left|\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right| < \frac{1}{|y|} \quad \text{при } y = \operatorname{Im} z \tag{2.31}$$

и из (2.20) получаем, что при $|y| > \frac{1}{|\delta|}$

$$[\ln F(z)]' = \delta + \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} \neq 0. \tag{2.32}$$

Отсюда следует, что вдоль каждой кривой $\arg F(z) = \text{const}$, расположенной в одной из полуплоскостей $|y| > \frac{1}{|\delta|}$, функция $\ln|F(z)|$ меняется монотонно.

Из (2.20), как уже было отмечено, следует

$$F(z) = ce^{\delta z}\Phi(z), \tag{2.33}$$

где c — вещественная константа и, так как $\Phi'(x) \geqslant 0$, то

$$\operatorname{sign}[e^{-\delta x} \cdot F(x)]' = \operatorname{sign} c.$$

Положим, для определенности, $c > 0$ и $\delta > 0$. Корни функции $\omega(z)$ или, что то же, корни уравнения $F(z) - i = 0$, очевидно, должны лежать на кривых

$$\delta y + \arg \Phi(z) = 2\pi n + \frac{\pi}{2}. \tag{2.34}$$

Но при $y > 0$ имеем $0 < \arg \Phi(z) < \pi$, следовательно, кривые (2.34), находящиеся в верхней полуплоскости, расположены в полосах

$$\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi < \delta y < \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.35}$$

При $n \geqslant 1$ получается $y > \frac{3}{2}\frac{\pi}{\delta}$ и из (2.32) и (2.33) заключаем, что вдоль кривых, соответствующих этим значениям n, функция $\ln|F(z)|$ монотонно меняется от $-\infty$ до ∞.

Таким образом, в каждой из полос (2.35) при $n = 1, 2, \ldots$ находится точно один корень функции $\omega(z)$. Так как при $y < 0$ имеем $-\pi < \arg \Phi(z) < 0$, то в нижней полуплоскости кривые (2.34) расположены в полосах

$$\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi < \delta y < \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi \quad (-n = 1, 2, \ldots). \tag{2.36}$$

Во всех этих полосах $|y| > \frac{\pi}{2\delta}$ и снова из (2.32) и (2.33) заключаем, что в каждой полосе (2.36) находится точно один корень функции $\omega(z)$. Все остальные корни $\omega(z)$ должны лежать в пересечении верхней полуплоскости и полосы $-\frac{\pi}{2} < \delta y < \frac{\pi}{2}$, т. е. в полосе $0 \leqslant \delta y < \frac{\pi}{2}$. Случаи $\delta < 0$ и $c < 0$ исследуются аналогично.

Из 1) следует, что при выполнении условия А) при $d_\omega \neq 0$ в равенстве (2.33) $\delta = 0$. Если при этом $c > 0$, то

$$\operatorname{Im} F(z) \cdot \operatorname{Im} z > 0 \quad \text{при } \operatorname{Im} z \neq 0$$

и $\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right| < 1$, т. е. в этом случае $\omega(z) \in P$. Если же $c < 0$, то $\overline{\omega}(z) \in P$.

Итак, получается

ТЕОРЕМА 3. *Если дефект функции $\omega(z)$ положителен ($d_\omega > 0$), то условие* А) *является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция $\omega(z)$ не имела корней в нижней полуплоскости (т. е. чтобы $\omega(z) \in P$).*

Если $d_\omega < 0$ и $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, то условие А) *не может быть выполнено, т. е. на этот случай теорема Эрмита—Билера не переносится.*

Определение. Пару целых функций $P(z)$ и $Q(z)$ мы будем, следуя Н. Г. Чеботареву ([7]), называть *вещественной парой*, если при любых вещественных μ и ν функция $\mu P(z) + \nu Q(z)$ имеет лишь вещественные корни.

Замечание (Н. Г. Чеботарев). Для того чтобы целая функция $\omega(z)=P(z)+iQ(z)$ принадлежала классу HB, необходимо и достаточно, чтобы функции $P(z)$ и $Q(z)$ составляли вещественную пару и чтобы в некоторой точке выполнялось

$$Q'(x_0)P(x_0)-P'(x_0)Q(x_0)>0.$$

В самом деле, тот факт, что $P(z)$ и $Q(z)$ образуют вещественную пару, означает; что функция

$$F(z)=\frac{Q(z)}{P(z)} \tag{2.40}$$

не принимает вещественных значений при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

При $Q'(x_0)P(x_0)-P'(x_0)Q(x_0)>0$ имеем $F'(x_0)>0$ и функция $F(z)$ отображает верхнюю полуплоскость плоскости z $(\operatorname{Im} z>0)$ на верхнюю полуплоскость плоскости $F(\operatorname{Im} F>0)$, а следовательно, $\psi(z)=\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}$ отображает верхнюю полуплоскость на единичный круг, т. е.

$$\left|\frac{\omega(z)}{\overline{\omega}(z)}\right|<1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z>0. \tag{2.41}$$

Все корни функций $P(z)$ и $Q(z)$ вещественны и, следовательно, функции $\omega(z)$ и $\overline{\omega}(z)$ не имеют общих невещественных корней. Итак, $\omega(z)\in HB$.

Обратное положение следует немедленно, если заметить, что (2.41) эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Im} F(z)\cdot\operatorname{Im} z>0 \text{ при } \operatorname{Im} z\neq 0.$$

§ 3. В этом параграфе мы установим общий принцип, позволяющий доказывать неравенства, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна, и дадим некоторые приложения этого принципа.

ЛЕММА 3. *Пусть $\omega(z)$ и $f(z)$ — функции конечных степеней соответственно σ и τ, причем $\sigma\geqslant\tau$. Для того чтобы функция*

$$\varphi_u(z)=f(z)-u\omega(z) \tag{3.00}$$

принадлежала классу P при любом комплексном u, удовлетворяющем условию $|u|\geqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(z)$ принадлежала классу P и чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x)|\leqslant|\omega(x)| \quad (-\infty<x<\infty). \tag{3.10}$$

Доказательство необходимости. При $u\to\infty$ функция $\frac{1}{u}\varphi_u(z)$ стремится к $\omega(z)$ равномерно в любой ограниченной области и, по следствию 4 § 1, $\omega(z)\in P$. Далее, функция $\frac{\varphi_u(z)}{\omega(z)}=\frac{f(z)}{\omega(z)}-u$ голоморфна и не обращается в нуль в полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$, если только $|u|\geqslant 1$. Иначе, $\left|\frac{f(z)}{\omega(z)}\right|<1$ при $\operatorname{Im} z<0$ и, следовательно, выполнено (3.10).

Доказательство достаточности. Рассмотрим частное

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{\omega(z)}. \tag{3.11}$$

Эта функция удовлетворяет (с заменой верхней полуплоскости на нижнюю) условиям леммы 2 § 1 и, следовательно,

$$h_f(\theta) = h_\omega(\theta) + k|\sin\theta| \quad (\pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi) \tag{3.12}$$

и

$$|\psi(z)| \leqslant e^{k|y|} \quad \text{при} \quad y = \operatorname{Im} z < 0.$$

Как видно из (3.12), нижняя часть индикаторной диаграммы функции $f(z)$ получается из нижней части индикаторной диаграммы функции $\omega(z)$ сдвигом на отрезок k в направлении мнимой оси. При $k > 0$ мы будем иметь

$$\tau \geqslant \sup h_f(\theta) \geqslant \sqrt{k^2 + \sigma^2} > \sigma,$$

что противоречит условию леммы. Итак, $k \leqslant 0$ и, следовательно,

$$|\psi(x)| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z < 0. \tag{3.13}$$

Знак равенства в (3.13) хотя бы в одной точке z_0, $\operatorname{Im} z_0 < 0$, возможен лишь, если $f(z) \equiv e^{i\gamma}\cdot\omega(z)$ (γ — вещественная константа), и тогда $\varphi_u(z) \in P$, при всех значениях u.

Если в (3.13) нет тождественного равенства, то $|\psi(z)| < 1$ при $\operatorname{Im} z < 0$ и при $|u| \geqslant 1$ функция $\varphi_u(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости.

Пусть $|u| > 1$. Тогда при $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ имеем

$$|\psi(z) - u| \geqslant |u| - 1$$

и, следовательно,

$$h_\varphi(\theta_0) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln|\varphi_u(re^{i\theta})|}{r} = \sigma \quad \text{при} \quad h_\varphi(\theta_0) = \sigma.$$

С другой стороны, $h_\varphi(-\theta_0) \leqslant \sigma$ и, так как (см. следствие 1 § 1) индикаторная диаграмма функции $\varphi_u(z)$ симметрична относительно прямой, параллельной вещественной оси, то $h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и дефект функции $\varphi_u(z)$ неотрицателен.

Итак, при $|u| > 1$ имеем $\varphi_u(z) \in P$.

При $|u| = 1$ следует сделать предельный переход при $u \to e^{i\gamma}$ и $|u| > 1$ и воспользоваться следствием 4 § 1. Лемма доказана*.

Определение. Аддитивный однородный оператор $\mathfrak{B}[f(z)]$ над функциями конечной степени мы будем называть *$\mathfrak{B}$-оператором*, если он функции класса P переводит в функции класса P.

ТЕОРЕМА 4. *Если $\omega(z)$ — функция класса P степени σ и $f(z)$ — целая функция степени $\tau \leqslant \sigma$, а $\mathfrak{B}[f(x)]$ — произвольный $\mathfrak{B}$-оператор, то из неравенства*

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty) \tag{3.20}$$

следует неравенство

$$|\mathfrak{B}[f(x)]| \leqslant |\mathfrak{B}[\omega(x)]| \quad (-\infty < x < \infty). \tag{3.21}$$

* Это доказательство является развитием одного приема, примененного Н. И. Ахиезером (5).

Доказательство основывается на лемме 3. При выполнении условий теоремы 4 функция

$$\varphi_u(z) = f(z) - u\omega(z)$$

принадлежит классу P при $|u| \geqslant 1$. Применяя оператор $\mathfrak{B}$, мы получаем, что

$$\mathfrak{B}[f(z)] - u\,\mathfrak{B}[\omega(z)] \in P \quad \text{при} \quad |u| \geqslant 1.$$

В силу первой части леммы 3 (необходимости), отсюда следует (3.21). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Оператор дифференцирования* $f'(x) = Df(x)$ *есть* $\mathfrak{B}$-*оператор.*

Для доказательства рассмотрим мнимую часть производной от логарифма функции $\omega(z)$ класса P. Из представления (1.73) получается

$$\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \nu + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(y-\gamma_k)}{(x-\beta_k)^2+(y-\gamma_k)^2}, \tag{3.30}$$

где $d_\omega = \nu \geqslant 0$, $\alpha_k = \beta_k + i\gamma_k$ $(\gamma_k \geqslant 0)$, и, легко видеть, что при $y < 0$ $\omega'(z) \neq 0$.

Пусть

$$M_1(r) = \max_{|z|=r}|\omega'(z)|, \quad M(r) = \max_{|z|=r}|\omega(z)|.$$

Так как $M_1(r)$ монотонно растет с ростом r, то

$$|\omega(z) - \omega(0)| = \left|\int_0^z \omega'(z)\,dz\right| \leqslant M_1(r)\cdot r,$$

или

$$M_1(r) \geqslant |M(r) - |\omega(0)||\cdot r^{-1}. \tag{3.31}$$

Отсюда следует, что степень функции при дифференцировании не уменьшается.

С другой стороны, как известно [см., например, ([1])], при произвольном $\varepsilon > 0$ и $r > r_\varepsilon$

$$\ln|\omega(re^{i\theta})| < (h(\theta) + \varepsilon)\,r \tag{3.32}$$

и из неравенства

$$|\omega'(z_0)| \leqslant \max_{|\zeta|=1}|\omega(z_0+\zeta)|,$$

вытекающего из формулы Коши, получаем

$$h_{\omega'}(\theta) \leqslant h_\omega(\theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi). \tag{3.33}$$

Если дефект функции $\omega(z)$ положителен $(d_\omega > 0)$, то ось симметрии индикаторной диаграммы проходит под осью абсцисс и $h_\omega(\theta) < \delta$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, а из (3.33) следует, что и $h_{\omega'}(\theta) < \delta$ при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. С другой стороны, из (3.31) следует, что степень функции $\omega'(z)$ равна σ и, следовательно [см. ([1])], при некотором $\theta = \theta_0$ $h_{\omega'}(\theta_0) = \sigma$. Очевидно, $\pi < \theta_0 < 2\pi$ и $h_{\omega'}(-\theta_0) < \sigma$. Отсюда следует, что дефект функции $\omega'(z)$ положителен. Более того, из неравенства (3.33) и $h_\omega(\theta_0) \leqslant \sigma$ следует, что $d_{\omega'} \geqslant d_\omega$. Если $d_\omega = 0$, то функция $e^{ipz}\omega(z)$ при $p > 0$

принадлежит классу P, а следовательно, и $[e^{ipz}\omega(z)]' \in P$. Переходя к пределу при $p \to 0$, мы, на основании следствия 4 § 1, заключим, что $\omega'(z) \in P$.

Замечание 1. При дифференцировании функции класса P ее дефект не уменьшается.

Замечание 2. Если функция $\omega(z)$ класса P не имеет кратных вещественных корней и $\omega'(z)$ имеет хотя бы один вещественный корень, то $\omega(z)$ — с точностью до постоянного множителя вещественная функция. В самом деле, из (3.30) следует, что $\operatorname{Im}\frac{\omega'(z)}{\omega(z)}$ может обратиться в нуль при $y=0$ только, если $\nu=0$ и $\operatorname{Im}\alpha_k=0$ при всех $k=1, 2, \ldots$, а это, как видно из представления (1.73), эквивалентно тому, что $\omega(z)$ вещественна с точностью до постоянного множителя.

ТЕОРЕМА 6. *Если $\omega(z)$ такая целая функция степени $\sigma \geqslant 0$, что ни $\omega(z)$, ни $\overline{\omega}(z)$, не принадлежат классу P, то существует целая функция $f(z)$ степени $\tau \leqslant \sigma$, удовлетворяющая неравенству* (3.20) *и такая, что в некоторой вещественной точке x_0*

$$|f'(x_0)| > |\omega'(x_0)|.$$

Доказательство. Пусть функция $\omega(z)$ имеет корни в обеих полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$. Выберем точку x_0 так, чтобы $\omega(x_0) \neq 0$ и $\omega'(x_0) \neq 0$. Пусть, для определенности, $\operatorname{Im}\frac{\omega(x_0)}{\omega'(x_0)} \leqslant 0$. Положим

$$f(z) = \frac{z-\overline{\alpha}}{z-\alpha}\,\omega(z),$$

где α — корень функции $\omega(z)$ из верхней полуплоскости. Очевидно, имеем

$$|f(x)| = |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

С другой стороны,

$$|f'(x)| = |\omega'(x)| \cdot \left| 2i \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\omega(x)}{\omega'(x)} + 1 \right|.$$

При $x = x_0$ отличный от нуля вектор $2i\operatorname{Im}\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)\frac{\omega(x_0)}{\omega'(x_0)}$ образует с положительным направлением вещественной оси угол, не превосходящий прямого и, следовательно,

$$|f'(x_0)| > |\omega'(x_0)|.$$

Пусть $\omega(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости. Для того чтобы ни $\omega(z)$, ни $\overline{\omega}(z)$ не принадлежали классу P, необходимо, чтобы $\omega(z)$ имела по меньшей мере один корень в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im}\alpha > 0$) и отрицательный дефект $d_\omega < 0$. Положим в этом случае

$$f(z) = e^{2i\delta z}\omega(z),$$

где $\delta = -d_\omega$. Очевидно, что $|f(x)| = |\omega(x)|$ и $\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right\}$.

Кроме того, имеем

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right\} = -\delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}$$

и

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\} = \delta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{(x-\beta_k)^2+\gamma_k^2}.$$

Второе слагаемое в правых частях этих равенств положительно и, следовательно,

$$\left|\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}\right\}\right| < \left|\operatorname{Im}\left\{\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}\right|.$$

Отсюда следует

$$|f'(x)| > |\omega'(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

ЛЕММА 4. *Если функции $f(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4 и при некотором вещественном числе α функция*

$$\varphi(z) = f(z) - e^{i\alpha}\omega(z)$$

с точностью до постоянного множителя вещественна, то

$$e^{i\gamma} f(x) = \operatorname{Re}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\} + ic \operatorname{Im}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\}, \tag{3.40}$$

где γ и c — вещественные числа, причем $|c| \leqslant 1$ и $\gamma_1 = \gamma + a$.

Доказательство. Выберем вещественное число γ так, что $\operatorname{Re} e^{i\gamma}\varphi(x) = 0$. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{Re}\{e^{i\gamma} f(x)\} = \operatorname{Re}\{e^{i\gamma_1}\omega(x)\}. \tag{3.41}$$

Пусть

$$e^{i\gamma} f(x) = P(x) + iQ(x) \text{ и } e^{i\gamma_1}\omega(x) = P(x) + iS(x).$$

Из неравенства

$$|P(x) + iQ(x)| \leqslant |P(x) + iS(x)|$$

следует, что

$$|Q(x)| \leqslant |S(x)|. \tag{3.42}$$

Функция $\psi(z) = \frac{Q(z)}{S(z)}$ — целая функция конечной степени, причем

$$|\psi(x)| \leqslant 1. \tag{3.43}$$

По лемме 2, имеем

$$h_Q(\theta) = h_S(\theta) + h_\psi(\theta) \quad (h_\psi(\theta) = |k \sin\theta|).$$

При $k \neq 0$ отсюда следует, что степень функции $Q(z)$ ($\sigma_Q = \max h_Q(\theta)$) больше степени функции $S(z)$ (точнее $\sigma_Q \geqslant \sqrt{\sigma_S^2 + k^2}$), а значит, и степени функции $P(z)$, так как индикаторные диаграммы $P(z)$ и $S(z)$ совпадают [см. условие В) теоремы 1]. Степень функции $f(z)$, очевидно, должна совпадать в этом случае со степенью $Q(z)$ (должны совпадать даже индикаторные диаграммы), а степень функции $\omega(z)$ не превышает степени $P(z)$. Но это невозможно, ибо $\tau > \sigma$ противоречит предположению. Таким образом, $k = 0$. Отсюда и из второй части леммы 2 следует, что $|\psi(z)| \leqslant 1$ во всей комплексной плоскости, а следовательно, $\psi(z) \equiv c$ ($|c| \leqslant 1$) и $Q(z) \equiv cS(z)$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функции* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4 *и* $\mathfrak{B}[f(x)] = f'(x)$. *Тогда для того чтобы в* (3.21) *хотя бы в одной точке имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы функция* $f(x)$ *имела вид* (3.40).

В самом деле, если $|f'(x_0)| = |\omega'(x_0)|$, то при некотором вещественном α производная от функции

$$\varphi(z) = f(z) - e^{i\alpha}\omega(z)$$

обращается в нуль в точке x_0. Согласно замечанию 2 к теореме 5, $\varphi(z)$ — вещественная функция с точностью до постоянного множителя и, по лемме 4, функция $f(x)$ может быть представлена в форме (3.40).

Перейдем к построению других $\mathfrak{B}$-операторов.

ЛЕММА 5. *Если* $\omega(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k + \cdots$ *есть функция класса* P, *то полиномы*

$$P_n^{\omega}(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k z^k \qquad (3.50)$$

не имеют корней в нижней полуплоскости.

Доказательство. Согласно следствию 6 § 1, существует последовательность полиномов

$$Q_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_{k,m} z^k, \qquad (3.51)$$

не имеющих корней в нижней полуплоскости (класса P), которая равномерно сходится к $\omega(z)$ в любой ограниченной области. При этом, конечно, $a_{k,m} \to a_k$ при $m \to \infty$.

Заметим, что если $\operatorname{Im}\alpha \geqslant 0$, то оператор

$$(D - \bar{\alpha} I) f(z) = f'(z) - \bar{\alpha} f(z)$$

есть $\mathfrak{B}$-оператор. Это легко следует из равенства

$$(D - \bar{\alpha} I) f(z) = e^{\bar{\alpha} z} D\left[e^{-\bar{\alpha} z} f(z)\right] \qquad (3.52)$$

и замечания 1 к теореме 5. Разложив полином $Q_m(z)$ на множители и использовав сделанное замечание, мы убеждаемся в том, что оператор

$$\bar{Q}_m(D) = \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{k,m} D^k$$

есть $\mathfrak{B}$-оператор. Применяя этот оператор к функции z^n, мы получаем полином $Q_{n,m}(z) = Q_m(D) z^n$, не имеющий корней в верхней полуплоскости. Полином

$$z^n Q_{n,m}\left(\frac{1}{z}\right) = a_{0,m} + a_{1,m} z + \cdots + n(n-1)\cdots(n-k+1) a_{k,m} z^k + \\ + \cdots + n! a_{n,m} z^n, \qquad (3.53)$$

очевидно, не имеет корней в нижней полуплоскости.

Подставляя в (3.53) вместо z $\frac{z}{n}$ и переходя к пределу при $m \to \infty$, убеждаемся в том, что полином $P_n^{\omega}(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости.

Замечание 1. Если $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ — целая функция и

$$P_n^F\ (z)=c_0+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_kz^k, \quad (3.54)$$

то при $n\to\infty$ $P_n^F\ (z)\to F(z)$ равномерно в любой ограниченной области.

В самом деле, из неравенств Коши

$$|c_k|\leqslant\frac{M(\rho)}{\rho^k}\quad (M(\rho)=\max_{|z|=\rho}|\varphi(z)|)$$

следует при $|z|\leqslant r$ и $\rho=2r$

$$\left|\sum_{k=p+1}^{\infty}c_kz^k\right|\leqslant M(\rho)\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$$

и

$$\left|\sum_{k=p+1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)c_kz^k\right|<M(\rho)\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}.$$

Отсюда выводим, что

$$|F(z)-P_n^F\ (z)|<\left|\sum_{k=2}^{p}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right]c_kz^k\right|+ +M(\rho)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{p-2}.$$

Выбрав достаточно большим p, а затем n, мы получим

$$|F(z)-P_n^F(z)|<\varepsilon\quad \text{при}\quad |z|\leqslant r.$$

Замечание 2. Если $F(z)$ — вещественная функция и имеет лишь вещественные корни, то и $P_n^F\ (z)$ имеет лишь вещественные корни.

Это — теорема Иенсена; она следует непосредственно из леммы 5.

По лемме 5, оператор перехода от функции $f(z)$ к полиному есть $\mathfrak{B}$-оператор. Отсюда следует

ТЕОРЕМА 8. *Если функции $f(z)$ и $\omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4, то*

$$|P_n^f\ (x)|\leqslant|P_n^\omega\ (x)|\quad (-\infty<x<\infty). \quad (3.55)$$

ЛЕММА 6. *Если $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$ — целая функция, то оператор $F(D)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kD^k$ преобразует все функции конечной степени в функции конечной степени, не увеличивает степень и ряд*

$$F(D)f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kf^{(k)}(z) \quad (3.56)$$

сходится равномерно в любой ограниченной области.

Доказательство. По известной оценке Коши для коэффициентов ряда Тейлора, имеем

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant k! \frac{M(\rho + |z|)}{\rho^k},$$

где $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. При некоторых $\varepsilon > 0$ и $L_\varepsilon > 0$ имеем

$$M(r) < L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)r},$$

где τ — степень функции $f(z)$.

Воспользовавшись этим неравенством и подставив в (3.56) $\rho = \frac{k}{\tau + \varepsilon}$, мы получим

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|} \cdot \frac{e^k k!}{k^k} (\tau + \varepsilon)^k,$$

или, оценивая $\frac{e^k k!}{k^k}$ по известной формуле Стирлинга, будем иметь

$$|f^{(k)}(z)| \leqslant 4\pi L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|} (\tau + \varepsilon)^k k \quad (k \geqslant 1). \tag{3.57}$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда (3.56) и оценка

$$|F(D) f(z)| < 4\pi L_\varepsilon e^{(\tau+\varepsilon)|z|} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k| (\tau + \varepsilon)^k + |c_0| \right). \tag{3.58}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 9. *Если* $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — *целая функция, представимая в форме* (1.73), *то оператор* $\overline{F}(D)$ *есть* $\mathfrak{B}$-*оператор.*

Доказательство. Из того, что полином $P_n^F(z)$ не имеет корней в нижней полуплоскости, легко следует (см. доказательство леммы 5), что $\overline{P}_n^F(D)$ есть $\mathfrak{B}$-оператор.

Из неравенств Коши для коэффициентов ряда Тейлора функции $F(z)$ и из оценки (3.57), написанной для функции $\omega(z)$, легко получить (см. замечание 1 к лемме 5), что последовательность $\overline{P}_n^F(D)\omega(z)$ сходится равномерно в любой ограниченной области к функции $\overline{F}(D)\omega(z)$. Но в таком случае (следствие 4) $\overline{F}(D)\omega(z)$ есть функция класса P. Теорема доказана.

Замечание. Обозначим класс функций вида

$$F(z) = e^{-\gamma z^2} \Phi(z) \quad (\gamma \geqslant 0),$$

где $\Phi(z)$ первого рода и класса HB, т. е. вида (1.73), через P^*. Так как

$$e^{-\gamma z^2} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\gamma z^2}{n}\right)^n,$$

то, как легко видеть, всякая функция $F(z)$ класса P^* порождает $\mathfrak{B}$-оператор $\overline{F}(D)$. *

* Можно показать, что функция, являющаяся пределом полиномов без корней в верхней полуплоскости, принадлежит классу P^*. Более того, для того чтобы

ТЕОРЕМА 10. *Пусть функции* $\omega(z)$ *и* $f(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 4, $\omega(z)$ *не имеет вещественных корней, а* $F(D)$ — *оператор, определенный в теореме* 9. *Пусть, кроме того, не имеет места ни одно из тождеств*

$$F(D)\equiv e^{kD}, * \qquad \omega(z)\equiv e^{pz}P(z) \quad \text{или} \quad f(z)\equiv e^{i\gamma}\omega(z),$$

где k, p, γ — *вещественные числа, а* $P(z)$ — *полином.*

Для того чтобы в (3.21) *в некоторой точке имел место знак равенства, необходимо и достаточно, чтобы функции* $f(z)$ *и* $\omega(z)$ *были связаны соотношением* (3.40), *а функция* $F(z)$ *была вещественной с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство достаточности. В соотношении (3.40) мы можем, не нарушая общности, считать, что $\gamma=\gamma_1=0$ и, положив

$$\omega(z)=r(z)+is(z), \tag{3.60}$$

будем иметь

$$f(z)-\omega(z)=ic_1s(z), \tag{3.61}$$

где c_1 — вещественная константа. По лемме 3, из (3.61) следует, что $S(z)$ принадлежит классу P, а так как можно, не нарушая общности, считать, что $F(z)$ — вещественная функция, то и $S_0(z)=F(D)S(z)$ — также вещественная функция класса P. Покажем, что эта функция имеет вещественный корень. В самом деле, в противном случае мы имели бы

$$F(D)S(z)=ce^{pz} \tag{3.62}$$

при некоторых вещественных c и p. Представив функцию $F(z)$ в форме

$$F(z)=P_n(z)F_n(z),$$

где

$$P_n(z)=cz^me^{az}\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}} \quad \text{и} \quad F_n(z)=\prod_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{3.63}$$

и, интегрируя уравнение $P_n(D)y=e^{pz}$, мы получим

$$S_n(z)=F_n(D)S(z)=e^{pz}Q_n(z)+\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{z}{\alpha_k}}Q_{k,n}(z), \tag{3.64}$$

где $Q_n(z)$ и $Q_{k,n}(z)$ — полиномы, причем степень полинома $Q_n(z)$ нулевая, если p не является корнем функции $F(z)$ и не превышает крат-

---

функция $F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ принадлежала классу P^*, необходимо и достаточно, чтобы полиномы

$$P_n^F(z)=a_0+\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_kz^k$$

не имели корней в нижней полуплоскости.

* При $F(D)=e^{kD}$ оператор $F(D)$ является оператором сдвига, т. е. $e^{kD}\psi(z)=\psi(z+k)$.

ности этого корня в противном случае. Полиномы $P_{k,n}(z)$ должны быть тождественно равными нулю. В самом деле, индикаторная диаграмма обобщенного полинома вида (3.64) представляет собой наименьший многоугольник, содержащий все точки, сопряженные показателям $\left(\bar{p}, \frac{1}{\bar{\alpha}_k}\right)$. Известно, что внутри всякого угла, содержащего внутри себя луч, перпендикулярный к какой-нибудь из сторон этого многоугольника, находится бесконечное множество корней обобщенного полинома (3.64) *. Отсюда следует, что если индикаторная диаграмма обобщенного полинома не сводится к точке или отрезку, параллельному мнимой оси, то обобщенный полином имеет корни как в верхней, так и в нижней полуплоскости. В нашем случае все показатели $\left(p \text{ и } \frac{1}{\alpha_k}\right)$ вещественны, а $S_n(z)$ принадлежит классу P и, следовательно, индикаторная диаграмма обобщенного полинома (3.64) должна сводиться к точке, а это означает, что $P_{k,n}(z) \equiv 0$. Итак,

$$S_n(z) = F_n(D) S(z) = e^{pz} Q_n(z). \tag{3.65}$$

Из неравенства (3.58) легко следует, что если $\psi(z)$ — некоторая функция конечной степени, то последовательность $\psi_n(z) = F_n(D)\psi(z)$ сходится к $\psi(z)$ равномерно в любой ограниченной области. Переходя в (3.65) к пределу при $n \to \infty$, мы получим

$$S(z) = e^{pz} Q(z),$$

где $Q(z)$ — полином. По теореме 1 [см. А) и В)], функция $r(z)$ должна иметь конечное число корней и ту же индикаторную диаграмму (точку p), что и функция $s(z)$. Отсюда следует, что

$$\omega(z) = e^{pz} P(z),$$

где $P(z)$ — полином, а это противоречит условию теоремы. Итак, функция $F(D) S(z)$ должна иметь вещественный корень x_0 и, следовательно

$$F(D) f(x_0) = F(D)\, \omega(x_0).$$

Достаточность доказана.

Доказательство необходимости. Докажем сначала, что при $\psi(z) = f(z) - e^{i\beta}\omega(z)$ тождество

$$\overline{F}(D) \psi(z) \equiv 0 \tag{3.66}$$

невозможно, каково бы ни было вещественное число β.

Действительно, допустим, что тождество (3.66) имеет место. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\beta = 0$. Полагая

$$\psi_n(z) = \overline{F}_n(D) \cdot \psi(z),$$

мы, как и раньше, получим, что $\psi_n(z) \rightrightarrows \psi(z)$ в любой ограниченной области и, следовательно, существует такое натуральное число n, что $\psi_n(z) \equiv 0$ и $\psi_{n+1}(z) \not\equiv 0$. Но тогда из соотношения

---

* Более того, плотность корней обобщенного полинома внутри такого достаточно малого угла равна длине соответствующей стороны многоугольника, деленной на 2π. Доказательство см., например, в ([1]).

$$(D-\overline{\alpha}_n)\,\psi_{n+1}(z)=\overline{\alpha}_n\psi_n\left(z-\frac{1}{\overline{\alpha}_n}\right)=0$$

непосредственно следует

$$\psi_{n+1}(z)=ce^{\overline{\alpha}_n z}\quad (c\text{ — постоянная}),\tag{3.67}$$

и так как $\psi_{n+1}(z)$ принадлежит классу P, то $\operatorname{Im}\overline{\alpha}_n\geqslant 0$. С другой стороны, по определению функции $F(z)$, $\operatorname{Im}\alpha_n\geqslant 0$. Итак, $\psi_{n+1}(z)$ — с точностью до постоянного множителя — вещественная функция. Воспользовавшись леммой 4, получаем

$$\overline{e}^{i\gamma}\psi_{n+1}(x)=ic_1\operatorname{Im}\{e^{i\gamma}\omega_{n+1}(x)\}\quad \left(\omega_{n+1}(x)=\overline{F}_{n+1}(D)\,\omega(x)\right),\tag{3.68}$$

где c_1 — вещественная постоянная. Сопоставляя (3.67) и (3.68), получаем, что

$$\operatorname{Im}\{e^{i\gamma}\omega_{n+1}(x)\}=c_2e^{\alpha_n z}\quad (c_2\text{ — вещественная постоянная}).$$

Из теоремы 1 заключаем, что функция $\operatorname{Re}\{e^{i\gamma}\omega_{n+1}(z)\}$ имеет не более одного корня и что ее индикаторная диаграмма есть точка α_n. Отсюда непосредственно следует, что

$$\omega_{n+1}(z)=e^{\alpha_n z}(d_1z+d_2)\quad (d_1\text{ и }d_2\text{ — постоянные}).\tag{3.69}$$

Если кратность корня α_n равна p, то, интегрируя, получим

$$\omega_{n+p}(z)=e^{\alpha_n z}P_{n+p}(z),\tag{3.70}$$

где $P_{n+1}(z)$ — полином степени не выше p.

Покажем, что вообще при $m\geqslant n+p$ функция $\omega(z)$ имеет вид (3.70). В самом деле, пусть при $m=q-1$ функция имеет вид (3.70). Тогда при $m=q$

$$\omega_q(z)=e^{\alpha_n z}P(z)+ce^{\overline{\alpha}_q z}\quad (c\text{ — постоянная}).$$

Если $c\neq 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_q\neq 0$, то индикаторная диаграмма функции $\omega_q(z)$ есть отрезок, соединяющий точки α_n и α_q, и дефект функции $\omega_q(z)$ отрицателен. Если же $c\neq 0$ и $\operatorname{Im}\alpha_q=0$, то функция $\omega_q(z)$ имеет бесконечное множество корней в обеих полуплоскостях. Итак, $c=0$, т. е. $\omega_q(z)$ имеет вид (3.70).

Переходя к пределу при $q\to\infty$, мы получим, что функция $\omega(z)$ также имеет вид (3.70), что противоречит условию теоремы.

Так как, по условию, в (3.21) в некоторой точке x_0 имеет место знак равенства, то не равная тождественно нулю функция

$$\psi_0(z)=\overline{F}(D)\,\psi(y)\quad (\psi(z)=f(z)-e^{i\beta}\omega(z))$$

обращается в нуль в точке x_0. Но

$$-\frac{1}{\overline{\alpha}_1}\psi_0(z-a)=e^{\overline{\alpha}_1 z}D\,[e^{-\overline{\alpha}_1 z}\psi_1(z)]\tag{3.71}$$

и, в силу замечания 2 к теореме 5, функция $\psi_0(z)$ может иметь вещественный корень, лишь если $\operatorname{Im}\alpha_1=0$ и $\operatorname{Im}a=0$ (так как в (1.73) $\operatorname{Im}a\geqslant 0$ и $\psi_0(z)$ функция класса P). Из того же замечания к теореме 5 и из (3.71) следует, что если $\psi_0(z)$, а значит, и $\psi_0(z-a)$, имеет вещественный корень, то $\psi_1(z)$ — вещественная функция с точностью до постоянного множителя. Функция $\psi_1(z)$ должна иметь вещественные

корни (иначе их не было бы у функции $\psi_0(z)$ и, повторяя рассуждения, мы получим, что $\psi_2(z)$ — вещественная и $\operatorname{Im}\alpha_2=0$ и т. д. Переходя к пределу при $n\to\infty$ ($\psi_n(z)\to\psi(z)$), получим, что $\psi(z)$ — вещественна с точностью до постоянного множителя. Остается сослаться на лемму 4. Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $F(z)$ представляется в форме (1.73) при $\operatorname{Im}\alpha_k\geqslant -q\,(q>0)$ и $\nu=\operatorname{Im}a\geqslant 0$, $f(z)$ — функция конечной степени $\tau\geqslant 0$, а $\omega(z)\in P_\sigma\,(\sigma\geqslant 2q+\tau)$ и $d_\omega\geqslant q$, то из неравенства

$$|f(x)|\leqslant|\omega(x)|\quad(-\infty<x<\infty) \tag{3.72}$$

следует

$$|\overline{F}(D)f(x)|\leqslant|\overline{F}(D)\omega(x)|. \tag{3.73}$$

Для доказательства заметим, что, по лемме 3, функция

$$\varphi(z)=[f(z)-u\omega(z)]\,e^{-iqz}\in P\quad\text{при}\quad|u|\geqslant 1.$$

По теореме 9, оператор $\overline{F}(D+iq)$ есть $\mathfrak{B}$-оператор и, следовательно, функция

$$e^{iqz}\overline{F}(D+iq)[\varphi(z)]=\overline{F}(D)[e^{iqz}\varphi(z)]=\overline{F}(D)f(x)-u\overline{F}(D)\omega(x)$$

принадлежит классу P и из леммы 3 следует (3.73).

Из теоремы 10 следует, что если не имеет места тождество

$$\omega(z)=e^{(k+iq)z}P(z),$$

где k вещественно и $P(z)$ — полином, то знак равенства в (3.73) будет тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\alpha_k=q$ $(k=1,2,\ldots)$ и

$$f(z)\equiv\overline{\omega}(z)\,e^{2iqz}. \tag{3,74}$$

Последнее равенство следует из того, что, согласно теореме 10, функция $f(z)e^{-iqz}$ и $\omega(z)e^{-iqz}$ связаны соотношением (3.40). При $c\neq -1$ легко видеть, что степень функции

$$e^{iqx}\left[\operatorname{Re}\{e^{i(\gamma_1-qx)}\omega(x)\}+ic\operatorname{Im}\{e^{i(\gamma_1-qx)}\omega(x)\}\right]$$

равна $\sigma\geqslant 2q+\tau$.

Заметим, что если $|f(x)|\leqslant M$, то из (3.73) следует что

$$|\overline{F}(D)f(x)|\leqslant M\,|\overline{F}[i(\tau+2g)]|.$$

Для получения этого неравенства достаточно положить

$$\omega(z)=Me^{i(\tau+2q)z}.$$

Замечание 2. Если $\omega_1(z)$, $\omega_2(z)$, $\omega_n(z)$ и $y(z)$ — функции конечной степени, не имеющие корней в нижней полуплоскости, и

$$-q=\max_p\sum_{k=p}^{n}d_{\omega_k}\geqslant -d_y, \tag{3.75}$$

то функция

$$L(y)=\frac{d}{dz}\left\{\omega_1(z)\frac{d}{dz}\left[\omega_2(z)\cdots\frac{d}{dz}\;\omega_n(z)\,y\right]\right\} \tag{3.76}$$

есть функция класса P.

В самом деле из (3.75) имеем $\omega_n(z)\,y(z) \in P$, так как при перемножении дефекты складываются. При дифференцировании получаем функцию класса P, причем дефект ее не меньше, чем $d_y - d_{\omega_n}$. Дальше видим, что

$$\omega_{1-n}(z)\,\frac{d}{dz}\,[\omega_n(z)\,y(z)] \in P$$

и т. д. Отсюда получается при $q \geqslant 0$:

Если $f(z)$ — функция конечной степени τ, а $\omega(z)$ — функция класса P_σ, $\sigma \geqslant \tau + 2q$ $(q \geqslant 0)$, причем $d_\omega \geqslant q$ и

$$|f(x)| \leqslant |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

то

$$|L[f(x)]| \leqslant |L[\omega(x)]|.$$

Другой класс $\mathfrak{B}$-операторов мы построим с помощью последовательностей, введенных в рассмотрение Полиа и Шуром ([17]) и названных ими последовательностью множителей (Faktorenfolge) первого рода. По определению Полиа и Шура, последовательность $\Gamma = \{\gamma_k\}_{-\infty}^{\infty}$ называется *последовательностью множителей первого рода*, если каков бы ни был полином

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

все корни которого вещественны, полином

$$\Gamma[P(z)] = a_0\gamma_0 + a_1\gamma_1 z + \cdots + a_n\gamma_n z^n$$

также имеет лишь вещественные корни.

Примеры таких последовательностей встречаются еще у Лаггера. В частности, последовательностями множителей первого рода являются последовательности

$$\left\{\frac{1}{\omega(\omega+1)(\omega+2)\cdots(\omega+k)}\right\}$$

и

$$\{q^{k^2}\} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Полиа и Шур доказали следующую общую теорему: для того чтобы последовательность Γ была последовательностью множителей первого рода, необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{k!} z^k \tag{3.80}$$

сходился во всей плоскости и функция $\varphi(z)$ допускала представление

$$\varphi(z) = c e^{\delta z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \mu_n z), \tag{3.81}$$

где δ и μ_n все вещественны и одного знака. Отсюда следует, что либо с точностью до множителя, не зависящего от индекса k, $\gamma_k > 0$, либо последовательность γ_k — знакопеременная.

Из теоремы Эрмита — Билера легко следует, что если $\Gamma = \{\gamma_k\}_0^\infty$ есть последовательность множителей первого рода, $\gamma_k > 0$ $(k = 0,1,\ldots)$ и полином

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \tag{3.82}$$

не имеет корней в нижней полуплоскости, то полином

$$\Gamma[P(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k a_k z^k \tag{3.83}$$

также не имеет корней в нижней полуплоскости. В самом деле, для того чтобы полином

$$P(z) = R(z) + iS(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k + i\sum_{k=0}^{n} c_k z^k,$$

где $R(z)$ и $S(z)$ — вещественные полиномы, не имел корней в нижней полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы полиномы $S(z)$ и $R(z)$ образовывали вещественную пару (см. определение на стр. 58) и чтобы выполнялось неравенство $b_0c_1 - c_0b_1 > 0$.

Из определения последовательности множителей первого рода следует, что если полиномы $R(z)$ и $S(z)$ образуют вещественную пару, то и полиномы

$$\Gamma[R(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k b_k z^k \quad \text{и} \quad \Gamma[S(z)] = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k c_k z^k$$

также образуют вещественную пару.

Кроме того, при $b_0c_1 - c_0b_1 > 0$ имеем $\gamma_0\gamma_1(b_0c_1 - c_0b_1) > 0$.

Из этих соображений между прочим следует, что корни полинома $\Gamma[P(z)]$ лежат в наименьшем выпуклом многоугольнике, содержащем все корни полинома $P(z)$. Частным случаем этого положения является известная теорема Гаусса о корнях производной от полинома.

ТЕОРЕМА 11. *Если* $\Gamma = \{\gamma_k\}_{-\infty}^{\infty}$ *есть последовательность множителей первого рода и* $\gamma_k > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, *то оператор*

$$\Gamma[f(z)] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k a_k z^k \tag{3.84}$$

над функцией

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

есть $\mathfrak{B}$*-оператор.*

Доказательство. Из оценки для коэффициентов ряда Тейлора функции конечной степени $\tau - \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, k\sqrt[k]{|a_k|} = e\tau$ и представления (3.81) убеждаемся в том, что функция $\Gamma[f(z)]$ есть функция конечной степени $\tau + \delta$. Кроме того, если f — функция класса P, то полиномы

$$P_n^f(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k z^k,$$

а следовательно, и полиномы

$$Q_n(z) = \Gamma[P_n^f(z)] = a_0\gamma_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \gamma_k a_k z^k$$

не имеют корней в нижней полуплоскости.

Функция $\Gamma[f(z)]$ является пределом последовательности полиномов $Q_n(z)$, равномерно сходящейся в любой ограниченной области и, следовательно, также не имеет корней в нижней полуплоскости. Наконец, из очевидного неравенства

$$\left|\frac{Q_n(z)}{\bar{Q}_n(z)}\right| < 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

следует

$$\left|\frac{\Gamma[f(z)]}{\Gamma[\bar{f}(z)]}\right| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z > 0$$

и, следовательно, $\Gamma[f(z)]$ принадлежит классу P. Теорема доказана.

§ 4. Комбинируя теорему 1 и лемму 3, мы получим некоторые новые неравенства, обобщающие неравенство С. Н. Бернштейна в другом направлении.

Пусть $\omega(z) \in P_\sigma$ и не имеет вещественных корней.

Положим

$$\frac{\omega(x)}{|\omega(x)|} = e^{i\theta}.$$

Если $\omega(x)$ не равно $e^{\sigma x}$, где σ — степень $\omega(z)$, то $\theta = \theta(x)$ — монотонная функция от $x\,(-\infty < x < \infty)$. Мы будем считать в дальнейшем, что это условие выполнено. Функцию

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{|\omega(x)|}, \tag{4.01}$$

где $f(x)$ — вещественная целая функция степени $\tau \leqslant \sigma$, мы будем рассматривать как функцию от θ и обозначать

$$\varphi(x) = \psi(\theta) \quad (\alpha < \theta < \beta), \tag{4.02}$$

где $\alpha = \theta(-\infty) \geqslant -\infty$ и $\beta = \theta(+\infty) \leqslant \infty$ и $\beta - \alpha \geqslant \pi$.

ЛЕММА 7. *Пусть у функции*

$$S(\theta) = M \sin(\theta + \gamma)$$

положительное число M и вещественное γ подобраны так, что удовлетворяются равенства $S(\theta_1) = \psi(\theta_1)$ и $S(\theta_2) = \psi(\theta_2)$, где θ_1 и θ_2 — заданные числа $0 < \theta_2 - \theta_1 \leqslant \pi$, а функция

$$S_1(\theta) = M \cos(\theta + \gamma)$$

не обращается в нуль на интервале (θ_1, θ_2). Тогда либо

$$\sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)| > M, \tag{4.03}$$

либо

$$\psi(\theta) \equiv M \sin(\theta+\gamma). \tag{4.04}$$

Доказательство. Если $|\psi(\theta)| \leqslant M$, то по лемме 3, функция

$$\chi(z) = f(z) + iMe^{i\gamma}\omega(z) \tag{4.05}$$

принадлежит классу P и, следовательно, либо корни вещественной и мнимой частей функции $\chi(x)$ перемежаются, либо вещественная часть $\chi(x)$ тождественно равна нулю.

В силу условия, наложенного на функцию $S_1(\theta)$, первый случай невозможен, и, следовательно, $\psi(\theta) \equiv M\sin(\theta+\gamma)$.

ТЕОРЕМА 12. *Если функция* $\psi(\theta)$ *определена равенствами* (4.01), (4.02) *и* $0 < h \leqslant \pi$, *то*

$$\left|\psi\left(\theta+\frac{h}{2}\right) - \psi\left(\theta-\frac{h}{2}\right)\right| \leqslant 2\sin\frac{h}{2}\cdot\sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|, \tag{4.06}$$

причем равенство в некоторой точке возможно лишь для функции

$$\psi(\theta) = M\sin(\theta+\gamma).$$

Доказательство. Если для точек $\theta_1 = \theta - \frac{h}{2}$ и $\theta_2 = \theta + \frac{h}{2}$ выполнено условие леммы 7, то непосредственно из этой леммы получаем

$$|\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1)| = 2M\sin\frac{h}{2}\,|\cos(\gamma+\theta)| \leqslant$$
$$\leqslant 2\sin\frac{h}{2}\cdot\sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|. \tag{4.07}$$

Если же условие леммы не выполнено, то величины

$$\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1) + \psi(\theta_1)(1-\cos h) = M\cos(\theta_1+\gamma)\sin h$$
и
$$\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)(1-\cos h) = M\cos(\theta_2+\gamma)\sin h \tag{4.08}$$

разных знаков, откуда и вытекает, что

$$|\psi(\theta_2) - \psi(\theta_1)| \leqslant 2\max(|\psi(\theta_1)|, |\psi(\theta_2)|)\cdot\sin^2\frac{h}{2} \leqslant$$
$$\leqslant 2\sin\frac{h}{2}\cdot\sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|. \tag{4.09}$$

Неравенство (4.06) является обобщением одного неравенства, доказанного недавно С. Н. Бернштейном ([13]), которое можно получить из (4.06), полагая $\omega(x) = e^{i\sigma x}$. Метод, который мы применили для доказательства теоремы 12, весьма близок к методу С. Н. Бернштейна.

ЛЕММА 8. *Если* $\sup\limits_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)| = M$ *и* $\varepsilon = \arccos\left(\frac{\psi(\theta_0)}{M}\right)$, *то на полусегменте* $(\theta_0, \theta_0+\pi-\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\psi(\theta) \geqslant M\cos(\theta-\theta_0+\varepsilon) \tag{4.10}$$

и на полусегменте $(\theta_0, \ \theta_0+\varepsilon)$ — *неравенство*

$$\psi(\theta) \leqslant M\cos(\theta-\theta_0-\varepsilon), \tag{4.11}$$

причем если в (4.10) *или в* (4.11) *хотя бы в одной точке имеет место знак равенства, то*

$$\psi(\theta) \equiv M\cos(\theta-\theta_0 \pm \varepsilon).^{*} \tag{4.12}$$

Мы ограничимся доказательством неравенства (4.10). По лемме 3, функция

$$\chi(z) = f(z) - Me^{i(\varepsilon-\theta_0)}\omega(z)$$

принадлежит классу P и, по теореме 1, корни функций

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\chi(x)}{|\omega(x)|}\right\} = \psi(\theta) - M\cos(\theta-\theta_0+\varepsilon)$$

и

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{\chi(x)}{|\omega(x)|}\right\} = M\sin(\theta-\theta_0+\varepsilon)$$

должны перемежаться, если только $\operatorname{Re}\{\chi(\theta)\}$ не есть тождественный нуль. Точка θ_0 есть корень функции $\operatorname{Re}\{\chi(\theta)\}$. Следующий ее корень должен лежать правее точки $\theta_0+\pi-\varepsilon$, так как $\sin(\theta-\theta_0+\varepsilon)$ не обращается в нуль на интервале $(\theta_0, \ \theta_0+\pi-\varepsilon)$. Так как неравенство

$$\psi(\theta) < M\cos(\theta-\theta_0+\varepsilon)$$

при $\theta=\theta_0+\pi-\varepsilon$ приводит нас к противоречию с условием леммы, то остается принять (4.10).

ТЕОРЕМА 13. *Пусть* $f(z)$ — *вещественная целая функция степени* $\tau \leqslant \sigma$, *а функция* $\omega(z) \in P_\sigma$, *причем* $\omega(x) \neq 0$ *при* $-\infty < x < \infty$ *и*

$$\sup_{\alpha<\theta<\beta} |\psi(\theta)| = M < \infty,$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{f(x)}{|\omega(x)|} \ \textit{и} \ \theta = \arg\omega(x).$$

Тогда при $0 < h \leqslant 2\pi$

$$\sup_{\alpha<\theta<\beta}\left|\frac{1}{h}\int\limits_{\theta-\frac{h}{2}}^{\theta+\frac{h}{2}} \psi(\theta)\,d\theta\right| \geqslant \left(\frac{2\sin\frac{h}{2}}{h}\right)\sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|.^{**} \tag{4.13}$$

---

* Это неравенство было доказано С. Б. Стечкиным в 1948 г. в предположении, что $\psi(\theta)$ есть тригонометрический полином и $|\psi(\theta_0)| = M$. Заметим также, что неравенства (4.10) и (4.11) эквивалентны неравенству

$$|\psi'(\theta)| \leqslant M\sqrt{1-[\psi(\theta)]^2},$$

которое было доказано Н. И. Ахиезером в 1946 г. [см. ([5]), стр. 420, формула 13)]. Однако Н. И. Ахиезер накладывает некоторые лишние ограничения на функцию $\omega(x)$, от которых мы здесь освобождаемся.

** Интересно сопоставить это неравенство с очевидным неравенством

$$\sup\left|\frac{1}{h}\int\limits_{\theta-\frac{h}{2}}^{\theta+\frac{h}{2}} \psi(\theta)\,d\theta\right| \leqslant \sup_{\alpha<\theta<\beta}|\psi(\theta)|.$$

Доказательство. При $h=2\pi$ неравенство очевидно. Пусть $h<2\pi$. Выберем число θ_0 так, чтобы число ε леммы 8 удовлетворяло одному из неравенств (4.10) или (4.11). Пусть, для определенности, выполнено (4.10). Проинтегрировав это неравенство в интервале $\left(\theta_0,\ \theta_0+\frac{h}{2}\right)$ и аналогичное неравенство — в интервале $\left(\theta_0-\frac{h}{2},\ \theta_0\right)$, мы получим

$$\left|\int_{\theta_0-\frac{h}{2}}^{\theta_0+\frac{h}{2}} \psi(\theta)\,d\theta\right| > 2M\left[\sin\left(\frac{h}{2}+\varepsilon\right)-\sin\varepsilon\right].$$

Выбрав θ_0 так, чтобы $\psi(\theta_0)$ было достаточно близко к M, мы можем сделать $\varepsilon>0$ сколь угодно малым. Отсюда следует (4.13).

Замечание 1. Если при некотором $\theta=\theta_0$ $|\psi(\theta_0)|=M$, то знак равенства в (4.13) возможен лишь при $\psi(\theta)\equiv\pm M\cos(\theta-\theta_0)$.

Замечание 2. Если $G(x)$ — целая функция конечной степени τ и $|G(x)|\leqslant M$, то, выбрав $f(x)=G'(x)$ и $\omega(x)=e^{i\tau x}$, будем иметь при $0<h<\frac{2\pi}{\tau}$:

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|G\left(x+\frac{h}{2}\right)-G\left(x-\frac{h}{2}\right)\right| \geqslant \frac{2}{\tau}\sin\frac{h\tau}{2}\cdot\sup_{-\infty<x<\infty}|G'(x)|. \quad (4.14)$$

Это неравенство доказал С. Б. Стечкин ([11]) в предположении, что функция $G(x)$ есть тригонометрический полином.

С. Никольский ([12]) доказал его для произвольной целой функции конечной степени, но в предположении, что $0<h<\pi$.

В приведенной здесь общей форме неравенство (4.14) было доказано С. Н. Бернштейном ([13]).

С помощью множителя $e^{i\gamma}$ (γ — вещественное) мы можем пронормировать функцию $\omega(z)$ так, что $\theta(0)=0$. Таким образом, можно считать, что при $\omega(x)=s(x)+it(x)$ $t(0)=0$ и $s(0)\neq 0$.

ТЕОРЕМА 14. *Пусть $\omega(x)=s(x)+it(x)$ — функция класса P_σ $(\sigma\geqslant 0)$, не имеющая вещественных корней и отличная от полинома степени $\leqslant n$. Тогда из всех вещественных целых функций конечной степени $\tau\leqslant\sigma$ и вида*

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots \quad (n\geqslant 1) \quad (4.15)$$

единственной, дающей наименьшее отклонение на всей оси функции

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\sqrt{s^2(x)+t^2(x)}}, \quad (4.16)$$

является функция

$$f_0(x)=n!\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\}. \quad (4.17)$$

Доказательство. Очевидно отклонение от нуля функции $\frac{f_0(x)}{|\omega(x)|}$ равно $L_n=\frac{n!}{|\omega^{(n)}(0)|}$. Если некоторая функция $f(x)$ вида (4.15) удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leqslant \frac{n!}{|\omega^{(n)}(0)|}\,|\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty),$$

то, по лемме 3, функция

$$\chi(z) = f(z) - \frac{n!}{\omega^{(n)}(0)}\,\omega(z)$$

принадлежит классу P и не имеет кратных вещественных корней. Последнее следует из того, что, в силу условия теоремы, $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\}$ не имеет кратных корней *. Кроме того, $\chi^{(n)}(0) = 0$. Так как $\omega(x)$ не есть полином степени $\leqslant n$, то $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega^{(n)}(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\} \not\equiv 0$ и, следовательно, невозможно тождество $\chi^{(n)}(z) \equiv 0$. Из леммы 4 мы без труда получим, что

$$f(x) = n! \operatorname{Re}\left\{e^{i\gamma}\frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)}\right\}$$

и, так как $f^{(n)}(0) = n!$, то $\gamma = 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если считать $n = 0$, т. е. зафиксировать свободный член в разложении

$$f(x) = 1 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots,$$

то, очевидно, функция

$$f_0(x) = \operatorname{Re}\left\{\frac{\omega(x)}{\omega(0)}\right\}$$

будет давать наименьшее отклонение $L_0 = \frac{1}{|\omega(0)|}$.

Однако в этом случае нельзя утверждать единственности экстремальной функции **.

Заметим также, что к этому случаю можно свести случай

$$\omega(x) = P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + x^n.$$

Достаточно вместо полиномов $\omega(x)$ и $f(x)$ рассмотреть полиномы $x^n\omega\left(\frac{1}{x}\right)$ и $x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть* $\omega(x) = s(x) + it(x)$ — *функция класса* P_σ $(\sigma \geqslant 0)$ *без вещественных корней, не равная функции* $ce^{\pm\sigma x}$ *и полиному* $P_{n+1}(x)$***.

---

* Если $\operatorname{Im}\frac{\omega(x)}{\omega^{(n)}(0)} \equiv 0$, то $\omega(x) = ce^{\pm\sigma x}$. В этом случае функция $e^{\pm\sigma x} f(x)$ — ограниченная, конечной степени $\Delta \geqslant 0$. Так как индикаторная диаграмма этой функции есть отрезок мнимой оси, то степень функции $f(x)$ $\tau = \sqrt{\Delta^2 + \sigma^2} \leqslant \sigma$ и, следовательно, $\Delta = 0$. Но ограниченная функция нулевой степени есть константа. Итак, в этом случае $f(x) = c_1 e^{\pm\sigma x}$ и решение дается формулой (4.17).

** Например, при $\omega(x) = e^{ix}$ все функции $f(x) = \cos\lambda x$ $(|\lambda| \leqslant 1)$ дают наименьшее отклонение, равное $f(0) = 1$, и разложение их начинается членами $f(x) = 1 + 0\cdot x + \cdots$.

*** При $\omega(x) = P_{n-1}(x)$ отношение $\frac{f(x)}{\omega(x)}$, где $f(x)$ дается формулой (4.18), не может быть ограниченным.

Тогда из всех вещественных функций конечной степени $\tau \leqslant \sigma$ *вида*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a x^n + b x^{n+1} + \\ + a_{n+2} x^{n+2} + \cdots \quad (n \geqslant 1), \tag{4.18}$$

где a *и* b *фиксированы, единственной, дающей наименьшее отклонение на всей оси функции*

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{s^2(x) + t^2(x)}}, \tag{4.19}$$

является функция

$$f_1(x) = As(x) + Bt(x), \tag{4.20}$$

где A *и* B *выбраны так, что* $f_1(x)$ *имеет вид* (4.18).

Доказательство. Покажем прежде всего, что можно выбрать постоянные A и B так, чтобы $f(x)$ имела вид (4.18). Если $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega^{(n+1)}(0)}{\omega^{(n)}(0)}\right\} = 0$, то, по замечанию 2 к теореме 5, $\omega^{(n)}(x)$ — вещественная функция. Если она не имеет корней, то $\omega^{(n)}(x) = ce^{kx}$ (k — вещественное). Равенство $k = 0$ невозможно, ибо в этом случае $\omega(x) = P_n(x)$. При $k \neq 0$ имеем

$$\omega(x) = \frac{c}{k^n} e^{kx} + P_{n-1}(x)$$

и если $P_{n-1}(x) \not\equiv 0$, то $\omega(z)$ имеет корни в обеих полуплоскостях. Но равенство $\omega(x) = c_1 e^{kx}$ противоречит условию теоремы и, следовательно, $\omega^{(n)}(x)$ имеет вещественные корни. По замечанию 2 к теореме 5, это невозможно, если $\omega(x)$ не имеет вещественных корней. Итак, $\operatorname{Im}\left\{\frac{\omega^{(n+1)}(0)}{\omega^{(n)}(0)}\right\} \neq 0$ или

$$s^{(n+1)}(0)\ t^{(n)}(0) - t^{(n+1)}(0)\, s^n(0) \neq 0$$

и существует единственное решение системы

$$As^{(n)}(0) + Bt^{(n)}(0) = n!a, \quad As^{(n+1)}(0) + Bt^{(n+1)}(0) = (n+1)!\, b.$$

Пусть функция $f(x)$ вида (4.18) удовлетворяет на всей оси неравенству

$$|f(x)| \leqslant \sup_{-\infty<x<\infty} |f_1(x)|,$$

где $f_1(x)$ определено равенством (4.20). Тогда функция

$$\chi(x) = f(x) - (A - iB)\,\omega(x)$$

принадлежит классу P, причем

$$\vartheta(x) = \operatorname{Re}\{\chi(x)\} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n+2} x^{n+2} + \cdots. \tag{4.21}$$

По теореме 1, если $\vartheta(x) \not\equiv 0$, то все корни функции $\vartheta(x)$, а следовательно, и все корни полинома

$$P_m^{\vartheta}(x) = c_0 + c_1 x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) c_2 x^2 \cdots + + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdots \left(1 - \frac{m-1}{m}\right) c_m x^m$$

вещественны (см. замечание 2 к лемме 5). С другой стороны, по теореме Лагерра, полином, у которого равны нулю два последовательных

коэффициента (кроме первых или последних двух) должен иметь невещественные корни* и, следовательно, либо $c_{n+q}=0\ (q=2, 3, \ldots)$, либо $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$. Первый случай невозможен, ибо тогда

$$\operatorname{Im}\{(A-iB)\,\omega(x)\}=\operatorname{Im}\chi(x)=P_{n+1}(x)$$

и функция $\omega(x)$ — полином со степенью, не превосходящей $n+1$. Если же $c_0=c_1=\cdots=c_{n-1}=0$, то функция $\vartheta(x)$ имеет в нуле корень не ниже третьей кратности, следовательно, $\operatorname{Im}\{(A-iB)\,\omega(x)\}$ имеет в нуле кратный корень, что невозможно, так как $\omega(x)$ не имеет вещественных корней. Итак,

$$f(x)=\operatorname{Re}\{(A-iB)\,\omega(x)\}.$$

Теорема доказана. Теоремы 14 и 15 являются обобщением теорем С. Н. Бернштейна [см. ([4]), гл. III, теоремы I и II § 1 и теоремы II и II bis § 9].

Приведем еще пример на применение теоремы 1 и леммы 3.

Пусть $\omega(x)=s(x)+it(x)\in P_\sigma$ и $f(x)$ — целая функция конечной степени $\tau<\sigma$; тогда, если $f(x)\not\equiv 0$, то

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{f(x)+Ms(x)}{\omega(x)}\right|>M. \tag{4.22}$$

В самом деле, в противном случае мы имели бы

$$f(x)-iMt(x)\in P$$

и, по условию B) теоремы 1, индикаторные диаграммы $f(z)$ и $t(z)$ должны совпадать; с другой стороны, по замечанию к теореме 1, степень функции $t(z)$ не меньше $\sigma>\tau$. Итак, должно выполняться (4.22).

Дополнение

Функцию $\omega(z)$ класса P_σ мы назовем *P-мажорантой* функции $f(z)$ конечной степени τ, если $\sigma\geqslant\tau$ и

$$|f(x)|\leqslant|\omega(x)|\quad(-\infty<x<\infty). \tag{5.00}$$

Найдем необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы она имела P-мажоранту.

Пусть $\omega(z)$ есть P-мажоранта функции $f(z)$. Применяя лемму 1 к функциям

$$\psi(z)=\frac{f(z)}{\omega(z)}\ \text{ и }\ \psi_1(z)=\frac{f(z)}{\bar{\omega}(z)},$$

в верхней и нижней полуплоскости получим

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\right|<\infty, \tag{5.01}$$

где α_k — все корни функции $f(z)$.

---

* В самом деле, если у полинома $P(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\ (b_n=b_{n+1}=\ldots=b_{n+q}=0)$ все корни вещественны, то полиномы $P^{(n-1)}(x)$ и $\left[x^{m-n+1}P^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(m-n-q)}$ должны, по теореме Ролля, иметь вещественные корни. Но это невозможно, так как последний полином двучленный и не ниже третьей степени.

Легко видеть, что условие (5.01) является также и достаточным для того, чтобы функция

$$f(z) = ce^{(a+ib)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}} \tag{5.02}$$

имела P-мажоранту. В самом деле, в этом случае за функцию $\omega(z)$ можно принять

$$\omega(z) = ce^{(a+ip)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) e^{\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\beta_k}\right) z}, \tag{5.03}$$

где $\beta_k = \alpha_k$ при $\operatorname{Im} \alpha_k \geqslant 0$ и $\beta_k = \bar{\alpha}_k$ при $\operatorname{Im} \alpha_k < 0$, а $p > 0$ и настолько велико, что степень $\omega(z)$ больше или равна степени $f(z)$. Согласно следствию 5 § 1, дефект $d_\omega = p > 0$ и, следовательно, $\omega(z)$ есть функция класса P. Кроме того,

$$|f(x)| = |\omega(x)| \quad (-\infty < x < \infty).$$

Легко получить, используя лемму [2, что индикаторные диаграммы функций $f(z)$ и $\omega(z)$ — равные выпуклые множества, сдвинутые друг относительно друга в направлении мнимой оси. Выбором числа $p \geqslant 0$ можно добиться того, чтобы они совпали или получались друг из друга отражением в вещественной оси. Такую мажоранту $\omega(z)$ естественно назвать «наилучшей». Нетрудно показать, что наилучшая P-мажоранта данной функции $f(z)$ определяется с точностью до постоянного множителя $e^{i\gamma}$.

Установленный нами критерий (5.01) эквивалентен следующему:

ТЕОРЕМА 16. *Для того чтобы целая функция конечной степени $f(z)$ имела P-мажоранту, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left| \int_0^r \ln |f(x) f(-x)| \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{r^2}\right) dx \right| < M_f \quad (1 < r < \infty), \tag{5.10}$$

где M_f не зависит от r. *

Доказательство. Докажем сначала, что для всякой функции $f(z)$ конечной степени верно

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |f(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta = O(1). \tag{5.11}$$

Для этого представим функцию $f(z)$ в виде произведения

$$f(z) = \Phi_1(z) \cdot \Phi_2(z) \cdot \Phi_3(z), \tag{5.12}$$

---

* Это условие можно заменить также следующим:

$$\left| \int_{-r}^{2} \frac{\ln |f(x)|}{1 + x^2} \, dx \right| < N_f \quad (0 < r < \infty),$$

где N_f не зависит от r. Эквивалентность (5.01) и (5.10) была недавно доказана Н. И. Ахиезером [18] в связи с другим вопросом.

где

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z) &= c \cdot \exp\Big(a + ib + \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} \frac{1}{\alpha_k}\Big) z, \\ \Phi_2(z) &= \prod_{|\alpha_k| \leqslant r} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big), \\ \Phi_3(z) &= \prod_{|\alpha_k| > r} \Big(1 - \frac{z}{\alpha_k}\Big) e^{\frac{z}{\alpha_k}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.13}$$

Имеем

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\Phi_1(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \Big| a + ib + \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} \frac{1}{\alpha_k} \Big| \sin\theta_r, \tag{5.14}$$

причем величина, стоящая в правой части равенства, как легко видеть из теоремы Линделёфа, ограничена.

Далее,

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\Phi_2(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi r} \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} \ln \frac{r}{|\alpha_k|} + \frac{O(1)}{r} \sum_{|\alpha_k| \leqslant r} \frac{|\alpha_k|}{r} \tag{5.15}$$

или

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\Phi_2(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi r} \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt + \frac{O(1)}{r^2} \int_0^r t \, dn(t). \tag{5.16}$$

Из того, что $\frac{n(t)}{t}$ ограничено, легко следует ограниченность всей величины, стоящей в правой части равенства. Наконец,

$$\left| \frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\Phi_2(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi r} \sum_{|\alpha_k| > r} \sum_{p=2}^{\infty} \Big(- \frac{r^p}{p |\alpha_k|^p} \int_0^\pi \cos p(\theta - \theta_r) \sin\theta d\theta \Big)$$

или при некоторой независящей от r постоянной c

$$\frac{1}{\pi r} \int_0^\pi \ln |\Phi_3(re^{i\theta})| \sin\theta \, d\theta < c \sum_{|\alpha_k| > r} \frac{r}{|\alpha_k|^2} = cr \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^2}. \tag{5.17}$$

Интегрируя по частям, убеждаемся, что и эта величина ограничена. Итак, (5.11) верно.

На основании этого, мы из формулы Карлемана (1.11) получаем, что условия (5.10) и (5.01) эквивалентны. Теорема доказана.

Определение.* По С. Н. Бернштейну, функция $H(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$ называется *майорантой квазиконечного роста* $\varphi(\tau)$, если существует такая последовательность функций $H_{k,\tau}(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty, k = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющая условию

* Это определение дано С. Н. Бернштейном в ([20]). Определение майоранты конечного роста дано в ([19]).

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{H_{k,\tau}(x)} \leqslant \varphi(\tau), \tag{5.18}$$

что, как только функция $f(x)$ степени τ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)| \leqslant H(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{5.19}$$

все ее производные $f^{(k)}(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant H_{k,\tau}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5.20}$$

Если $\varphi(\tau) = \tau$, то майоранта $H(x)$ называется *майорантой конечного роста*. Функции, допускающие такие майоранты, называются, соответственно, функциями конечного или квазиконечного роста.

Из теорем 4 и 5, очевидно, следует, что функция, допускающая P-мажоранту, есть функция конечного роста. Однако можно утверждать больше, именно

ТЕОРЕМА 17. *Классы функций конечной степени конечного роста и квазиконечного роста совпадают между собою и совпадают с классом функций, имеющих P-мажоранту.*

Доказательство. Очевидно следует только доказать, что всякая функция квазиконечного роста имеет P-мажоранту

Заметим прежде всего, что если $H(x)$ есть майоранта квазиконечного роста, то из неравенства

$$|f(x)| \leqslant H(x),$$

где $f(z)$ — целая функция конечной степени τ, следует

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant H^*(r), \tag{5.21}$$

где

$$H^*(r) = \sum_{k=0}^{\infty} |H_{k,\tau}(0)| \frac{r^k}{k!}. \tag{5.22}$$

Заметим также, что из (5.18) следует

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln H(r)}{r} \leqslant \varphi(\tau) < \infty. \tag{5.23}$$

Пусть $f(z)$ — функция конечной степени τ,

$$f(z) = ce^{(a+ib)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{5.24}$$

не имеющая P-мажоранты и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\alpha_k} \right| = \infty. \tag{5.25}$$

Покажем, что она не имеет также никакой майоранты квазиконечного роста. Для этого достаточно показать, что какова бы ни была функция $H^*(r)$, удовлетворяющая условию (5.23), можно указать целую функцию $\Phi(z)$ степени τ, имеющую на вещественной оси тот же модуль, что и функция $f(x)$ и такую, что в некоторой точке z_0 комплексной плоскости

$$|\Phi(z_0)| > H^*(|z_0|).$$

Построим сначала функцию

$$F(z) = ce^{(a+ib)z} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\beta_k}\right) e^{\frac{z}{\beta_k}}, \tag{5.26}$$

где $\beta_k = \alpha_k$ при $\operatorname{Im}\alpha_k \geqslant 0$ и $\beta_k = \bar{\alpha}_k$ при $\operatorname{Im}\alpha_k < 0$. Из (5.25) следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\left|\sum_{|\beta_k|\leqslant r}\frac{1}{\beta_k}\right| = \infty. \tag{5.27}$$

Кроме того, так как $f(z)$ — функция конечной степени и $|\beta_k| = |\alpha_k|$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{n(r)}{r} < \infty, \tag{5.28}$$

где $n(r)$ — число точек α_k, удовлетворяющих неравенству $|\alpha_k| < r$. По известной теореме Линделёфа, из (5.27) и (5.28) следует, что $F(z)$ — функция первого порядка и максимального типа. Таким образом,

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}}\,\frac{\ln|F(z)|}{|z|} = \infty, \tag{5.29}$$

и какова бы ни была функция $H^*(r)$, удовлетворяющая неравенству (5.23), найдется точка z_0, в которой

$$|F(z_0)| > 2H^*(|z_0|). \tag{5.30}$$

Легко получить, если использовать известную оценку для примарного множителя:

$$|\ln(1-u)+u| < c\,|u|^2 \qquad (c \text{ — постоянная}),$$

что при произвольном $\varepsilon > 0$ и достаточно большом η_ε имеет место неравенство:

$$\left|\ln\left|\prod_{k=M_\varepsilon+1}^{\infty}\left(1-\frac{z_0}{\gamma_k}\right)e^{\frac{z_0}{\gamma_k}}\right|\right| < \varepsilon, \tag{5.31}$$

где $\gamma_k = \beta_k$ или $\bar{\beta}_k$. Выберем $\varepsilon < \frac{1}{2}\ln 2$ и число $\eta > 0$ настолько малым, что

$$|\eta z_0| < \varepsilon; \tag{5.32}$$

выберем γ_k так, чтобы

$$\left|\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k} - \sum_{k=1}^{M_\varepsilon}\operatorname{Im}\frac{1}{\beta_k} - \sum_{k=M_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon}\operatorname{Im}\frac{1}{\gamma_k}\right| < \eta. \tag{5.33}$$

Последний выбор возможен, в силу условий (5.25) и $\operatorname{Im}\frac{1}{\alpha_k}\to 0$.

Построим функцию

$$\psi_\varepsilon(z) = ce^{(a+id)z}\prod_{k=1}^{M_\varepsilon}\left(1-\frac{z}{\beta_k}\right)e^{\frac{z}{\beta_k}}\prod_{k=M_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon}\left(1-\frac{z}{\gamma_k}\right)e^{\frac{z}{\gamma_k}}\prod_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha_k}\right)e^{\frac{z}{\alpha_k}}, \tag{5.34}$$

где

$$d = b + \sum_{k=1}^{M_\varepsilon}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\beta_k}\right) + \sum_{k=M_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon}\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\gamma_k}\right).$$

Эта функция отличается от функции $f(z)$ лишь множителем, который является рациональной функцией и, следовательно, $\psi_\varepsilon(z)$ имеет тот же рост, что и $f(z)$. Очевидно также, что

$$|f(x)| = |\psi_\varepsilon(x)|.$$

Кроме того, как это видно из неравенств (5.30), (5.31), (5.32) и (5.33), в точке z_0

$$|\psi_\varepsilon(z_0)| > H^*(|z_0|).$$

Теорема доказана.

Поступило
9. III. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Polya G., Über Lücken und Singularitäten von Potentzreihen, Math. Zeitschr. 29 (1929), 549—640.

[2] Гельфонд А. О., Проблема представления и единственности целой аналитической функции первого порядка, Успехи мат. наук, вып. III (1937), 144—174.

[3] Бернштейн С. Н., Leçons sur les propriétés extremales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle, Paris, 1926.

[4] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Москва, 1937.

[5] Ахиезер Н. И., О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 411—428.

[6] Левин Б. Я., О критерии Эрмита для целых функций экспоненциального типа, Доклады Ак. Наук СССР, XLI, № 2 (1943), 50—54; Доклады Ак. Наук СССР, XLI, № 3 (1943), 103—104.

[7] Чеботарев Н. Г., К проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций, Доклады Ак. Наук СССР, XXXIII, № 9 (1941), 483—486; О целых функциях с вещественными перемежающимися корнями, Доклады Ак. Наук СССР XXXV, № 7 (1942), 219—222; Об одном видоизменении постановки задачи Гурвица, Доклады Ак. Наук СССР, XXXV, № 8 (1942), 251—254.

[8] Понтрягин Л. С., О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 6 (1942), 115—134.

[9] Мейман Н. Н., К проблеме Эрмита—Гурвица для целых трансцендентных функций, Доклады Ак. Наук СССР, XL, № 2 (1943), 55—58.

[10] Мейман Н. Н. К вопросу о распределении нулей целой функции, Доклады Ак. Наук. СССР, XL, № 5 (1943), 200—202; Оценка расстояния между соседними нулями для одного класса целых функций, Доклады Ак. Наук СССР, LIII, № 1 (1946), 11—14; Об одном классе целых функций, Доклады Ак. Наук СССР, LXII, № 3 (1948), 293—296.

[11] Стечкин С. Б., Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 9 (1948), 1511—1518.

[12] Никольский С., Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 9 (1948), 1607—1510.

[13] Бернштейн С. Н., Распространение неравенства С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 9 (1948), 1487—1490.

[14] Левин Б. Я., О некоторых экстремальных свойствах целых функций конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР, LXV (1949), 605—608;

[15] Levinson N., Gap and density theorems, N. Y. City, Amer. Math. Soc., 1940.

[16] Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, ГОНТИ УССР, 1938 г.

[17] Polya G. u. Schur J., Über zwei Arten von Faktorenfolgen, Journ. für die reine und angew. Math. 144 (1914), 89—113.

[18] Ахиезер Н. И., К теории целых функций конечной степени, Доклады Ак. Наук СССР LXIII, № 5 (1948), 475—478.

[19] Бернштейн С. Н., О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных, Доклады Ак. Наук СССР, LX, № 6 (1948), 949—952.

[20] Бернштейн С. Н., О майорантах конечного или квазиконечного роста. Доклады Ак. Наук СССР, LXV, № 2 (1949), 117—120.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 85—94

А. Ф. ТИМАН

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе решается вопрос о необходимых и достаточных условиях сходимости при одном методе приближения непрерывных функций, который зависит от произвольной последовательности $\{\alpha_n\}$ и обобщает некоторые известные методы суммирования рядов Фурье. Получены также асимптотические оценки констант Лебега соответствующих методов суммирования рядов Фурье и интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами.

§ 1

1. Пусть $\tilde{C}$ обозначает класс непрерывных периода 2π функций и

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \tag{1.1}$$

— сумма Фурье порядка n функции $f \in C$.

Пусть, далее, $\{\alpha_n\}$ есть произвольная последовательность, зависящая от $n = 1, 2, 3 \ldots$, и положим

$$\omega_n(\alpha_n; f, x) = \frac{1}{2} \{S_n(f, x) + S_n(f, x + \alpha_n)\}. \tag{1.2}$$

Некоторые частные случаи тригонометрических сумм такого типа ранее изучались в работах ([1]), ([3]), ([4]).

Так, при $\alpha_n = \frac{2\pi}{2n+1}$ суммы (1.2) представляют собой тригонометрические полиномы С. Н. Бернштейна ([1]), о которых известно, что $\omega_n\left(\frac{2\pi}{2n+1}; f, x\right)$ при $n \to \infty$ равномерно стремится к $f(x)$, какова бы ни была $f(x) \in \tilde{C}$.

В работе Рогозинского ([3]) полиномы (1.2)* исследуются для случая $\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1}$, где k есть фиксированное целое нечетное число.

---

* В работе Рогозинского полиномы (1.2) рассматриваются в виде

$$\omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1};\ f, x - \frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Легко видеть, что сходимость сумм $\omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1};\ f, x - \frac{k\pi}{2n+1}\right)$ равносильна сходимости $\omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}; f, x\right)$.

Там же в этом случае устанавливается справедливость соотношения $\omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1}; f, x\right) \to f(x)$ для любой функции $f \in \tilde{C}$.

При целом p $\omega_n(2p\pi; f, x)$ есть сумма первых n членов ряда Фурье.

Случай, когда $\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1}$, где $k = k(n)$ есть произвольная целочисленная функция от $n = 1, 2, 3\ldots$, исследовался автором в работе ([4]).

В настоящей статье решается следующая, представляющая известный интерес, задача:

Каковы необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность $\{\alpha_n\}$, чтобы тригонометрические полиномы (1.2) равномерно стремились к функции $f(x)$ для всех $f \in \tilde{C}$?

Нетрудно заметить, что, не ограничивая общности задачи, можно считать $|\alpha_n| \leqslant \pi$.

ТЕОРЕМА I. *Для того чтобы имело место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n(\alpha_n; f, x) = f(x) \tag{1.3}$$

равномерно относительно x для любой функции $f(x)$ из $\tilde{C}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \tag{1.4}$$

где $k = k(n)$ есть целочисленная функция от $n = 1, 2, 3\ldots$, принимающая лишь конечное число нечетных значений, а $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и k.

Настоящая теорема является обобщением теоремы 1 работы автора ([4]).

2. Легко видеть, что $\omega_n(\alpha_n; f, x)$ есть линейный оператор (при фиксированном x—линейный функционал) в пространстве $\tilde{C}$, где норма f определяется как $\sup_x |f(x)|$. При этом, пользуясь известным выражением для суммы первых n членов ряда Фурье, нетрудно установить, что норма $L_n(\alpha_n)$ этого оператора определяется соотношением

$$L_n(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(2n+1)u}{\sin u} + \frac{\sin(2n+1)\left(u + \frac{\alpha_n}{2}\right)}{\sin\left(u + \frac{\alpha_n}{2}\right)} \right| du. \tag{1.5}$$

В ([5]) нами доказана

ТЕОРЕМА II. *Пусть $|\alpha_n| \leqslant \pi$. Тогда имеет место следующее асимптотическое равенство:*

$$L_n(\alpha_n) = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1 + |n\alpha_n|}{\left\{|\alpha_n| + \frac{1}{n}\right\}^{\left|\cos\frac{2n+1}{4}\alpha_n\right|}} + O(1), \tag{1.6}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно α_n и n.

Пользуясь теоремой II и известным предложением Банаха о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами

в полном линейном нормированном пространстве ([2]), нетрудно установить теорему I. В самом деле, так как $|\alpha_n| \leqslant \pi$, то α_n всегда может быть представлено в форме

$$\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1} + 2\varepsilon_n,$$

где $k = k(n)$ есть ближайшее к числу $\frac{(2n+1)\alpha_n}{2\pi}$ целое нечетное число, удовлетворяющее неравенству $|k| \leqslant n+1$ и $|\varepsilon_n| \leqslant \frac{\pi}{2n+1}$. Если бы $\alpha_n \neq O\left(\frac{1}{n}\right)$, то существовала бы последовательность целых положительных чисел n_i, для которой

$$\frac{1}{n_i \alpha_{n_i}} = o(1).$$

Согласно (1.6), в этом случае последовательность норм $L_n(\alpha_n)$ линейного оператора $\omega_n(\alpha_n; f, x)$ оказывается неограниченной и поэтому, силу известной теоремы о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами, найдется непрерывная функция $f(x)$, для которой суммы (1.2) расходятся.

Далее, если окажется, что для некоторой последовательности $\{n_i\}$

$$\frac{1}{\varepsilon_{n_i}} = o(n_i \ln n_i), \tag{1.7}$$

то

$$L_{n_i}(\alpha_{n_i}) > \frac{4}{\pi^2}\left|\cos\frac{2n_i+1}{4}\alpha_{n_i}\right|\ln n_i + O(1) =$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\left|\sin\frac{2n_i+1}{2}\varepsilon_{n_i}\right|\ln n_i + O(1).$$

В силу имеющего место для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ неравенства

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

получим, что в данном случае

$$L_{n_i}(\alpha_{n_i}) > \frac{8}{\pi^3}|\varepsilon_{n_i}| n_i \ln n_i + O(1),$$

т. е. последовательность чисел $L_{n_i}(\alpha_{n_i})$, вследствие (1.7), неограничена, а отсюда, в силу упомянутой выше теоремы Банаха, следует существование непрерывной функции $f(x)$, для которой последовательность тригонометрических полиномов (1.2) расходится.

Пусть условия теоремы I выполнены. Тогда, согласно (1.4),

$$\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$

где $k = k(n)$ есть целочисленная функция от $n = 1, 2, 3, \ldots$, принимающая лишь конечное число нечетных значений. Рассмотрим разность

$$\omega_n(\alpha;\, f,\, x) - \omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1};\, f,\, x\right) = \frac{1}{2}\left\{S_n(f,\, x+\alpha_n) - S_n\left(f,\, x+\frac{2k\pi}{2n+1}\right)\right\}, \tag{1.8}$$

в которой k есть целочисленная функция, входящая в выражение для α_n.

Из (1.8) непосредственно получаем

$$\omega_n(\alpha_n;\, f,\, x) - \omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1};\, f,\, x\right) = \varepsilon_n S_n'\left[f,\, x+\theta_n^{(k)}(x)\,\varepsilon_n\right],$$

где $0 \leqslant \theta_n^{(k)}(x) \leqslant 2$.

Известно (²), что для функций рассматриваемого класса имеет место равенство

$$S_n(f,\, x) = o(\ln n). \tag{1.9}$$

Поэтому, в силу неравенства С. Н. Бернштейна, для модуля производной тригонометрического полинома получим, что

$$\omega_n(\alpha_n;\, f,\, x) - \omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1};\, f,\, x\right) = \varepsilon_n \cdot o(n \ln n) = o(1).$$

С другой стороны, известно (⁴), что при $k = k(n)$, удовлетворяющей условиям теоремы,

$$\omega_n\left(\frac{2k\pi}{2n+1};\, f,\, x\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

равномерно относительно x для любой непрерывной периода 2π функции. Поэтому последовательность сумм (1.2) также равномерно сходится для всех $f \in \tilde{C}$.

§ 2

Кроме сумм (1.2), мы также рассматриваем соответствующие им интерполяционные тригонометрические полиномы с равноотстоящими узлами. Пусть

$$S_n^{(n)}(f,\, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\left(a_\nu^{(n)} \cos \nu x + b_\nu^{(n)} \sin \nu x\right)$$

есть интерполяционный тригонометрический полином функции $f(x)$ из $\tilde{C}$ порядка n с $2n+1$ равноотстоящими узлами

$$x_\nu^{(n)} = \frac{2\nu\pi}{2n+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n),$$

где

$$a_\nu^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \cos \nu x_i^{(n)},$$

$$b_\nu^{(n)} = \frac{2}{2n\;\;1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \sin \nu x_i^{(n)}.$$

Рассмотрим полиномы

$$\bar{\omega}_n(\alpha_n;\, f,\, x) = \frac{1}{2}\{S_n^{(n)}(f,\, x) + S_n^{(n)}(f,\, x+\alpha_n). \tag{2.1}$$

Некоторые частные случаи таких полиномов исследовались в работах ([4]), ([6]).

После того как доказана теорема I, в силу известных уже результатов ([7]), отдельное исследование вопроса о сходимости сумм (2.1) излишне, так как, в силу этих результатов, равномерная сходимость полиномов (1.2) равносильна равномерной сходимости соответствующих им интерполяционных полиномов (2.1).

Однако, несмотря на это, представляет самостоятельный интерес знание асимптотического поведения нормы $\widetilde{L}_n(\alpha_n)$ линейного оператора $\widetilde{\omega}_n(\alpha_n;\ f, x)$.

В силу известного выражения для n-го интерполяционного тригонометрического полинома с равноотстоящими узлами в точках $x_i^{(n)}$

$$S_n^{(n)}(f, x) = \frac{1}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(x_\nu^{(n)}) \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\left(x - x_\nu^{(n)}\right)}{\sin\frac{x - x_\nu^{(n)}}{2}},$$

норма $\widetilde{\omega}_n$

$$\widetilde{L}_n(\alpha_n) = \sup_x \widetilde{L}_n(\alpha_n, x),$$

где

$$\widetilde{L}_n(\alpha_n, x) = \frac{1}{2(2n+1)}\sum_{i=0}^{2n}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\left(x - x_i^{(n)}\right)}{\sin\frac{x - x_i^{(n)}}{2}} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\left(x - x_i^{(n)} + \alpha_n\right)}{\sin\frac{x - x_i^{(n)} + \alpha_n}{2}}\right|. \tag{2.2}$$

ТЕОРЕМА III. *Для* $|\alpha_n| \leqslant \pi$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\widetilde{L}_n(\alpha_n, x) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\{1 + |n\alpha_n|\}^{\frac{1}{2}\left[\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| + \left|\sin\frac{2n+1}{2}(x+\alpha_n)\right|\right]}}{\left\{|\alpha_n| + \frac{1}{n}\right\}^{\left|\sin\frac{2n+1}{2}\left(x+\frac{\alpha_n}{2}\right)\cos\frac{2n+1}{4}\alpha_n\right|}} + O(1), \tag{2.3}$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* n *и* x.

Доказательство. В дальнейшем k и ε_n имеют тот же смысл, что и в § 1.

Пусть $\alpha_n \geqslant 0$. Рассмотрим два существенных случая взаимного расположения точек x и α_n на интервале $(0, 2\pi)$: $x + \alpha_n \leqslant \pi$ и $x + \alpha_n > \pi$. Через s будем обозначать целое число, для которого $x_s^{(n)} \leqslant x < x_{s+1}^{(n)}$.

Первый случай: $x + \alpha_n \leqslant \pi$. В этом случае, согласно (2.2),

$$\widetilde{L}_n(\alpha_n, x) = \frac{1}{2(2n+1)}\left\{\sum_{i=0}^{n+s+k}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x - x_i^{(n)}}{2}} - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x + 2\varepsilon_n)}{\sin\frac{x - x_{i-k}^{(n)} + 2\varepsilon_n}{2}}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=n+s+k+1}^{2n}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x - x_i^{(n)}}{2}} - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x + 2\varepsilon_n)}{\sin\frac{x - x_{i-k}^{(n)} + 2\varepsilon_n}{2}}\right|\right\}.$$

Отсюда после некоторых преобразований во второй сумме, вследствие того что для $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = O(1), \tag{2.4}$$

получим

$$\tilde{L}_n(\alpha_n, x) = \frac{1}{2(2n+1)}\left\{\sum_{i=0}^{n+s+k}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}} - \frac{\sin\frac{2n+1}{1}(x+2\varepsilon_n)}{\frac{x-x_{i-k}^{(n)}}{2}+\varepsilon_n}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=s+k-n}^{-1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\frac{x-x_i^{(n)}}{2}} - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{\frac{x-x_{i-k}^{(n)}}{2}+\varepsilon_n}\right|\right\} + O(1),$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно n и x. Таким образом, если учесть ограниченность отдельных слагаемых в двух последних суммах и воспользоваться (2.4), находим соотношение

$$\tilde{L}_n(\alpha_n, x) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{i=0}^{n+s+1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{s-i} - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{s+k-i}\right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=s+k-n}^{-1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{s-i} - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{s+k-i}\right|\right\} +$$

$$+ \frac{1}{2(2n+1)}\sum_{i=n+s+2}^{n+s+k}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}} - \frac{2n+1}{\pi}\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{s+k-i}\right| + O(1),$$

из которого, после некоторых преобразований, в силу (2.4) следует, что

$$\tilde{L}_n(\alpha_n, x) = \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n-k}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i} - \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{i+k}\right| + \right.$$

$$+ {\sum_{i=1}^{n}}'\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{k-i}\right| +$$

$$\left. + \sum_{i=n-k+1}^{n-1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i} + \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{i+k-2n-1}\right|\right\} + O(1) \tag{2.5}$$

(штрих при $\sum$ обозначает отсутствие члена, соответствующего индексу $i = k$).

Пользуясь применявшимся нами в ([5]) методом и проводя аналогичные рассуждения, мы из (2.5) получим оценку (2.3).

Второй случай: $x+\alpha_n>\pi$. В этом случае, согласно (2.2),

$$\tilde{L}_n(\alpha_n, x)=\frac{1}{2(2n+1)}\left\{\sum_{i=0}^{s+k-n}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}-\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{\sin\frac{x-x_{i-k}^{(n)}+2\varepsilon_n}{2}}\right|+\right.$$

$$+\sum_{i=s+k-n+1}^{s}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}-\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{\sin\frac{x-x_{i-k}^{(n)}+2\varepsilon_n}{2}}\right|+$$

$$\left.+\sum_{i=s}^{2n}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}-\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{\sin\frac{x-x_{i-k}^{(n)}+2\varepsilon_n}{2}}\right|\right\}.$$

Отсюда, после некоторых преобразований, в силу (2.4), можно притти к соотношению

$$\tilde{L}_n(\alpha_n, x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n-k-1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i}-\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{i+k}\right|+$$

$$+\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{i=s}^{s+k+n+1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}-\frac{2n+1}{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{s+k-i}\right|+O(1),$$

из которого после соответствующей замены индексов суммирования, вследствие (2.4), следует, что

$$\tilde{L}_n(\alpha_n, x)=\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n-k-1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i}-\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{i+k}\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n}{}'\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i}+\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{k-i}\right|\right\}+$$

$$+\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{i=s-n}^{s+k-n+1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}+\frac{2n+1}{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{s+k-i-2n-1}\right|+O(1).$$

Если учесть, что

$$\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{i=s-n}^{s+k-n+1}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}+\frac{2n+1}{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{s+k-i-2n-1}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=n-k}^{n}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{i}-\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x+2\varepsilon_n)}{2n-k-i+1}\right|+O(1),$$

то для $\widetilde{L}_n(\alpha_n, x)$ получим выражение, совпадающее с (2.5), а последнее, как мы уже заметили, приводит к доказательству соотношения (2.3).

Пусть $\alpha_n < 0$. Справедливость соотношения (2.3) в этом случае вытекает из равенства

$$\widetilde{L}_n(-\alpha_n, x) = \widetilde{L}_n(\alpha_n, x - 2\varepsilon_n). \tag{2.6}$$

В самом деле,

$$\widetilde{L}_n(-\alpha_n, x) = \frac{1}{2(2n+1)} \sum_{i=0}^{2n} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\left(x - x_i^{(n)}\right)}{\sin \frac{x - x_i^{(n)}}{2}} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\left(x - x_{i+k}^{(n)} - 2\varepsilon_n\right)}{\sin \frac{x - x_{i+k}^{(n)} - 2\varepsilon_n}{2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} \sum_{i=k}^{2n+k} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\left(x - x_{i-k}^{(n)}\right)}{\sin \frac{x - x_{i-k}^{(n)}}{2}} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\left(x - x_i^{(n)} - 2\varepsilon_n\right)}{\sin \frac{x - x_i^{(n)} - 2\varepsilon_n}{2}} \right| =$$

$$= \frac{1}{2(2n+1)} \sum_{i=0}^{2n} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\left(x - 2\varepsilon_n - x_i^{(n)}\right)}{\sin \frac{x - x_i^{(n)} - 2\varepsilon_n}{2}} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\left(x - x_{i-k}^{(n)}\right)}{\sin \frac{x - x_{i-k}^{(n)}}{2}} \right| =$$

$$= \widetilde{L}_n(\alpha_n, x - 2\varepsilon_n).$$

Следовательно, если $\alpha_n \geqslant 0$, то, согласно (2.3),

$$\widetilde{L}_n(-\alpha_n, x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\{1 + |n\alpha_n|\}^{\frac{1}{2}\left[\left|\sin \frac{2n+1}{2} x\right| + \left|\sin \frac{2n+1}{2}(x - \alpha_n)\right|\right]}}{\left\{|\alpha_n| + \frac{1}{n}\right\}^{\left|\sin \frac{2n+1}{2} x - \left(\frac{\alpha_n}{2}\right) \cos \frac{2n+1}{4} \alpha_n\right|}} + O(1). \tag{2.7}$$

Таким образом, теорема III полностью доказана.

§ 3

В этом параграфе теорема I обобщается на случай n-кратных рядов Фурье.

1. В дальнейшем $f(x)$ будет означать непрерывную функцию точки $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-мерного пространства, имеющую по каждой из координат x_i период 2π, и

$$S_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(x) = S_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

— частичную сумму ряда Фурье функции $f(x)$.

Под суммой типа Бернштейна — Рогозинского будем понимать выражение вида

$$\omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(\alpha; x) = \omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(\alpha; x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} S_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}[A_k^{(x)}], \tag{3.1}$$

где $A_k^{(x)}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, 2^n)$ — точки, являющиеся вершинами n-мерного параллелепипеда, построенного на осях нашей системы координат,

перенесенной началом в точку x, и имеющего ребра соответственно длины $\alpha_{\nu_i}^{(i)}$. При этом $\{\alpha_{\nu_i}^{(i)}\}$ ($\nu_i = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots, n$) суть n произвольно заданных последовательностей.

В случае $n = 1$ суммы (3.1) совпадают с полиномами (1.2).

Найдем условия, которым должны удовлетворять последовательности $\{\alpha_{\nu_i}^{(i)}\}$ ($\nu_i = 1, 2, 3, \ldots; i = 1, 2, 3, \ldots, n$) для того, чтобы суммы (3.1) при $\nu_i \to \infty$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) стремились к $f(x)$, какова бы ни была непрерывная, периодическая (по каждой из переменных) функция f.

Пользуясь предыдущими результатами, можно непосредственно установить следующую теорему.

ТЕОРЕМА IV. *Для того чтобы при* $\nu_i \to \infty$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) $\omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(\alpha; x) \to f(x)$, *какова бы ни была непрерывная периодическая функция* $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *необходимо и достаточно одновременное выполнение условий*

$$\alpha_{\nu_i}^{(i)} = \frac{2 p_i \pi}{2\nu_i + 1} + O\left(\frac{1}{\nu_i \ln \nu_i}\right), \tag{3.2}$$

где $p_i = p_i(\nu_i)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) *есть целочисленная функция от* $\nu_i = 1, 2, 3 \ldots$, *принимающая лишь конечное число нечетных значений, а* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* ν_i.

Примечание. Можно рассматривать так называемые симметрические суммы

$$\omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}\left(\alpha; x_1 - \frac{\alpha_{\nu_1}^{(1)}}{2}, x_2 - \frac{\alpha_{\nu_2}^{(2)}}{2}, \ldots, x_n - \frac{\alpha_{\nu_n}^{(n)}}{2}\right).$$

Однако легко видеть, что сходимость этих сумм равносильна сходимости сумм (3.1).

Обозначения. Если $x = x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\varphi_{\nu_i}(t)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) есть n произвольных функций одной переменной, то

$$\varphi_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(x) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{\nu_i}(x_i). \tag{3.3}$$

2. Доказательство теоремы IV. Известно, что суммы

$$S_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(x) = S_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

могут быть представлены в виде

$$S_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\pi^n} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + 2u) \prod_{i=1}^{n} D_{\nu_i}(2u_i)\, du_i, \tag{3.4}$$

где $D_n(t)$ есть ядро Дирихле

$$D_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}. \tag{3.5}$$

В силу этого,

$$\omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(\alpha; x) = \frac{1}{2^{2n}\pi^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{i=1}^{2^n} D_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}[A_i^{(x-u)}]\, du_1\cdots du_n, \tag{3.6}$$

где $u = u(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ есть точка с координатами u_i.

Отсюда между прочим следует, что (3.6) есть линейный оператор в пространстве непрерывных функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и при фиксированном $x(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\|\omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(\alpha; x)\| =$$

$$= \frac{1}{2^n\pi^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdots\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sum_{i=1}^{2^n} D_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}[A_i^{(2u)}]\right| du_1\, du_2\cdots du_n.$$

Но так как

$$L_n(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |D_n(2u) + D_n(2u + \alpha_n)|\, du \tag{3.7}$$

и так как в последней подинтегральной сумме суммирование ведется по всем вершинам параллелепипеда, то

$$\|\omega_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n}(\alpha; x)\| = \prod_{i=1}^{n} L_{\nu_i}(\alpha_{\nu_i}^{(i)}). \tag{3.8}$$

Необходимость условий непосредственно следует из теоремы I.

Достаточность этих условий, в силу (3.8), вытекает из рассуждений, аналогичных соответствующим для случая $n = 1$ [см., например, (4), стр. 271].

Поступило
5. I. 1948

ЛИТЕРАТУРА

1 Bernstein S., Sur un procédé de sommation de séries trigonométriques, Comptes Rendus Ac. Sc., t. 191 (1930), 976—979.

2 Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

3 Rogosinski W., Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, Math. Annalen 95 (1925), 110—134.

4 Тиман А. Ф., Об одном методе приближения непрерывных функций тригонометрическими полиномами, Изв. Ак. Наук СССР, серия математ., т. 11 (1947), 263—282.

5 Тиман А. Ф., О константах Лебега для некоторых методов суммирования, Доклады Ак. Наук СССР, 61, № 6 (1948), 989—992.

6 Харшиладзе Ф., О методе суммирования С. Н. Бернштейна, Математ. сборник, 11 (58) : 1—2 (1942), 121—144.

7 Lozinski S., On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes, Математ. сборник, 14 (56): 3 (1944), 175—263.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 95—100

И. З. РОЗЕНКНОП

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СОВОКУПНОСТИ ЗАМКНУТЫХ ПУТЕЙ В СИСТЕМЕ ИЗ n СОСТОЯНИЙ С ЗАДАННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ МЕЖДУ НИМИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Настоящая заметка содержит доказательство одного свойства системы замкнутых путей в цепи Маркова, сформулированного А. Н. Колмогоровым в качестве гипотезы; оно касается арифметической невырожденности решетки векторов, соответствующих этим замкнутым путям. Вместе с тем обнаруживаются некоторые другие особенности такой системы.

Задача, которую мы будем решать, может быть сформулирована в терминах следующей комбинаторной схемы, соответствующей цепи Маркова с конечным числом состояний.

Пусть имеется n точек $e_1, e_2, \ldots, e_n$, некоторые пары из которых соединены стрелками (e_γ, e_δ). Последовательность $(e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k})$ точек образует *путь*, если в нашей схеме присутствуют все стрелки $(e_{\gamma_{i-1}}, e_{\gamma_i})$, $i = 1, 2, \ldots, k$. В соответствии с этим определением последовательность (e_γ) из одной точки всегда образует путь.

Путь $(e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k})$ называется *циклом*, если в схеме имеется стрелка $(e_{\gamma_k}, e_{\gamma_0})$.

Установим взаимно однозначное соответствие между точками $e_1, \ldots, e_n$ и векторами некоторого базиса n-мерного пространства $R^{(n)}$; вектор, отвечающий точке e_i, будем обозначать также через e_i. Сопоставим пути $(e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k})$ вектор $e_{\gamma_0} + e_{\gamma_1} + \ldots + e_{\gamma_k}$. Координаты $\mu^1, \mu^2, \ldots, \mu^n$ этого вектора по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ суть неотрицательные целые числа, показывающие, сколько раз наш путь проходит через каждую из точек. Векторы, соответствующие циклам нашей системы, называются *циклическими*. Множество их линейных комбинаций с целыми коэффициентами $m = \sum_{i=1}^{k} a^i z_i$ ($a^1, \ldots, a^k$ — целые числа, $z_1, \ldots, z_k$ — циклические векторы) есть некоторая подрешетка Z решетки $Z^{(n)}$, порожденной векторами $e_1, \ldots, e_n$.

Через L обозначим линейное замыкание Z, т. е. множество линейных комбинаций циклических векторов с действительными коэффициентами. Гипотеза, высказанная А. Н. Колмогоровым ([1]), состоит в том, что $Z = Z^{(n)} \cap L$.

Введем некоторые новые определения.

Относительно точки или стрелки будем говорить, что она *существенная*, если она принадлежит хотя бы одному циклу. Две стрелки, имеющие общее начало или общий конец, будем называть *соседними*. *Цепочкой* стрелок назовем всякую их последовательность $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ такую, что для всякого $i = 1, 2, \ldots, k-1$ $\mathfrak{a}_i$ и $\mathfrak{a}_{i+1}$ являются соседними. Про две существенные стрелки $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ будем говорить, что они принадлежат к одному *классу стрелок* K в том и только том случае, если они принадлежат одной цепочке, причем такой, что все стрелки ее являются существенными (впредь только такие цепочки мы и будем рассматривать). Множество всех существенных стрелок нашей системы распадается на классы $K_1, K_2, \ldots, K_s$ так, что каждая стрелка принадлежит одному и только одному из них.

ТЕОРЕМА I. *Если система* П *точек и стрелок, содержащая хотя бы одну стрелку, такова, что для любых двух точек* e_γ *и* e_δ *найдется путь, соединяющий* e_γ *с* e_δ *(условие связности), то*

$$s = n - r + 1,$$

где n — *число точек системы,* r — *максимальное число линейно независимых циклических векторов (размерность пространства* L*),* s — *число классов стрелок.*

Доказательство. Пусть N — число стрелок системы П (из условия связности вытекает, что все они существенные). Занумеруем их в некотором порядке и установим взаимно однозначное соответствие между ними и векторами некоторого базиса N-мерного векторного пространства $R^{(N)}$ подобно тому, как это было прежде сделано для точек. Стрелку $\mathfrak{a}_i$ и вектор, ей соответствующий, будем обозначать одной буквой.

Рассмотрим, далее, совокупность $\mathfrak{F}$ линейных форм $\varphi(\mathfrak{a})$, определенных на пространстве $R^{(N)}$ и обладающих следующими свойствами:

(A_1) $\varphi(\mathfrak{a}_\gamma) = \varphi(\mathfrak{a}_\delta)$, если $\mathfrak{a}_\gamma$ и $\mathfrak{a}_\delta$ принадлежат одному классу стрелок.

(A_2) $\varphi(\mathfrak{a}_N) = 0$.

Легко видеть, что $\mathfrak{F}$ является линейным пространством размерности $s - 1$, где s — число классов стрелок (форма задается значениями на классах, не содержащих стрелку $\mathfrak{a}_N$).

Пусть $\mathfrak{S}$ — совокупность линейных форм $\sigma(x)$, определенных на пространстве $R^{(n)}$ и таких, что:

(B) $\sigma(z) = 0$ для всякого циклического вектора z.

Очевидно, $\mathfrak{S}$ — линейное пространство размерности $n - r$. Покажем, что $\mathfrak{F}$ изоморфно $\mathfrak{S}$.

Значение формы φ на стрелках класса K обозначим через $\varphi(K)$. Всякой форме $\varphi \in \mathfrak{F}$ сопоставим форму $\sigma \in \mathfrak{S}$, положив

$$\sigma(e_i) = \varphi(K_{e_i}^{+}) - \varphi(K_{e_i}^{-}), \tag{1}$$

где $K_{e_i}^{+}$ — класс, содержащий стрелки, выходящие из e_i, а $K_{e_i}^{-}$ — класс, содержащий стрелки, входящие в e_i. Тогда для пути $g = (e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k})$

$$\sigma(g) = \sum_{i=0}^{k} \sigma(e_{\gamma_i}) = \varphi(K^{+}_{e_{\gamma_k}}) - \varphi(K^{-}_{e_{\gamma_0}}),$$

так как

$$K^{+}_{e_{\gamma_i}} = K^{-}_{e_{\gamma_{i+1}}} \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1).$$

В частности, для всякого цикла z $\sigma(z) = 0$, т. е. форма σ удовлетворяет условию (B).

Пусть задана форма $\sigma \in \mathfrak{S}$. Сопоставим ей форму $\varphi \in \mathfrak{F}$: если e_γ — конец стрелки α_N, а e_δ — начало стрелки α, то положим

$$\varphi(\alpha) = \sigma(g_{\gamma,\delta}), \tag{2}$$

где $g_{\gamma,\delta}$ — некоторый путь, соединяющий e_γ с e_δ. Значение $\sigma(g_{\gamma,\delta})$ не зависит от выбора этого пути. Действительно, пусть $g_{\delta,\gamma}$ — некоторый путь, соединяющий e_δ с e_γ (существование такого пути гарантируется условием связности). Тогда для любого пути $g_{\gamma,\delta}$, соединяющего e_γ с e_δ, из условия (B), выполненного для σ, имеем

$$\sigma(g_{\gamma,\delta}) + \sigma(g_{\delta,\gamma}) - \sigma(e_\gamma) - \sigma(e_\delta) = 0.$$

Легко видеть, что форма $\varphi(\alpha)$, определенная формулой (2), имеет одно и то же значение для соседних стрелок и, стало быть, удовлетворяет условию (A_1). Выполнение условия (A_2) следует из того, что вектор, соответствующий пути, соединяющему конец стрелки α_N с ее началом, — циклический.

Отображения $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{S}$, определяемые формулами (1) и (2), линейны и взаимно обратны. Следовательно, $\mathfrak{F}$ изоморфно $\mathfrak{S}$, и их размерности равны, т. е. $s - 1 = n - r$, что и требовалось доказать.

Если в системе П не выполняется условие связности, то можно все ее существенные точки разбить на пересекающиеся классы точек, в каждом из которых условие связности выполнено.*

ТЕОРЕМА Ia. *В произвольной системе точек и стрелок*

$$s + r = n - l + k,$$

где n — число точек системы, l — число несущественных точек, s — число классов стрелок, r — максимальное число линейно независимых циклических векторов, k — число классов существенных точек, в каждом из которых выполняется условие связности.

Доказательство. Так как, очевидно, начало и конец всякой существенной стрелки являются существенными точками, притом принадлежащими одному и тому же классу точек, то любой класс стрелок можно отнести к некоторому классу точек. Для каждого из классов точек справедлива теорема I: $s_i + r_i = n_i + 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{k} s_i + \sum_{i=1}^{k} r_i = \sum_{i=1}^{k} n_i + k.$$

---

* Относительно разбиения точек на классы см. [2] (впрочем, определение существенных точек там несколько отличается от нашего).

Но

$$\sum_{i=1}^{k} s_i = s, \quad \sum_{i=1}^{k} n_i = n - l, \quad \sum_{i=1}^{k} r_i = r,$$

так как подпространство циклических векторов всей системы разлагается в прямую сумму таких подпространств, соответствующих каждому из классов точек. Значит, $s + r = n - l + k$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА IIa. *Если вектор g, отвечающий пути $g = (e_{\gamma_0}, \ldots, e_{\gamma_k})$, все стрелки которого существенные, выражается в виде линейной комбинации (с действительными коэффициентами) циклических векторов, то стрелки, выходящие из e_{γ_k}, и стрелки, входящие в e_{γ_0}, принадлежат к одному классу.*

Доказательство. Очевидно, что все точки $e_{\gamma_0}, \ldots, e_{\gamma_k}$ существенные. Пусть $K^-_{e_{\gamma_0}} \neq K^+_{e_{\gamma_k}}$; положим $\varphi(K^+_{e_{\gamma_k}}) = 1$ и $\varphi(K) = 0$ для любого класса K стрелок, отличного от $K^+_{e_{\gamma_k}}$. Для существенной точки e_i определим $\sigma(e_i)$ формулой

$$\sigma(e_i) = \varphi(K^+_{e_i}) - \varphi(K^-_{e_i}).$$

Для любого пути $h = (e_{\delta_0}, \ldots, e_{\delta_l})$, все стрелки которого существенные,

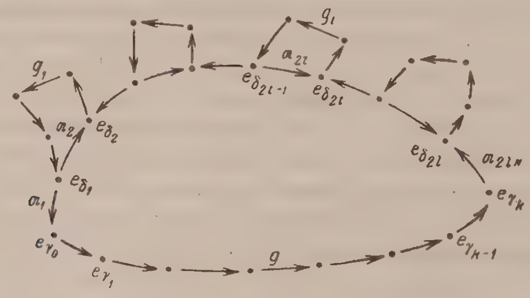
$$\sigma(h) = \varphi(K^+_{e_{\delta_l}}) - \varphi(K^-_{e_{\delta_0}});$$

отсюда вытекает, что для циклических векторов z $\sigma(z) = 0$. Поскольку g — линейная комбинация циклических векторов, то $\sigma(g) = 0$. С другой стороны,

$$\sigma(g) = \varphi(K^+_{e_{\gamma_k}}) - \varphi(K^-_{e_{\gamma_0}}) = 1.$$

Мы пришли к противоречию.

ТЕОРЕМА IIb. *Пусть вектор g соответствует пути $g = (e_{\gamma_0}, \ldots e_{\gamma_k})$. Если стрелки, выходящие из e_{γ_k} и входящие в e_{γ_0}, принадлежат к одному классу стрелок, то вектор g выражается через циклические с целыми коэффициентами.*



Доказательство. Пусть стрелки, входящие в e_{γ_0} и выходящие из e_{γ_k}, принадлежат к одному классу стрелок. т. е. $K^+_{e_{\gamma_k}} = K^-_{e_{\gamma_0}}$. Тогда существует цепочка стрелок, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2l+1}$ такая, что α_1 входит в e_{γ_0}, а α_{2l+1} выходит из e_{γ_k} (легко видеть, что в этом случае число всех

стрелок нечетно). Пусть g_t — путь, соединяющий конец $e_{\delta_{2t}}$ какой-либо четной стрелки a_{2t} с ее началом $e_{\delta_{2t-1}}$ (такой путь найдется, так как стрелки существенные). Рассмотрим цикл, составленный из пути g, путей g_t и нечетных стрелок цепочки:

$$z = (g,\ g_l,\ g_{l-1}, \ldots,\ g_1).$$

Стрелки пути g_t вместе с a_{2t} являются стрелками цикла; следовательно, этому пути соответствует циклический вектор z_t. Вектор z, соответствующий циклу z, поэтому можно записать так:

$$z = g + z_1 + \cdots + z_l,$$

где $z_t\,(t = 1, \ldots, l)$ — циклические векторы. Отсюда

$$g = z - \sum_{t=1}^{l} z_t \in Z.$$

ТЕОРЕМА III. *Всякий целочисленный вектор, линейно выражающийся через циклические (с действительными коэффициентами), может быть представлен в виде их линейной комбинации с целыми коэффициентами* (*т. е.* $Z = Z^{(n)} \cap L$).

Доказательство. Будем проводить индукцию по числу n точек. Для системы, состоящей из одной точки, наше утверждение тривиально. Положим, что теорема доказана для систем, состоящих из $n-1$ точек и докажем ее для системы П из n точек. Если $e_i \in L$, то $e_i \in Z$ — это сразу вытекает из теорем IIa и IIb. Поэтому, если $e_i \in L$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то $Z = Z^{(n)}$, и для этого случая теорема доказана. Остается рассмотреть случай, когда один из векторов e_i не входит в L. Пусть это будет e_n.

Рассмотрим систему П′ такую, что:

1) П′ состоит из точек $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$.

2) Две точки системы П′ e_γ и e_δ соединены стрелкой (e_γ, e_δ) в том и только том случае, если в системе П существует стрелка (e_γ, e_δ) или путь $(e_\gamma, e_n, e_\delta)$. Пусть $g = (e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k})$ — путь системы П. Если в последовательности точек $e_{\gamma_0}, e_{\gamma_1}, \ldots, e_{\gamma_k}$ опустить те члены, у которых индексы равны n, то получится последовательность точек некоторого пути g' из системы П′. Если g — цикл, то g' также цикл. Если $\sum_{i=1}^{n} \mu^i e_i$ — вектор, отвечающий пути g, то пути g' отвечает, очевидно, вектор $\sum_{i=1}^{n-1} \mu^i e_i$. Это соответствие, установленное для векторов, отвечающих путям, распространяется на произвольные векторы: вектору $x = \sum_{i=1}^{n} a^i e_i \in R^{(n)}$ сопоставляется вектор $x' = \sum_{i=1}^{n-1} a^i e_i$. Докажем, что если m и $\widetilde{m} \in L$ и если $m' = \widetilde{m}'$, то $m = \widetilde{m}$. Действительно, пусть

$$m = \sum_{i=1}^{n} \mu^i e_i, \quad \widetilde{m} = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\mu}^i e_i.$$

Тогда

$$m' = \sum_{i=1}^{n-1} \mu^i e_i, \quad \widetilde{m}' = \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{\mu}^i e_i;$$

поскольку $m' = \widetilde{m}'$, то

$$m - \widetilde{m} = (\mu^n - \widetilde{\mu}^n) e_n.$$

Если $\mu^n - \widetilde{\mu}^n \neq 0$, то

$$e_n = \frac{m - \widetilde{m}}{\mu^n - \widetilde{\mu}^n} \in L,$$

что противоречит нашему предположению.

Пусть $m = \sum_{i=1}^{n} \mu^i e_i \in L$, μ^i — целые $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$m' = \sum_{i=1}^{n-1} \mu^i e_i \in L'.$$

Применяя предположение индукции (так как Π' состоит из $n-1$ точек), имеем

$$m' = \sum_{i=1}^{k} q_i u_i,$$

где q_i — целые числа, $u_i \in L'$ — циклические векторы системы Π' $(i = 1, \ldots, k)$. Рассмотрим

$$\widetilde{m} = \sum_{i=1}^{k} q_i z_i,$$

где $z_i \in L$ — циклические векторы системы Π такие, что $z_i' = u_i$. Так как $\widetilde{m} \in Z \subset L$ и $\widetilde{m}' = m'$, то $m = \widetilde{m}$ и, следовательно, $m \in Z$, что и доказывает теорему.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность Е. Б. Дынкину, руководившему моей работой и оказавшему мне большую помощь в оформлении настоящей заметки.

Поступило
28. IX. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Локальная теорема для классических цепей Маркова Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 13 (1949), 284—285.

[2] Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным числом возможных состояний, Бюлл. МГУ I, вып. 3 (1937), 2—3.

ПРИСУЖДЕНИЕ ПРЕМИИ ИМЕНИ П. Л. ЧЕБЫШЕВА 1948 ГОДА

Постановлением Президиума Академии Наук СССР от 5 мая 1949 года премия имени П. Л. Чебышева 1948 года в размере 20000 рублей присуждена члену-корреспонденту Академии Наук УССР Науму Ильичу Ахиезеру за работу «Лекции по теории аппроксимации». Ниже печатаются отзывы об этой работе.

Монография Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации» представляет вклад первостепенного значения в современную конструктивную теорию функций, и нельзя сомневаться в том, что она окажет значительное влияние на дальнейшее развитие этой теории, основоположником и главным вдохновителем которой является П. Л. Чебышев.

Как известно, на основе экстремальных алгебраических проблем, решенных Чебышевым и его ближайшими преемниками, в начале нынешнего столетия удалось установить глубокую связь между дифференциальными свойствами непрерывной функции и ее наилучшими приближениями $E_n(f(x); (a, b))$ при помощи многочленов степени n (в смысле Чебышева) в заданном промежутке (a,b).

В частности, аналитические функции были методологически включены в общую теорию функций вещественной переменной, благодаря характеризующему их свойству наибольшей близости к алгебраическим многочленам, выражающейся тем, что

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \sqrt[n]{E_n f(x)} = \rho < 1. \tag{1}$$

Тогда же были получены одинаковые, по существу, результаты для приближения $E_n^* f(x)$ периодических функций посредством тригонометрических полиномов порядка n. Конструктивным элементом, посредством которого в то время приближали (аппроксимировали) все функции, были преимущественно алгебраический или тригонометрический полиномы; при этом в качестве меры приближения, кроме максимума модуля погрешности, рассматривали также интегральные приближения и, в особенности, среднюю квадратическую погрешность, связанную с классическим аппаратом рядов Фурье, широко используемых при исследовании наилучшего приближения в смысле Чебышева. Значительная часть достижений этого начального периода теории аппроксимаций блестяще была изложена в 1918 году в сыгравшей крупную историческую роль, широко известной монографии Валле-Пуссена «Leçons sur l'approximation des fonctions continues». В книге Н. И. Ахиезера, которая является как бы продолжением упомянутой монографии, мы находим яркую творческую картину современного состояния этой теории, быстро развивающейся в наши дни. Автор книги, начавший свою научную деятельность во второй четверти нынешнего столетия, хорошо известен своими исследованиями по теории аппроксимации, в которых гармоничный синтез идей Чебышева и тонких методов современного анализа часто приводил его к важным и замечательным по своей законченности результатам.

Если в своих первоначальных работах (как и в своих самых последних исследованиях, связанных с целыми функциями конечной степени, которые появлялись после напечатания его книги) автор для решения важных экспериментальных проблем, непосредственно входящих в классическую тематику Чебышева, применяет глубже, чем кто бы то ни был из его предшественников, теорию функций комплексной переменной, то в рассматриваемой монографии Н. И. Ахиезер пользуется, по преимуществу методами, основанными на интегральном преобразовании Фурье, и грамматикой современного функционального анализа, которая

дает ему возможность единообразной компактной формулировки и вывода важных обобщений основных теорем о приближенях в различных метриках (например, теоремы 2 и 3 § 87). При этом нужно подчеркнуть, что язык функционального анализа играет для автора лишь служебную роль и, руководимый конструктивным направлением Чебышева, он нигде не поддается искушению бесцельных обобщений, лишенных ясного конкретного смысла. Не подвергая подробному анализу содержание всей книги Н. И. Ахиезера, о богатстве которого можно составить себе некоторое представление по оглавлению и по примечаниям в конце ее, где первоисточники и важнейшие этапы развития теории указаны с величайшей тщательностью, замечу, что даже при изложении ранее известных фактов, автор сопоставляет и освещает их со своей новой точки зрения, и нет возможности перечислить все творческие детали оригинально нарисованной им грандиозной картины.

В первой главе (вопросы аппроксимации в линейном нормированном пространстве) автор, введя понятия и терминологию функционального анализа, формулирует в самом общем виде проблему наилучшей аппроксимации и устанавливает принципиально важные общие теоремы существования, единственности и полноты, иллюстрируя их на конкретных примерах.

Конструктивные корни теории появляются во второй главе (круг идей П. Л. Чебышева), где на основе вышеупомянутых собственных методов автора и общих теорем первой главы, в новой конденсированной, но доступной форме изложен ряд основных классических результатов Чебышева с дополнениями, принадлежащими главным образом Золотареву и Маркову. Но в план автора (по причинам, о которых будет сказано ниже) не входило подробное рассмотрение проблем алгебраического приближения; поэтому, хотя он и посвятил здесь впервые в монографической литературе несколько интересных параграфов экстремальным алгебраическим проблемам, решенным Чебышевым и Золотаревым при помощи эллиптических функций, однако результатам своих собственных прежних исследований он уделил меньше места, чем они того заслуживают. Правда, в конце книги имеется добавление под заглавием «Различные дополнения и задачи», где автор наметил в сжатом виде решение и исследование ряда экстремальных задач, по той или иной причине не вошедших в основной текст; сюда он и включил некоторую часть ранее решенных им алгебраических экстремальных проблем, как, например, изящное полное решение третьей проблемы Чебышева, выходящей из рамок линейных пространств функциального анализа, которая самим Чебышевым была решена лишь в частных случаях, а также исследование наилучшего приближения на двух отрезках.

Третья глава (элементы гармонического анализа), содержащая единственное в своем роде мастерское целеустремленное изложение новейших достижений теории тригонометрических рядов и интегралов Фурье, прокладывает путь, по которому в следующих двух главах автор придет к намеченной им основной цели максимального уточнения и распространения на приближения при помощи целых функций конечной степени прежних результатов теории наилучших приближений, о которых мы говорили вначале, изложенных в вышеупомянутой монографии Валле-Пуссена.

Дело в том, что к началу второй четверти нашего столетия естественно стала на очередь проблема наилучшего (в смысле Чебышева) приближения любых функций на всей действительной оси при помощи целесообразно подобранных элементарных функций, заменяющих многочлены, которые для этого, вообще, непригодны, а в случае периодических функций заменялись тригонометрическими полиномами. Так как существеннейшая часть известных результатов теории аппроксимации при помощи алгебраических и тригонометрических полиномов вытекала из экстремального свойства этих полиномов, обычно называемого теоремой о максимуме модуля производной, то от нового конструктивного элемента, приближенно представляющего произвольную функцию, необходимо было требовать, чтобы указанная теорема была применима и к нему. Но уже в 1923 году было установлено, что эта теорема справедлива для всех ограниченных целых функций экспоненциального типа

конечной степени и только для них. Вследствие этого и, в особенности, после того как с другой стороны Палей и Винер в 1934 г. связали теорию целых функций конечной степени с интегральным преобразованием Фурье, проблема приближения посредством этих функций или, по терминологии автора, проблема гармонической аппроксимации должна была занять центральное место в конструктивной теории функций.

Четвертая глава (экстремальные свойства целых трансцендентых функций экспоненциального типа) содержит новое доказательство и существенные обобщения, принадлежащие автору, упомянутой теоремы о максимуме модуля производной. Важная теорема Палея — Винера, которая дает интегральное представление для всех функций конечной степени класса L_2, соответствующим образом обобщенная автором, служит здесь, как и в следующей главе, основным орудием исследования, и именно этим обстоятельством объясняется употребляемый автором термин «гармонической аппроксимации».

Кульминационным пунктом является пятая глава (вопросы наилучшей гармонической аппроксимации), в которой единым методом и в наиболее общей законченной форме выведены все известные зависимости между наилучшими приближениями и природой функции. В 1937 году почти одновременно были опубликованы у нас совместная статья Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна, а во Франции — статья Фавара, содержащие замечательное уточнение классического неравенства Джексона, дающее точную верхнюю грань наилучшего возможного приближения $E_n^* f(x)$ для всякой периодической функции (посредством тригонометрических полиномов порядка n), обладающей ограниченной производной данного порядка. Кроме этого результата, полученного сравнительно элементарным путем, применение ядра М. Г. Крейна позволяет автору распространить его на наилучшую гармоническую аппроксмиацию любой функции на всей оси. С другой стороны, в 1938 году Н. И. Ахиезер, применяя метод и результаты своих первых работ, существенным образом уточнил теорему о наилучшем приближении аналитической функции, о которой мы напомнили вначале (формула (1)). Это важное уточнение, естественно, вошло в главу V, но впервые здесь мы находим распространение этого уточнения на наилучшее гармоническое приближение.

Все так называемые обратные неравенства, также отчасти впервые, выведены здесь для гармонической аппроксимации. Следует отметить еще принадлежащий автору вывод, данный в №№ 31—35 Добавления, некоторых формул для наилучшей гармонической аппроксимации аналитических функций с заданными особенностями, доказательство которых до того времени не было опубликовано.

В заключение необходимо обратить внимание на две последние статьи Н. И. Ахиезера, не успевшие войти в его книгу, которые содержат новые важные дополнения к ней: работа под № 62 в списке его работ (ИАН, 1946) и заметка под заглавием «К теории целых функций конечной степени» (ДАН, т. 63, 1948), которая напечатана после составления списка его научных работ. В первой из них автор разрешает экстремальную проблему, существенным образом обобщающую условия применимости теоремы о модуле производной в случае неограниченно возрастающих функций конечной степени, а вторая содержит два новых результата, из которых особенно важно найденное Н. И. Ахиезером необходимое и достаточное условие для того, чтобы неотрицательная при $-\infty < x < \infty$ функция конечной степени p $f(x)$ была представима в виде суммы квадратов двух функций степени $\frac{p}{2}$. Из этого видно, как интенсивно и плодотворно личное творчество автора в одной из наиболее жизненных областей математики, достигшей исключительного расцвета в наши дни.

На основании всего сказанного, я не только считаю книгу Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации» в полной мере заслуживающей премии им. П. Л. Чебышева, но с глубоким удовлетворением рекомендую присудить эту премию ее автору, являющемуся одним из самых талантливых и активных продолжателей направления Чебышева в современном анализе.

Академик *С. Н. Бернштейн*

Н. И. Ахиезер является одним из самых сильных представителей классического анализа среди советских математиков. После основополагающих работ С. Н. Бернштейна работы Н. И. Ахиезера составляют наиболее значительный вклад в направлении уточнения и углубления знаменитых исследований П. Л. Чебышева по наилучшему приближению функций многочленами. Вместе с тем в работах Н. И. Ахиезера (особенно в его работах совместно с М. Г. Крейном) традиции чебышевской школы вошли в плодотворное соприкосновение с более наглядными геометрическими методами современного функционального анализа.

Собственные результаты Н. И. Ахиезера составляют значительную часть содержания пятой главы книги и заканчивающих книгу «различных дополнений и задач», а также в изобилии разбросаны и почти по всем остальным главам.

В пятой главе в центре внимания стоят проблемы точного определения максимум — минимумов отклонений наилучших приближений заданного типа от функций заданного класса. Автору посчастливилось совместно с М. Г. Крейном и параллельно с Фаваром решить первую общую и нетривиальную задачу подобного типа: для равномерных приближений тригонометрическими многочленами периодических функций с ограниченной производной заданного порядка. В § 91 излагаются результаты автора, решающие эту же задачу для различных важных классов аналитических функций, а в § 87 решение аналогичной задачи для заданное число раз дифференцируемых функций в метрике L^p (новое, кроме тривиального случая $p=2$). Весь этот круг результатов является наиболее окончательной современной формой выражения основной идеи С. Н. Бернштейна и Джексона о связи дифференциальных свойств функций со скоростью сходимости к ним наилучших приближений.

Перечисленные выше результаты пятой главы рассматриваются автором как подчиненные более общим теоремам о приближении функций (уже не обязательно периодических) целыми функциями экспоненциального типа. В разработке этой руководящей идеи большого последнего цикла работ С. Н. Бернштейна автору рецензируемой книги принадлежат тоже большие заслуги. Экстремальным свойствам целых функций экспоненциального типа посвящена четвертая глава книги.

В «различные дополнения и задачи» Н. И. Ахиезер отнес ряд собственных результатов более специального характера, иногда выдающихся по глубине и изяществу приемов доказательства, непосредственно примыкающих к исследованиям Чебышева, Маркова и Золотарева. Здесь находится, например, замечательное решение задачи о многочленах, наименее отличающихся от нуля в двух заданных интервалах, исследование рациональной функции заданной степени, апроксимирующей наилучшим образом в двух интервалах две различные константы (§ 26), и т. п. Именно в решении такого рода специальных задач проявлялось тонкое мастерство автора в большинстве его работ более раннего периода.

Мы далеко не исчерпали собственных результатов Н. И. Ахиезера, вошедших в его книгу. Более подробно они освещены в отзыве С. Н. Бернштейна. Вполне присоединяясь к высокой оценке научных достижений Н. И. Ахиезера, данной в этом отзыве, я хочу в заключение сказать несколько слов о достоинствах его книги как образцового произведения математической литературы, соединяющего широту и ясность общего замысла с виртуозностью выполнения деталей. Первые три главы этой книги, имеющие более элементарный характер, требуют от читателя только знания элементов анализа и интеграла Лебега.

В главе первой читатель, интересующийся конкретными задачами классического анализа, лучше всего может познакомиться с элементами теории функциональных пространств. В главе второй ясно и современно изложена нався элементарная чебышевская теория наилучших приближений. Третья глава содержит прекрасное изложение основ теории рядов Фурье и интегралов Фурье. Материал этих глав выбран очень скупо. Но те проблемы, которые сюда включены, решаются исчерпывающим образом, так что читатель сразу получает правильное представление о всей силе и отточенности современных методов исследования.

Я считаю, что книга вполне заслуживает премии имени Чебышева.

Академик *А. Н. Колмогоров*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 105–122

А. П. НОРДЕН

О НОРМАЛИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье излагается теория поверхностей конформного пространства Мебиуса в предположении, что с каждой точкой поверхности связан ортогональный ей круг. При этом на поверхности определяется внутренняя аффинная связность Вейля. Рассмотренные частные случаи приводят к ряду результатов из конформной теории поверхностей и геометрии поверхностей евклидова пространства и пространств постоянной кривизны.

Поверхность трехмерного конформного пространства Мебиуса называется *нормализованной* если через каждую точку M этой поверхности проходит нормализующий круг, ортогональный этой поверхности.

Вводя сокращенные обозначения для пентасферических координат *, предположим, что

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2) \tag{1}$$

есть параметрическое уравнение поверхности.

Обозначая через $\mathbf{ab}$ билинейный ковариант ** двух сфер, будем иметь для всякой точки $\mathbf{x}$

$$\mathbf{xx} = \mathbf{x}^2 = 0.$$

Круг, по которому пересекаются сферы

$$\mathbf{y}_i = \partial_i \mathbf{x} - l_i \mathbf{x}, \tag{2}$$

будет ортогонален поверхности и при соответствующем выборе тензора l_i или *нормализатора* совпадет с нормализующим кругом поверхности.

Чтобы получить местный конформный репер, связанный с точкой поверхности, дополним систему сфер (1) и (2) некоторой сферой $\boldsymbol{\xi}$, которая пересекает нормализующий круг ортогонально в точках $\mathbf{x}$ и $\mathbf{X}$, и, следовательно, касается поверхности. В дальнейшем эта сфера будет играть вспомогательную роль и ее выбор будет определяться соображениями удобства. Связь между введенными точками и сферами выражается следующей таблицей билинейных ковариантов

	$\mathbf{x}$	$\boldsymbol{\xi}$	$\mathbf{X}$	$\mathbf{y}_i$
$\mathbf{x}$	0	0	1	0
$\boldsymbol{\xi}$	0	1	0	0
$\mathbf{X}$	1	0	0	0
$\mathbf{y}_i$	0	0	0	g_{ij}

(3)

* Для этих обозначений мы будем употреблять жирные буквы.

** См. ([1]), стр. 32.

Пользуясь этой таблицей, нетрудно получить разложение производных введенных величин или основные дифференциальные уравнения нормализованной поверхности:

$$\left.\begin{aligned} &\partial_i \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}_i - l_i \boldsymbol{x}, && \text{(I)} \\ &\partial_i \boldsymbol{\xi} = - g^{rs} b_{ri} \boldsymbol{y}_s - m_i \boldsymbol{x}, && \text{(II)} \\ &\partial_i \boldsymbol{X} = g^{rs} p_{ri} \boldsymbol{y}_s + m_i \boldsymbol{\xi} - l_i \boldsymbol{X}, && \text{(III)} \\ &\partial_j \boldsymbol{y}_i = A^k_{ij} \boldsymbol{y}_k - p_{ij} \boldsymbol{x} - g_{ij} \boldsymbol{X} + b_{ij} \boldsymbol{\xi}. && \text{(IV*)} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Коэффициенты этих разложений l_i, m_i, p_{ij}, b_{ij}, g_{ij} будут тензорами, из которых последние два симметричны. Так как

$$d\boldsymbol{x}^2 = g_{ij} du^i du^j, \qquad (5)$$

то тензор g_{ij} определяет угловую метрику пространства Мебиуса для направлений, принадлежащих поверхности.

Будем называть тензор g_{ij} *метрическим тензором поверхности* Тензор g^{ij} есть тензор, взаимный метрическому, так что

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j. \qquad (6)$$

Величины A^k_{ij} не являются компонентами тензора, но преобразуются при преобразовании криволинейных координат как коэффициенты аффинной связности. При перенормировании координат точки x мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{x} = \sigma \check{\boldsymbol{x}}, \quad \boldsymbol{y}_i = \sigma \check{\boldsymbol{y}}_i, \quad \boldsymbol{\xi} = \check{\boldsymbol{\xi}}, \\ &\boldsymbol{X} = \sigma^{-1} \check{\boldsymbol{X}}, \\ &b_{ij} = \sigma \check{b}_{ij}, \quad g_{ij} = \sigma^2 \check{g}_{ij}, \quad m_i = \sigma^{-1} \check{m}_i, \\ &l_i = \check{l}_i + \partial_i \lg \sigma, \quad A^k_{ij} = \check{A}^k_{ij} + \delta^k_i \partial_j \lg \sigma. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Комбинируя последние соотношения, мы видим, что величины

$$G^k_{ij} = A^k_{ij} - \delta^k_i l_j$$

остаются неизменными при перенормировании и определяют связность, которую мы будем называть *внутренней связностью* нормализованной поверхности. Используя эту связность для составления ковариантных производных, мы придадим условию (4,IV*) окончательный вид

$$\nabla_j \boldsymbol{y}_i = l_j \boldsymbol{y}_i - p_{ij} \boldsymbol{x} - g_{ij} \boldsymbol{X} + b_{ij} \boldsymbol{\xi}. \qquad \text{(IV)} \quad (4)$$

Составляя условия интегрируемости системы (4), мы прежде всего получим из (1)

$$G^k_{[ij]} = 0, \qquad (8)$$

откуда следует, что внутренняя связность не имеет кручения в смысле Картана. Остальные условия интегрируемости сводятся к следующим:

$$\left.\begin{aligned} &g_{ij/k} = 2 l_k g_{ij}, && \text{(A)} \\ &p_{[ij]} = l_{[i/j]}, && \text{(B)} \\ &p_{i[j/k]} = - b_{i[j} m_{k]}, && \text{(C)} \\ &b_{i[j/k]} = b_{i[j} l_{k]} + g_{i[j} m_{k]}, && \text{(D)} \\ &g^{rs} p_{r[i} b_{j]s} + m_{[i/j]} + m_{[i} l_{j]} = 0, && \text{(E)} \\ &\tfrac{1}{2} R_{kji}{}^s = p_{[kj]} \delta^s_i + p_{i[j} \delta^s_{k]} + g^{rs} p_{r[k} g_{j]i} + g^{rs} b_{r[k} b_{j]i}. && \text{(F)*} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Первое из этих условий показывает, что *внутренняя геометрия нормализованной поверхности есть геометрия Вейля, угловая метрика которой определяется угловой метрикой внешнего пространства.* Условие (F)*, дающее выражение тензора кривизны этой метрики, может быть преобразовано.

Так как в бинарной области задание тензора кривизны равносильно заданию тензора Риччи *

$$R_{ij} = R_{kij}{}^{k}, \tag{10}$$

то соотношение (F)* равносильно следующему:

$$R_{ji} = p_{ij} - p_{ji} + g^{rs} p_{rs} g_{ij} + g^{rs} b_{rs} b_{ij} - g^{rs} b_{ri} b_{sj}.$$

Переходя к изотропной системе координат, легко показать, что

$$g^{rs} b_{rs} b_{ij} - g^{rs} b_{ri} b_{sj} = K g_{ij}, \tag{11}$$

где

$$K = \frac{b}{g} \tag{12}$$

есть отношение дискриминантов тензоров b_{ij} и g_{ij} соответственно. Вследствие этого, условие (F)* принимает следующий окончательный вид:

$$R_{ji} = p_{ij} - p_{ji} + (g^{rs} p_{rs} + K) g_{ij}. \qquad (F) \qquad (9)$$

Для дальнейшего будет полезно рассмотреть квадратичную форму

$$d\xi^2 = e_{ij}\, du^i\, du^j, \tag{13}$$

равную к в а д р а т у б е с к о н е ч н о м а л о г о у г л а м е ж д у с м е ж н ы м и с ф е р а м и, к а с а ю щ и м и с я п о в е р х н о с т и. Из (4,II) следует, что

$$e_{ij} = g^{rs} b_{ri} b_{sj}, \tag{14}$$

а вследствие (11),

$$e_{ij} - 2H b_{ij} + K g_{ij} = 0, \tag{15}$$

где

$$2H = g^{rs} b_{rs}. \tag{16}$$

Тензоры g_{ij}, l_i, p_{ij}, b_{ij} и m_i, определяющие нормализованную поверхность при условии выполнения соотношений (9), распадаются на две группы. Первые два, характеризующие внутреннюю связность, не зависят от выбора касательной сферы, а последующие три меняются при ее замене. Чтобы найти закон этого изменения, введем новую касательную сферу, связанную со старой следующим соотношением:

$$\bar{\xi} = \xi - \lambda x. \tag{17}$$

Легко видеть, что точка пересечения нормализующего круга со сферой $\bar{\xi}$

$$\bar{X} = X + \lambda \xi - \frac{\lambda^2}{2} x. \tag{18}$$

Сравнивая уравнения (4,II) и (4,IV), составленные для новых и старых значений ξ и X при неизменной внутренней связности, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\bar{b}_{ij} = b_{ij} + \lambda g_{ij}, \quad \bar{p}_{ij} = p_{ij} - \lambda b_{ij} - \frac{\lambda^2}{2} g_{ij}, \\ &\bar{m}_i = m_i + l_i \lambda + \partial_i \lambda. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

---

* См. ([2]), стр. 240.

При переходе к новому нормализующему кругу, по которому пересекаются сферы

$$\bar{y}_i = y_i + p_i x, \tag{20}$$

тензоры b_{ij} и g_{ij} остаются неизменными, а остальные тензоры изменяются по законам, из которых отметим только один:

$$\bar{l}_i = l_i - p_i. \tag{21}$$

Принимая во внимание это соотношение и неизменность тензора g_{ij}, мы видим, что *при замене нормализации внутренняя вейлева связность нормализованной поверхности испытывает конформное преобразование самого общего вида.* В силу известных формул преобразования объекта связности Вейля, при таком преобразовании мы будем иметь [см. ([3]), стр. 89]

$$\bar{G}^k_{ij} = G^k_{ij} + p_i \delta^k_j + p_j \delta^k_i - g^{kr} p_r g_{ij}. \tag{22}$$

Так как тензор p_i может быть выбран совершенно произвольно, а все двумерные пространства Вейля могут быть приведены в конформное соответствие, то *любая связность Вейля может быть осуществлена в качестве внутренней связности любой поверхности при соответствующей ее нормализации.*

Назовем *главными направлениями* поверхности такие ортогональные между собою направления, которые взаимно сопряжены относительно тензора b_{ij}. Этот тензор не зависит от нормализации и преобразуется по формулам (19) при замене касательной плоскости, откуда следует, что главные направления не зависят от нормализации и выбора касательной плоскости. Главные направления определяются из уравнений

$$(b_{ij} + s g_{ij}) v^j = 0,$$

условие совместности которых имеет вид характеристического уравнения

$$s^2 - 2Hs + K = 0. \tag{23}$$

Переходя к геометрическому истолкованию введенных величин и понятий, мы встанем на такую точку зрения, которая позволит применять ряд привычных нам представлений геометрии евклидова пространства. Имея ввиду, что последнее отличается от пространства Мебиуса наличием несобственной точки, примем за нее ту точку M поверхности, окрестность которой хотим изучить. Будем теперь называть: *M-пространством* евклидово пространство с несобственной точкой M, *M-плоскостями* — сферы, а *M-прямыми* — круги, проходящие через эту точку.

M-прямые или M-сферы будут считаться п а р а л л е л ь н ы м и между собою, если они касаются в точке M.

Если M есть точка нормализованной поверхности, то в M-пространстве определена декартова система координат с координатными M-плоскостями y_1, y_2 и ξ.

Всякую M-плоскость можно представить в виде линейной комбинации

$$\xi = A^k y_k + C\xi + Dx, \tag{24}$$

а точку z определить пересечением трех M-плоскостей:

$$\boldsymbol{y}_i - m_i\boldsymbol{x} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\xi} - m\boldsymbol{x}. \tag{25}$$

Нормируя пентасферические координаты этой точки так, чтобы иметь

$$\boldsymbol{z}\boldsymbol{x} = 1,$$

мы получим

$$m_i = \boldsymbol{y}_i\boldsymbol{z}, \quad m = \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{z}. \tag{26}$$

Точка принадлежит M-плоскости (24), если удовлетворено уравнение

$$A^k m_k + Cm + D = 0, \tag{27}$$

которое показывает, что m_i и m являются декартовыми координатами точки z, а (27) есть уравнение M-плоскости в этих координатах.

M-плоскости, касающиеся поверхности в точке M, имеют уравнение

$$m = \text{const},$$

а M-прямые, нормальные поверхности, вполне определяются заданием координат m_1 и m_2 точки, в которых они пересекают любую из касательных M-плоскостей. В частности, если координаты трех таких точек связаны соотношениями

$$m_i = \frac{\lambda \underset{1}{m}_i + \mu \underset{2}{m}_i}{\lambda + \mu}, \tag{28}$$

то соответствующие M-прямые лежат на одной M-плоскости, ортогональной поверхности. В частности, если

$$m_i = \frac{\underset{1}{m}_i + \underset{2}{m}_i}{2}, \tag{29}$$

то последние два круга находятся в инверсии относительно первого.

Если круги, соответствующие координатам m_i, $\underset{1}{m}_i$ и $\underset{2}{m}_i$, связанным условием (28), во всякой точке поверхности приняты за нормализующие, то коэффициенты определяемых ими внутренних связностей находятся в аналогичной зависимости

$$G^k_{ij} = \frac{\lambda \underset{1}{G}{}^k_{ij} + \mu \underset{2}{G}{}^k_{ij}}{\lambda + \mu}, \tag{30}$$

что легко следует из формулы (22).

Будем называть *опорной сферой* направления, принадлежащего нормализованной поверхности, сферу, проходящую через нормализующий круг ортогонально этому направлению. Если направление определено вектором v^i, то его опорная сфера представится в следующем виде:

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{y}_k. \tag{31}$$

Всякой последовательности направлений v^i, заданных вдоль некоторой кривой Γ на нормализованной поверхности, соответствует семейство опорных сфер.

Назовем *направляющим кругом* последовательности направлений предельное положение круга, проходящего через точку поверхности и ортогонального двум бесконечно близким опорным сферам. Направляющий круг в каждой точке поверхности принадлежит к числу M-прямых и может быть задан пересечением двух M-плоскостей $\underset{1}{\boldsymbol{\varkappa}}$ и $\underset{2}{\boldsymbol{\varkappa}}$, удовлетворяющих условиям

$$\underset{s}{\boldsymbol{\varkappa}}\boldsymbol{x} = 0, \quad \underset{s}{\boldsymbol{\varkappa}}\boldsymbol{v} = 0, \quad \underset{s}{\boldsymbol{\varkappa}}d\boldsymbol{v} = 0. \tag{32}$$

Так как направляющий круг ортогонален опорной сфере $\boldsymbol{v}$, то M-плоскости $\underset{s}{\varkappa}$ можно представить в виде

$$\underset{1}{\varkappa} = \mu = \xi - px, \quad \underset{2}{\varkappa} = \nu = \bar{\boldsymbol{v}}^k \boldsymbol{y}_k + qx,$$

где $\bar{\boldsymbol{v}}^k$ есть вектор, ортогональный v^k, и оба они удовлетворяют условию нормирования

$$g_{rs}v^r v^s = g_{rs}\bar{v}^r \bar{v}^s = 1.$$

Чтобы принять во внимание третье условие, предположим для общности, что v^i есть вектор поля, заданного в двумерной области, причем

$$\nabla_k v^i = a_k v^i + b_k \bar{v}^i. \tag{33}$$

Легко видеть, что $a_k = -l_k$, а

$$d\boldsymbol{v} = (b_k \bar{\boldsymbol{v}} - g_{ik} v^i \boldsymbol{X} + b_{ik} v^i \xi)\, du^k + \lambda x. \tag{34}$$

Полагая, кроме того,

$$w_k = b_{ki} v^i, \quad \bar{v}_k = g_{ki} \bar{v}^i \tag{35}$$

и принимая во внимание последнее из условий (32), получим окончательно

$$\mu = \xi - \frac{w_k du^k}{\bar{v}_r dr^r} x, \quad \nu = \bar{v}^i \boldsymbol{y}_i + \frac{b_k du^k}{\bar{v}_r dk^r} x. \tag{36}$$

Уравнения соответствующих M-плоскостей будут иметь вид

$$(\bar{v}_k du^k)\, m - w_k du^k = 0,$$
$$(\bar{v}_k du^k)\, \bar{v}^s m_s + b_k du^k = 0. \tag{37}$$

Исключая du^k и пользуясь вместо альтернации свертыванием с бивектором ε^{ij}, получим уравнение M-плоскости

$$(\varepsilon^{ij} w_i \bar{w}_j)\, v^s m_s - (\varepsilon^{ij} \bar{v}_i b_j)\, m + \varepsilon^{ij} w_i b_j = 0, \tag{38}$$

которой принадлежат направляющие круги всех последовательностей направлений данного поля. Будем называть эту M-плоскость *направляющей сферой данного поля направлений.*

Всякий направлющий круг может быть получен пересечением направляющей сферы с некоторой касательной сферой поверхности. Исключение представляют только поля, направляющая сфера которых сама касается поверхности, а это имеет место только при условии

$$w_i = \lambda v_i,$$

которое показывает, что направление поля будет главным направлением поверхности. Таким образом, *поле главных направлений характеризуется тем, что его направляющая сфера касается поверхности.*

Если направление дифференцирования совпадает с направлением поля, то условия (32) принимают вид

$$\underset{s}{\varkappa} x = \underset{s}{\varkappa}\, dx = \underset{s}{\varkappa}\, d^2 x = 0,$$

откуда следует, что *направляющий круг для направлений, касающихся некоторой кривой, совпадает с ее кругом кривизны.*

Полагая

$$\bar{v}^i = g^i_k v^k,$$

где g^k_i — тензор, удовлетворяющий условию

$$g^i_i = 0, \quad g^h_i g^j_h = -\delta^j_i,$$

или так называемый *версор*, будем иметь для M-плоскости ν, определяющей соприкасающийся круг,

$$\nu = \bar{v}^i y_i + b_k v^k x = v^i (y_i - \bar{b}_i x),$$

где

$$\bar{b}_k = g^s_k b_s.$$

Отсюда следует, что соприкасающийся круг линии поля пересекает круг, нормальный поверхности, определяемый двумя сферами

$$z_i = y_i - b_i x, \tag{39}$$

который мы назовем *нормальным кругом поля.*

Рассмотрим поле

$$w^i = v^i \cos\alpha + \bar{v}^i \sin\alpha = (\delta^i_k \cos\alpha + g^i_k \sin\alpha)\, v^k,$$

изогональное данному, т. е. такое, линии которого образуют с линиями данного поля постоянный угол α. Дифференцируя и пользуясь тем, что для версора

$$\nabla_k g^i_j = 0,$$

мы получим

$$\nabla_k w^i = -l_k w^i + b_k \bar{w}^i, \tag{40}$$

откуда следует, что *нормальные круги изогональных полей совпадают между собой.* Исходя из этого, мы можем определить нормальный круг поля как такой нормальный круг поверхности, который пересекает соприкасающиеся круги линий данного поля и их изогональных траекторий. Из этого определения следует, что нормальный круг поля определяется независимо от нормализации.

Направляющая сфера поля главных направлений вполне характеризуются тем, что она касается поверхности и содержит соприкасающийся круг траекторий поля, т. е. линий кривизны одного семейства. Таким образом, направляющие сферы полей главных направлений совпадают с *главными* касательными сферами поверхности и не зависят от нормализации. Уравнение (38) принимает для главных сфер вид

$$m_i = s_i,$$

где s_i есть корень характеристического уравнения (24). *Центральной сферой* поверхности называется такая сфера, касающаяся поверхности, по отношению к которой обе главные сферы соответствуют друг другу в преобразовании инверсии *. Так как в M-пространстве центральная сфера должна быть M-плоскостью симметрии главных сфер, то ее уравнение должно иметь вид

$$m = \frac{s_1 + s_2}{2} = H,$$

* См. (1), стр. 296.

так что

$$\gamma = \xi - H\varkappa. \tag{41}$$

Для того чтобы касательная плоскость ξ была центральной, необходимо и достаточно, чтобы

$$2H = 0. \tag{42}$$

Из (37) следует, что соприкасающийся круг любого направления лежит на касательной сфере

$$m = \frac{b_{ij}\, v^i\, v^j}{g_{rs}\, v^r\, v^s} \tag{43}$$

или на *сфере Менье,* соответствующей данному направлению. Для того чтобы эта сфера была сферой ξ, необходимо и достаточно, чтобы

$$b_{ij} v^i v^j = 0.$$

Будем называть линии с направлениями (41) *релятивно асимптотическими линиями,* соответствующими данному выбору касательной сферы ξ *. Мы видим, что *релятивно асимптотические линии характеризуются тем, что их соприкасающийся круг принадлежит соответствующей касательной сфере.*

Условие (42) показывает, что релятивно асимптотическая сеть центральных сфер ортогональна. С другой стороны, она разделяется гармонически сетью линий кривизны и, следовательно, является ее биссекторной сетью.

Два направления называются сопряженными относительно касательной сферы ξ, если

$$b_{ij}\, du^i\, \delta u^j = 0.$$

Так как это отношение равносильно

$$d\xi\, \delta x = (\xi + d\xi)(x + dx) = 0,$$

то получаем, что *два направления сопряжены относительно касательной сферы ξ, если точка поверхности, смещенная по одному из них, лежит на характеристике сферы ξ, смещенной по другому.*

Перейдем теперь к рассмотрению параллельного перенесения направлений по отношению к внутренней связности нормализованной поверхности. Из (33) следует, что условие такого перенесения сводится к равенству

$$b_k du^k = 0,$$

но это равносильно тому, что направляющий круг последовательности направлений v^i лежит на сфере

$$\nu = \bar{v}^k\, y_k,$$

которая содержит нормализующую прямую. Таким образом, *для того чтобы направление v^i переносилось параллельно по отношению к внутренней связности нормализованной поверхности, необходимо и достаточно, чтобы направляющий круг последовательности v^i лежал на одной сфере с нормализующим кругом поверхности.*

---

* *K*-асимптотические линии T. Takasu [См. ([4]), стр. 200].

Как следствие этого результата мы получаем, что *геодезические линии внутренней связности характеризуются тем, что их соприкасающийся круг лежит на одной сфере с нормализующим кругом поверхности.*

Имея в виду известное определение *циклических систем**, мы можем сказать, что *геодезические линии внутренней связности образуют циклическую систему, соответствующую конгруенции нормализующих кругов.*

Рассмотрим некоторые свойства этой конгруенции.

Проведем через каждый ее круг опорную сферу некоторого направления

$$\boldsymbol{v} = v^k \boldsymbol{y}^h$$

и будем искать такие направления v^i и du^i, чтобы при движении по последнему, характеристический круг семейства сфер $\boldsymbol{v}$ пересекал нормализующий круг в точке поверхности $\boldsymbol{x}$ и другой, заранее данной, точке $\boldsymbol{X}$. Условием этого будет

$$d\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} = 0, \quad d\boldsymbol{v}\boldsymbol{X} = 0$$

или, согласно (34),

$$g_{ik} v^i du^k = 0, \quad p_{ik} v^i du^k = 0. \tag{44}$$

Исключив из этих условий v^i, мы получим два направления, ортогональных искомым сферам. Эти направления определяют на поверхности сеть, которую мы будем называть *T-сетью*, соответствующей данному выбору точки $\boldsymbol{X}$. При перемещении точки $\boldsymbol{X}$ по нормализующей прямой, т. е. при преобразовании точки $\boldsymbol{X}$, совершающемся по формулам (18), соответствующая T-сеть тоже преобразуется и определяющие ее условия (14) принимают, вследствие (19), следующий вид:

$$g_{ik} v^i du^k = 0, \quad (p_{ik} - \lambda b_{ik}) v^i du^k = 0. \tag{45}$$

При $\lambda \to \infty$, т. е. при неограниченном приближении точки $\boldsymbol{X}$ к точке поверхности, характеристический круг семейства v становится касательным к нормализующему кругу поверхности, а T-сеть переходит в сеть линий кривизны, и мы приходим к следующей теореме: *характеристика семейства опорных сфер одного главного направления при перемещении по другому главному направлению нормальна поверхности.*

Перейдем к рассмотрению фокальных точек конгруенции нормализующих кругов. Для такой точки

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{X} + \lambda\xi - \frac{\lambda^2}{2}\boldsymbol{x}$$

существует такое направление бесконечно малого сдвига, при котором она остается на нормализующем круге, так что

$$d\overline{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{y}_k = 0,$$

или, вследствие уравнений (4),

$$\left(p_{ki} - \lambda b_{ki} - \frac{\lambda^2}{2} g_{ik}\right) du^k = 0. \tag{46}$$

---

* См. ([1]), стр. 331.

Исключая du^i, мы получим характеристическое уравнение четвертой степени

$$\mathrm{Det}\left|p_{ik} - \lambda b_{ik} - \frac{\lambda^2}{2} g_{ik}\right| = 0, \tag{47}$$

определяющее, вообще говоря, четыре значения λ и, следовательно, четыре фокуса.

Назовем огибающие направлений du^i, удовлетворяющих (46), *фокальными линиями*, и рассмотрим семейство опорных сфер $\boldsymbol{v}$, касающихся одной из таких линий. Так как условие прикосновения будет иметь вид

$$g_{ik} v^i du^k = 0,$$

то, вследствие (46), будет выполняться и условие (45).

Таким образом, *характеристика семейства опорных сфер, касающихся фокальной линии, проходит через соответствующий фокус.*

Если для фокуса, соответствующего значению λ,

$$p_{ij} = \lambda b_{ij} + \frac{\lambda^2}{2} g_{ij},$$

то направление фокальной линии, соответствующее этому фокусу, неопределенно. Переместив точку $\boldsymbol{X}$ в этот фокус, мы будем иметь

$$p_{ij} = 0,$$

откуда, вследствие (4,III),

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X} l_k du^k,$$

что характеризует точку $\boldsymbol{X}$ как неподвижную. При этих же условиях уравнение (47) сводится к квадратному, вследствие чего, кроме данного неподвижного фокуса, может существовать не более двух других.

Поставим вопрос о существовании поверхностей, отличных от поверхности $\boldsymbol{x}$ и пересекающих ортогонально все круги нормализующей конгруенции. Если $\overline{\boldsymbol{X}}$ есть точка такой поверхности, а $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ — сфера, пересекающая ортогонально круг нормализующей конгруенции в точках $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{X}$, то

$$d\overline{\boldsymbol{X}}\,\overline{\boldsymbol{\xi}} = -\overline{\boldsymbol{X}}\,d\overline{\boldsymbol{\xi}} = 0,$$

откуда, в силу (17), (18) и (4),

$$\left(\boldsymbol{X} + \lambda\boldsymbol{\xi} - \frac{\lambda^2}{2}\boldsymbol{x}\right)(\partial_i\boldsymbol{\xi} - \partial_i\lambda\boldsymbol{\xi} - \lambda\boldsymbol{y}_i - \lambda l_i\boldsymbol{x}) = 0$$

или

$$m_i = \partial_i\lambda + \lambda l_i. \tag{48}$$

Если это уравнение имеет два различных решения $\underset{1}{\lambda}$ и $\underset{2}{\lambda}$, то

$$l_i = \partial_i \log(\lambda_1 - \lambda_2),$$

т. е. нормализатор градиентен и всякое

$$\lambda = \lambda_1 \cdot \mathrm{const}$$

есть решение уравнения (48). Таким образом, если конгруенция кругов допускает существование трех ортогональных ей поверхностей, то она

допускает существование и ∞^1 таких поверхностей, т. е. является системой Рибокура.*

Рассмотренная нормализация, которую мы назовем *нормализацией Рибокура*, является частным случаем нормализации более общего вида, характеризуемой градиентностью тензора l_i. Из (9, A) следует, однако, что *нормализатор градиентен тогда и только тогда, если внутренняя связанность поверхности — риманова*. Вследствие этого, мы будем называть рассматриваемую нормализацию *римановой*. Из (9, A) следует, что характеристическим признаком римановой нормализации будет условие

$$p_{[ij]} = 0,$$

т. е. симметрия тензора p_{ij}.

Чтобы охарактеризовать риманову нормализацию другими свойствами, рассмотрим ее T-сети. Еесли тензор p_{ij} симметричен, то из существования решения $\underset{1}{v^i}$, $\underset{1}{du^i}$ и уравнения (44) следует существование другого решения

$$\underset{2}{v^i} = \lambda \underset{1}{du^i}, \quad \underset{2}{du^i} = \mu \underset{1}{v^i},$$

причем оба решения связаны условием

$$g_{ij} \underset{1}{v^i} \underset{2}{v^j} = 0.$$

Обратно, из существования такой пары решений легко следует симметрия p_{ij}, так что *риманова нормализация характеризуется ортогональностью всех T-сетей*.

Рассмотрим две различные фокальные точки нормализующего круга и запишем для них условия (46):

$$\left(p_{ki} - \lambda_1 b_{ki} - \frac{\lambda_1^2}{2} g_{ki}\right) \underset{1}{du^k} = 0,$$

$$\left(p_{ki} - \lambda_2 b_{ki} - \frac{\lambda_2^2}{2} g_{ki}\right) \underset{2}{du^k} = 0.$$

В случае симметрии p_{ij} мы будем иметь

$$\left(b_{ki} + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} g_{ki}\right) \underset{1}{du^k} \underset{2}{du^i} = 0,$$

где λ_1 и λ_2 — соответствующие корни характеристического уравнения. Отсюда, согласно (17) и (19), направления $\underset{1}{du^i}$ и $\underset{2}{du^i}$ сопряжены относительно касательной сферы:

$$\xi = \xi - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} x.$$

Таким образом, *риманова нормализация характеризуется тем, что всякие две различные фокальные линии сопряжены относительно сферы, которая является средней для двух касательных сфер, проходящих через соответствующие фокусы*. Так как нормализатор римановой нормализации

* См. (1), стр. 351.

градиентен, то, пользуясь (7), можно выбрать такое **каноническое** нормирование, при котором

$$l_i = 0. \tag{49}$$

Вследствие этого,

$$y_i = \partial_i x, \tag{50}$$

что позволяет получить простым дифференцированием всякую риманову нормализацию данной поверхности.

Пользуясь каноническим нормированием, мы приведем условия интегрируемости для поверхности, находящейся в римановой нормализации, к следующему виду:

$$\begin{aligned} \nabla_k g_{ij} &= 0, && \text{(A)} \\ p_{[ij]} &= 0, && \text{(B)} \\ p_{i\,[j\,/\,k]} &= -b_{i\,[j}\, m_{k]}, && \text{(C)} \\ b_{i\,[j\,/\,k]} &= g_{i[j}\, m_{k]}, && \text{(D)} \\ g^{rs} p_{r\,[i}\, b_{j]\,s} + m_{[i\,/\,j]} &= 0, && \text{(E)} \\ \varkappa &= g^{rs} p_{rs} + K, && \text{(F)} \end{aligned} \tag{51}$$

где $\varkappa$ есть гауссова кривизна внутренней римановой метрики.

Уравнение (48) принимает для римановой нормализации в каноническом нормировании вид

$$m_i = \partial_i \lambda,$$

откуда следует, что существование одного решения влечет за собою его полную интегрируемость, так что *если риманова нормализация допускает существование двух поверхностей, пересекающих ортогонально его круги, то она будет рибокуровой.* Рибокурова нормализация будет римановой для каждой из ортогональных поверхностей. Совместив в этом случае точку X с точкой какой-либо из поверхностей, ортогональных нормализующим кругам, мы получим $m_i = 0$, и условия (51,C), (51,D) и (51,E) примут вид

$$p_{i\,[j\,/\,k]} = 0, \quad b_{i\,[j\,/\,k]} = 0, \quad g^{rs} p_{r\,[i}\, b_{j]\,s} = 0. \tag{52}$$

Легко видеть, что последнее из них выражает линейную зависимость тензоров b_{ij}, p_{ij} и g_{ij}.

Рассмотрим риманову нормализацию, соответствующую каноническому нормированию, определенному тождеством $Ax = 1$, где $A = \text{const}$ — произвольная сфера. В таком случае мы будем иметь

$$A\partial_i x = Ay_i = 0, \tag{53}$$

откуда следует, что все нормализующие круги ортогональны этой сфере. Приняв эту сферу за абсолют конформной интерпретации пространства постоянной кривизны, мы видим, что нормализующие круги будут образами прямолинейных нормалей к поверхности этого пространства. Внутренняя риманова связность поверхности совпадает с той, которая индуцируется на ней метрикой внешнего пространства. Действительно, обе метрики не только конформны между собой, но и имеют общие геодезические, которые характеризуются тем, что их соприкасающийся круг пересекает нормаль в двух точках. Чтобы охарактеризовать рас-

сматриваемый случай аналитически, предположим, что касательная сфера ξ ортогональна абсолюту так, что

$$A\xi = 0.$$

В таком случае точка X будет соответствовать точке x в инверсии относительно абсолюта или

$$X = \lambda x + \mu A.$$

Принимая во внимание, что $X^2 = 0$ и полагая $A^2 = 2c$ и $\mu = 1$, получим

$$X = -cx + A,$$

откуда

$$\partial_i X = -c\partial_i x = -cy_i$$

и

$$p_{ij} = -cg_{ij}, \quad m_i = 0. \tag{54}$$

Вследствие этого, условия (51) сводятся к трем:

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad b_{i\,[j\,/\,k]} = 0, \quad \varkappa = 2c + K. \tag{55}$$

Последние два являются условием Кодацци и обобщенным условием Гаусса. Все сказанное остается справедливым и тогда, когда абсолют вырождается в точку, т. е. в случае евклидова пространства.

Условия (54) являются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы все нормализующие круги поверхности были ортогональны фиксированной сфере. * Действительно, в этом случае p_{ij} симметрично и с помощью перенормирования l_i можно обратить в нуль. Тогда уравнения (4, III) примут вид

$$\partial_i X = -c\partial_i x,$$

откуда следует

$$X = -cx + A,$$

что и требовалось доказать.

Предположим, что нормализующий круг поверхности совпадает с нормальным кругом некоторого поля направлений. В таком случае, вследствие (39), $b_k = 0$, а (40) принимает вид

$$\nabla_k w^i = -l_k w^i, \tag{56}$$

но это уравнение показывает, что данное поле направлений и все изогональные ему поля будут по отношению ко внутренней геометрии полями абсолютно параллельных направлений. Таким образом, внутренняя связанность допускает существование абсолютного параллелизма направлений, т. е. будет *квазиевклидовой* **. Обратно, если внутренняя геометрия нормализованной поверхности квазиевклидова, то линии полей (57) будут геодезическими и нормализующий круг будет пересекаться с соприкасающимися кругами этих линий, т. е. будет нормальным кругом поля w^i.

Называя *квазиевклидовой* нормализацию, определяющую на поверхности внутреннюю связность квазиевклидова типа, получаем следующий

* Постоянство c следует из (9, C).

** См. ([5]), стр. 236.

результат: *для того чтобы нормализация была квазиевклидовой, необходимо и достаточно, чтобы нормализующий круг совпадал с нормальным кругом некоторого поля направлений.*

Так как квазиевклидова связность вполне характеризуется косой симметрией тензора Риччи, то условие того, что нормализация — квазиевклидова, имеет вид

$$g^{rs} p_{rs} + K = 0. \tag{57}$$

Принимая во внимание то, что евклидова связность будет частным случаем квазиевклидовой, а поле ее абсолютно параллельных направлений может быть охарактеризовано уравнением

$$\nabla_k w^i = 0$$

и его линии образуют вместе со своими траекториями изотермическую сеть, мы приходим к следующему результату: *евклидова нормализация характеризуется тем, что нормализующий круг совпадает с нормальным кругом поля направлений, касающихся семейства линий изотермической сети.*

Для дальнейшего нам потребуется основное понятие теории пар сопряженных параллельных перенесений, изложенной автором в заметке (6).

Две связности без кручения с коэффициентами G^k_{ij} и Γ^k_{ij} называются сопряженными относительно сети

$$a_{rs}\, du^r\, du^s = 0,$$

если условие сопряженности двух направлений относительно этой сети

$$a_{rs}\, v^r\, w^s = 0,$$

не нарушается при параллельном перенесении каждого из этих направлений в одной из данных связностей. Условие сопряженности данных связностей имеет вид

$$\nabla_k a_{i\,(j)} = \partial_k a_{ij} - G^r_{ki}\, a_{rj} - \Gamma^r_{kj}\, a_{ir} = \omega_k\, a_{ij}. \tag{58}$$

Средняя связность двух сопряженных, т. е. связность с коэффициентами

$$\gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}(G^k_{ij}\, a_{rj} + \Gamma^k_{ij}), \tag{59}$$

есть всегда связность Вейля с основным тензором a_{ij}.

Если связность G^k_{ij} вейлева, то сопряженная ей связность тоже вейлева. Для того чтобы эти связности были конформны друг другу, необходимо и достаточно, чтобы сеть была ортогональной по отношению к ним, и в этом случае связности G и Γ будут сопряжены не только по отношению к сети a_{ij}, но и по отношению ко всякой другой сети, направления которой получаются из направлений данной поворотом на угол, не зависящий от точки.

Средняя метрика конформной пары будет квазиевклидовой, так как семейства линий сети и их изогональных траекторий будут определять в ней поле абсолютно параллельных направлений. Легко видеть также, что совпадение поля изотропных направлений метрик G и Γ тоже будут

определять поля абсолютных направлений средней метрики, откуда следует, что средняя метрика конформной пары может рассматриваться как связность Вейля, конформная обеим метрикам G и Γ.

Обратимся снова к поверхности, нормализованной произвольно, и пусть G есть ее внутренняя связность, а a_{ij} — тензор ортогональной сети на поверхности. В таком случае связность Γ, сопряженная G, и их средняя связность $г$ будут конформными G и, следовательно, могут быть осуществлены с помощью каких-то других нормализаций той же поверхности. Но коэффициенты этих связностей находятся в соотношении (59), которое при сравнении с формулами (28), (29) и (30) приводит нас к следующему результату: *для того чтобы внутренние связности, соответствующие двум нормализациям данной поверхности, были сопряжены относительно некоторой ортогональной сети, необходимо и достаточно, чтобы нормализующие круги были симметричны относительно нормального круга направлений этой сети, который, будучи принят за нормализующий, определит на поверхности среднюю связность пары.*

Назовем нормализацию *сферической*, если нормализующий круг соединяет соответствующие характеристические точки некоторого семейства сфер, касающихся данной поверхности. Предполагая, что ξ совпадает со сферой указанного семейства и, следовательно, $\boldsymbol{X}$ есть его характеристическая точка, мы будем иметь

$$\partial_i \boldsymbol{X} \xi = m_i = 0. \qquad (60)$$

Вследствие этого, условия интегрируемости (9, C), (9, D) и (9, E) принимают для сферической нормализации следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} p_{i\,[j\,/\,k]} &= 0, && \text{(C)} \\ b_{i\,[j\,/\,k]} &= b_{i\,[j} l_{k]}, && \text{(D)} \\ g^{rs} p_{r[i} b_{j]s} &= 0. && \text{(E)} \end{aligned}\right\} \qquad (61)$$

Чтобы охарактеризовать внутреннюю связность G сферической нормализации, построим связность Γ_1, сопряженную с ней по отношению к релятивно асимптотической сети сфер ξ, и рассмотрим разложение

$$\nabla_j \partial_{(i)} \xi = \partial^2_{ij} \xi - \Gamma^k_{ij} \partial_k \xi = S^k_{ij} \partial_k \xi + \alpha_{ij} \xi + \beta_{ij} \boldsymbol{x} + \gamma_{ij} \boldsymbol{X}. \qquad (62)$$

Применив условие сопряженности (58) к тензору $b_{ij} = -\boldsymbol{y}_i \partial_j \xi$, будем иметь

$$\nabla_k b_{i\,(j)} = -(\nabla_k \boldsymbol{y}_i) \partial_j \xi - \boldsymbol{y}_i \nabla_k \partial_{(j)} \xi = l_k b_{ij} + S^r_{ik} b_{rj} = \omega_k b_{ij}.$$

Отсюда следует, что

$$S^r_{k\,[j} b_{j]\,r} = 0,$$

или, вследствие симметрии S^k_{ij},

$$S^r_{i\,[k} b_{j]\,r} = 0.$$

С другой стороны, вследствие (61, D),

$$b_{i\,[(j)\,/\,k]} = b_{i\,[j\,/\,k]} = b_{i\,[j} l_{k]} = b_{i\,[j} \omega_{k]},$$

так что

$$\left.\begin{aligned}\omega_k &= l_k,\\ \nabla_k b_{i(j)} &= l_k b_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

и, следовательно,

$$S^r_{ik} b_{rj} = 0. \tag{64}$$

Наконец, предполагая $b \neq 0$, будем иметь

$$S^r_{ik} = 0.$$

Продифференцировав ковариантно тензор e_{ij}, введенный равенством (19) по отношению к связности Г, получим

$$\nabla_k e_{(i)(j)} = 0. \tag{65}$$

Итак, *внутренняя связность поверхности, нормализованной сферически, сопряжена угловой римановой метрике соответствующих касательных сфер по отношению к релятивно асимптотической сети этих сфер.*

Рассмотрим нормализации, определенные такими кругами, которые конформно инвариантно определяются самой поверхностью. Наиболее просто определяются три таких инвариантных круга*.

Первый инвариантный круг (или нормальный круг поверхности) есть круг, соединяющий характеристические точки семейства центральных сфер поверхности.

Второй инвариантный круг (или псевдонормальный круг) есть нормальный круг полей главных направлений поверхности.

Третий инвариантный круг есть круг, определенный условием (50) для инвариантного нормирования поверхности, характеризуемого равенством**

$$K = \frac{b}{g} = -1, \tag{66}$$

где b есть дискриминант квадратичной формы b_{ij} релятивно асимптотической сети центральных сфер. Из условия $H = 0$, характеризующего центральные сферы, и формулы (15) мы получим равенство

$$e_{ij} = g_{ij}, \tag{67}$$

которое показывает, что внутренняя риманова метрика, определенная третьим инвариантным кругом, совпадает с угловой метрикой центральных сфер.

Так как нормализация с помощью первого инвариантного круга определена теми же центральными сферами, то соответствующая ей внутренняя связность сопряжена с указанной внутренней римановой связностью по отношению к характеристической сети. Но ее линии образуют угол в 45° с главными направлениями, вследствие чего внутренние связности первого и третьего рода сопряжены и относительно сети

* См. (1), стр. 321, 337.

** Вследствие $H = 0$, всегда $b < 0$.

линий кривизны. Отсюда следует, наконец, что внутренняя связность, определенная вторым инвариантным кругом, есть средняя связность по отношению к связностям первого и второго рода, а отсюда, в свою очередь, вытекает, что первый и третий инвариантные круги симметричны относительно второго.

Назовем связности, определенные инвариантными кругами, первой, второй и третьей связностями.

Третья инвариантная связность есть связность риманова пространства, линейный элемент которого совпадает с элементом угла семейства центральных сфер.

Первая инвариантная связность сопряжена с указанной выше римановой связностью по отношению к сети линий кривизны.

Вторая инвариантная связность есть квазиевклидова и является средней между первой и третьей.

Если из трех связностей G, Γ и $\mathfrak{z}$ две являются эквиаффинными, то третья тоже будет эквиаффинной. Вследствие этого, если одна из первых двух инвариантных связностей эквиаффинна, т. е. риманова, то вторая инвариантная связность — евклидова. Но в этом случае сеть линий кривизны является декартовой сетью и, следовательно, изотермическая. Таким образом, *если одна из первых двух инвариантных связностей — риманова, то все три инвариантные связности римановы и это имеет место тогда и только тогда, когда нормализованная поверхность — изотермическая.*

В случае совпадения первого и третьего инвариантного кругов нормализация будет одновременно сферической и римановой, и при надлежащем нормировании мы будем иметь одновременно

$$m_i = 0, \quad l_i = 0,$$

а вследствие симметрии p_{ij}, условие (9, E) будет равносильно линейной зависимости

$$p_{ij} = \alpha g_{ij} + \beta b_{ij}.$$

Так как второй инвариантный круг тоже совпадает с первым и третьим, то внутренняя геометрия будет одновременно квазиевклидовой и римановой, т. е. будет евклидовой. Вследствие этого, $R_{ij} = 0$ и уравнение (9, F) совместно с условием $K = -1$ даст нам

$$g^{rs} p_{rs} = 1,$$

а так как $H = 0$, то $\alpha = \frac{1}{2}$. Подставив выражение p_{ij} в (61, C), получим

$$\beta = \text{const}.$$

Применяя преобразование (17) и полагая $\lambda = -\beta$, мы получим, вследствие (19),

$$p_{ij} = c g_{ij},$$

не нарушив условия $m_i = 0$. Но теперь мы видим, что выполняются условия (55) и, следовательно, рассматриваемая поверхность является минимальной поверхностью нулевой кривизны в пространстве постоянной кривизны. Примем еще во внимание,

что асимптотическая сеть этой поверхности будет декартовой, т. е. геодезической сетью внутренней связности, а значит, ее линии будут прямолинейными образующими поверхности. Таким образом, рассматриваемая поверхность совпадает с поверхностью Клиффорда и действительна только в эллиптическом пространстве.

Инвариантные круги не могут быть определены в случае неопределенности линий кривизны, т. е. в том случае, когда нормализованная поверхность является сферой. Условием этого будет

$$b_{ij} = \lambda g_{ij} \tag{68}$$

которое сводится к равенству

$$b_{ij} = 0, \tag{69}$$

если ξ есть сама рассматриваемая сфера. Так как при этом точка $\boldsymbol{X}$ будет принадлежать той же сфере, то можно считать нормализацию частным случаем сферической, вследствие чего мы будем иметь

$$m_i = 0.$$

Таким образом, основные дифференциальные уравнения и их условия интегрируемости примут для нормализованной сферы следующий вид: *

$$\left.\begin{aligned} \partial_i x &= y_i + l_i x, && \text{(I)} \\ \partial_i \boldsymbol{X} &= g^{rs} p_{ri} Y_s - l_i x, && \text{(II)} \\ \nabla_j \boldsymbol{y}_i &= l_j \boldsymbol{y}_i - p_{ij} \boldsymbol{X} - g_{ij} \boldsymbol{X}, && \text{(IV)} \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

$$\left.\begin{aligned} g_{ij/k} &= 2l_k g_{ij}, && \text{(A)} \\ p_{[ij]} &= l_{[i/j]}, && \text{(B)} \\ p_{i[j/k]} &= 0, && \text{(C)} \\ R_{ji} &= p_{ij} - p_{ji} + g^{rs} p_{rs} g_{ij}. && \text{(F)} \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии Наук СССР

Поступило
19. II. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie. III, Berlin, 1929.

[2] Норден А., Релятивная геометрия поверхностей в проективном пространстве, Сборник трудов семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 2—3 (1935), 230—268.

[3] Схоутен И. и Стройк Д., Введение в новые методы дифференциальной геометрии. I, Москва, 1939.

[4] Takasu T., Differentialgeometrien in den Kugelräumen. I, Tokyo, 1938.

[5] Норден А., Об особенных геодезических сетях в не-метрической геометрии, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, вып. 5 (1941), 226—245.

[6] Норден А., О парах сопряженных параллельных перенесений в многомерных пространствах, Доклады Ак. Наук СССР, 49, № 9 (1945), 649—652.

[7] Норден А., Конформно-евклидово пространство Вейля, Доклады Ак. Наук СССР, 50 (1945), 53—55.

[8] Норден А., Конформная интерпретация пространства Вейля, Матем. сб., 24 (66): 1 (1949), 75—85.

* Нормализованное сферическое пространство n измерений рассмотрено автором в ([7]), стр. 53, и в ([8]).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 123—144

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ, И О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе рассмотрены асимптотические свойства полиномов, ортогональных на единичном круге, в зависимости от свойств обложения или от свойств последовательности соответствующих параметров Шура.

Введение

Рассмотрим систему полиномов $\{P_n(z)\}_0^\infty$, ортогональных на единичном круге, т. е. удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(e^{i\theta})\,\overline{P_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta)=\begin{cases}0, & n\neq m;\quad P_n(z)=z^n+\cdots,\\ h_n>0, & n=m;\quad (n, m=0, 1, 2, \ldots),\end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста на отрезке $[0, 2\pi]$; полиномы связаны соотношениями

$$P_{n+1}(z)=zP_n(z)-\overline{a}_n P_n^*(z),$$
$$P_n^*(z)=z^n\,\overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right),\quad |a_n|<1\quad (n=0;\ 1, \ldots,), \tag{2}$$

$$\overline{a}_n P_{n+2}(z)=(\overline{a}_n z+\overline{a}_{n+1})P_{n+1}(z)-$$
$$-\overline{a}_{n+1}z(1-|a_n|^2)P_n(z)\qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{3}$$
$$P_0=1,\quad P_1(z)=z-\overline{a}_0,$$

причем [6]

$$h_n=h_0\prod_{k=0}^{n-1}(1-|a_k|^2)\quad (n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

В работах [4] — [8] мы ставили себе целью изучить асимптотические свойства полиномов $\{P_n(z)\}$ в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ по заданной последовательности параметров $\{a_n\}_0^\infty$ — иными словами — изучить асимптотические свойства решения уравнения в конечных разностях (3) по заданной последовательности чисел $\{a_n\}_0^\infty$.

Настоящая статья является в некотором роде завершающей: в ней сводятся воедино, обобщаются и уточняются прежние результаты и приводится ряд новых.

Все результаты сведены в таблице I; $\pi(z)$ — аналитическая функция, регулярная в области $|z|<1$, причем $\frac{1}{\pi(z)}\in H_2$; $p(\theta)$ — существующая

почти всюду производная $\sigma'(\theta)$; в таблице приведены условия, которые надо наложить на числа $\{a_n\}_0^\infty$ или, независимо от этого, на функцию $p(\theta)$.

Таблица I

№	Асимптотическое свойство	Условие, накладываемое на $p(\theta)$	Условие, накладываемое на числа $\{a_n\}_0^\infty$
1	$\lim_{p\to\infty} \sqrt[n]{\mid P_n^*(z)\mid}=1$ равномерно для $\mid z\mid \leqslant 1$	достаточно ([7]): $p(\theta)>0$ почти всюду в $[0, 2\pi]$	достаточно: $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mid a_k\mid\right\}=0$, $\mid a_k\mid\leqslant\alpha<1$
2	$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+1}^*(z)}{P_n^*(z)}=1$ равномерно для $\mid z\mid\leqslant 1$		необходимо и достаточно: $\lim_{n\to\infty} a_n=0$
3	$\lim_{n\to\infty} P_n^*(z)=\pi(z)$ равномерно для $\mid z\mid\leqslant r<1$; $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}-1\right\|^2 d\theta=0$; $\lim_{\nu\to\infty} P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})=\pi(e^{i\theta})$ почти всюду в $[0, 2\pi]$	необходимо и достаточно ([6]): $\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta>-\infty$	необходимо и достаточно ([6]): $\sum_{n=0}^{\infty}\mid a_n\mid^2<+\infty$
4	$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\mid P_n^*(e^{i\theta})-\pi(e^{i\theta})\mid d\theta=0$	достаточно: $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{p(\theta)}<+\infty$	
5	$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left\|\frac{1}{P_n^*(e^{i\theta})}-\frac{1}{\pi(e^{i\theta})}\right\|^2 d\theta=0$	необходимо и достаточно: $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна; $\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta>-\infty$	
6	$\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta})=\pi(e^{i\theta})$ почти всюду в $[0, 2\pi]$		достаточн : $\sum_{n=2}^{\infty}\mid a_n\mid^2\log^2 n<+\infty$ или $\sum_{n=0}^{\infty}\mid a_n\mid^k<+\infty,\quad k<2$
7	$\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta})=\pi(e^{i\theta})$ во всех точках, где существует предел $\lim_{r\to 1-0}\pi(re^{i\theta})=\pi(e^{i\theta})$		достаточно: $a_n=o\left(\frac{1}{n\log n}\right)$

Продолжение

№	Асимптотическое свойство	Условие, накладываемое на $p(\theta)$	Условие, накладываемое на числа $\{a_n\}_0^\infty$
8	$\lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(z)=\pi(z)$ равномерно в $\|z\|\leqslant 1$	достаточно (3): $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна и $\|p(\theta+\delta)-p(\theta)\|<$ $<L\|\log\delta\|^{-1-\lambda}$, $\lambda>0$, $\theta, \theta+\delta\in[0, 2\pi]$	достаточно (6): $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|a_n\|<+\infty$
9	$\lim\limits_{n\to\infty} P_n^*(z)=\pi(z)$ равномерно для $\|z\|\leqslant r<R$, $R>1$, $\pi(z)$ регулярна для $\|z\|<R$.	необходимо и достаточно (8): $p(w)=\{\pi(e^{iw})\,\overline{\pi}(e^{-iw})\}^{-1}$, $w=\frac{1}{i}\log z=u+iv$, $\pi(e^{iw})$ регулярна в области $v>\log\frac{1}{R}$ и неравна нулю в области $v>0$	необходимо и достаточно (8): $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|a_n\|}\leqslant\frac{1}{R}<1$

Введем тригонометрические моменты $\{c_n\}_0^\infty$ обложения $d\sigma(\theta)$.

$$c_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,d\sigma(\theta),\quad c_{-n}=\bar{c}_n\quad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

и рассмотрим формальное разложение Фурье — Стильтьеса

$$d\sigma(\theta)\sim\frac{c_0}{2}+\Re\sum_{k=1}^{\infty}c_k e^{ik\theta} \tag{6}$$

или соответствующую гармоническую функцию

$$H(z)=\frac{c_0}{2}+\Re\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k,\quad |z|<1, \tag{7}$$

положительную в области $|z|<1$.

Исследование свойств функции $\sigma(\theta)$ по ее коэффициентам Фурье хорошо известно; в добавление к этому мы выведем некоторые свойства функции $\sigma(\theta)$, исходя из соответствующих определителей Тёплица

$$\Delta_n=|c_{i-k}|_0^n\quad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

являющихся в конечном результате некоторыми комбинациями коэффициентов $\{c_n\}$.

Результаты сведены в таблице II; в случае № 4 Δ'_{2n} обозначает минор определителя Δ_{2n}, соответствующий элементу, стоящему в центре определителя.

Таблица II

№	Свойства функции $\sigma(\theta)$	Условие, накладываемое на определители Тёплица Δ_n
1	Множество точек роста функции $\sigma(\theta)$ всюду плотно в $[0,2\pi]$	достаточно ([5]): $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}} = 1$
2	Множество точек, в которых $\sigma'(\theta) = p(\theta)$ положительна и непрерывна, не содержит ни одного интервала длиной $> 4\alpha$	достаточно ([5]): $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}} = \sin^2\alpha$
3	$\int_0^{2\pi} \log p(\theta)\,d\theta > -\infty$	необходимо и достаточно: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} > 0$
4	$\int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{p(\theta)} < +\infty$	необходимо и достаточно: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\Delta_{2n}}{\Delta'_{2n}} > 0$
5	Функция $\sigma(\theta)$ непрерывна на отрезке $[0,2\pi]$	достаточно: $\dfrac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2} \geqslant 1 - \left(\dfrac{\alpha}{n+\beta}\right)^2$, $n \geqslant n_0$, $\alpha < \dfrac{1}{2}$
6	Функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, функция $p(\theta)$ непрерывна, положительна и ограничена сверху и снизу на отрезке $[0,2\pi]$; для функции $\log p(\theta)$ существует сопряженная функция во всех точках отрезка $[0,2\pi]$	достаточно ([6]): $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 - \dfrac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}} < +\infty$
6′	Функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна; $p(\theta) = \dfrac{1}{H_n(\theta)}$, где $H_n(\theta)$ — тригонометрический полином порядка n, положительный на отрезке $[0,2\pi]$	необходимо и достаточно ([9]): $\Delta_{n+k} = \left(\dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)^k \Delta_n$ $(k = 1, 2, \ldots)$

§ 1

Мы имеем, по (4), $0 < h_{n+1} \leqslant h_n$; следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} h_n = h_0 \prod_{k=0}^{\infty} (1 - |a_k|^2) = h \geqslant 0. \tag{1.1}$$

Обозначим через L^2_σ гильбертово пространство комплекснозначных функций $f(\theta)$, для которых

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\,d\sigma(\theta) < +\infty;\,* \tag{1.2}$$

определим, как обычно, скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\,\overline{f_2(\theta)}\,d\sigma(\theta), \quad f_1, f_2 \in L^2_\sigma, \tag{1.3}$$

норму элемента

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\theta)|^2\,d\sigma(\theta)\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L^2_\sigma \tag{1.4}$$

и коэффициенты $\{f_k\}$ Фурье — Чебышева функции $f(\theta) \in L^2_\sigma$:

$$f_k = (f, \hat{P}_k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\overline{\hat{P}_k(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta), \quad f(\theta) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \hat{P}_k(e^{i\theta}), \tag{1.5}$$

где $\left\{\hat{P}_k(z) = \frac{P_k(z)}{\sqrt{h_k}}\right\}_0^\infty$ — нормированные полиномы.

ТЕОРЕМА 1.1. *Последовательность полиномов $\{P^*_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ сильно сходится к некоторой предельной функции $f_0(\theta) \in L^2_\sigma$; при этом все коэффициенты Фурье — Чебышева функции $e^{-i\theta} f_0(\theta)$ равны нулю.*

Для доказательства воспользуемся формулой

$$P^*_{n+1}(z) = P^*_n(z) - a_n z P_n(z) = 1 - z\sum_{k=0}^{n} a_k P_k(z) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1.6}$$

вытекающей из (2); отсюда, пользуясь (4), находим для $m > n$

$$\| P^*_m - P^*_n \|^2 = \sum_{k=n}^{m-1} |a_k|^2 h_k = h_n - h_m; \tag{1.7}$$

пользуясь (1.1), получаем

$$\lim_{m,n\to\infty} \| P^*_m - P^*_n \| = 0; \tag{1.8}$$

в силу полноты пространства L^2_σ, существует функция $f_0(\theta) \in L^2_\sigma$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \| P^*_n - f_0 \|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} | P^*_n(e^{i\theta}) - f_0(\theta)|^2\,d\sigma(\theta)\right\} = 0. \tag{1.9}$$

Таким образом, пользуясь (1.6), мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} \| e^{-i\theta}[1 - f_0(\theta)] - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sqrt{h_k}\,\hat{P}_k(e^{i\theta}) \| = 0, \tag{1.10}$$

откуда вытекает формальное разложение Фурье — Чебышева:

* Интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса.

$$e^{-i\theta}[1-f_0(\theta)] \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sqrt{h_k}\, \hat{P}_k(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(e^{i\theta}). \tag{1.11}$$

Но из формулы (2) легко находим

$$a_k \sqrt{h_k} = (e^{i-\theta}, \hat{P}_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.12}$$

откуда

$$e^{-i\theta} \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(e^{i\theta}); \tag{1.13}$$

сравнивая (1.11) с (1.13), мы видим, что все коэффициенты Фурье—Чебышева функции $e^{-i\theta} f_0(\theta)$ равны нулю.

Примечание 1.1. Формула (1.9) характеризует стремление в среднем последовательности $\{P_n^*(e^{i\theta})\}$ к предельной функции $f_0(\theta)$, т. е. является асимптотической формулой «в среднем»; однако совершенно очевидно, что в случае полноты системы $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ в пространстве L_σ^2 функция $f_0(\theta)$ эквивалентна нулю, т. е. обращается в нуль на множестве точек роста функции $\sigma(\theta)$.*

§ 2

Займемся сперва таблицей I; рассмотрим случай 1. Из (2) имеем

$$P_n^*(z) = \prod_{k=0}^{n-1} \left\{1 - z a_k \frac{P_k(z)}{P_k^*(z)}\right\} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.1}$$

откуда для $|z| \leqslant 1$ получаем неравенства **:

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 - |a_k|) \leqslant |P_n^*(z)| \leqslant \prod_{k=0}^{n-1} (1 + |a_k|). \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что для $|z| \leqslant 1$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(1 - |a_k|) \leqslant \frac{1}{n} \log |P_n^*(z)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(1 + |a_k|) < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|. \tag{2.3}$$

Так как при $|a_k| \leqslant \alpha < 1$

$$\log(1 - |a_k|) \geqslant -\frac{|a_k|}{1-\alpha}, \tag{2.4}$$

то мы находим

$$-\frac{1}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \leqslant \frac{1}{n} \log |P_n^*(z)| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|, \quad |z| \leqslant 1, \tag{2.5}$$

и, следовательно, при условиях

$$|a_k| \leqslant \alpha < 1 \quad (k = 0, 1, \ldots), \quad \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right\} = 0 \tag{2.6}$$

---

* В §§ 3—8 рассмотрены случаи 3—9 таблицы I, которые соответствуют неполноте системы $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ в L_σ^2.

** Так как все корни полиномов $\{P_n(z)\}^\infty$ лежат в области $|z| < 1$, то для $|z| \leqslant 1$ имеем $|P_n(z)| \leqslant |P_n^*(z)|$.

имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|P_n^*(z)|}=1 \tag{2.7}$$

равномерно в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ *.

Достаточность того условия, что функция $p(\theta)$ положительна почти всюду в $[0,2\pi]$ доказана в нашей статье ([7]).

Для рассмотрения случая 2 таблицы I достаточно применить формулу (2), откуда следует

$$\left|\frac{P_{n+1}^*(z)}{P_n^*(z)}-1\right|=\left|za_n\frac{P_n(z)}{P_n^*(z)}\right|; \tag{2.8}$$

достаточность условия $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ очевидна; для доказательства необходимости достаточно записать

$$\left|\frac{P_{n+1}^*(e^{i\theta})}{P_n^*(e^{i\theta})}-1\right|=|a_n| \quad (n=0,1,2,\dots). \tag{2.9}$$

Рассмотрим теперь случай 3; для того частного случая, когда функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, Г. Сегё [([15]), гл. XII] доказал, что условие

$$\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta>-\infty \tag{2.10}$$

достаточно для справедливости асимптотической формулы

$$\lim_{n\to\infty}P_n^*(z)=\pi(z) \quad (|z|<1). \tag{2.11}$$

Автором была доказана ([6]) необходимость и достаточность этого же условия (2.10) при произвольной функции $\sigma(\theta)$, а также была установлена эквивалентность условия (2.10) и условия

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<+\infty. \tag{2.12}$$

Эквивалентность условий (2.10) и (2.12) вытекает также из формулы

$$h=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta\right\}, \tag{2.13}$$

которую вывел Г. Сегё ([18]) в том частном случае, когда функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, и С. Верблюнский ([22]) в общем случае.

---

* В нашей статье ([7]) выведено условие не только необходимое, но и достаточное для справедливости (2.7):

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\,SpA_n^k\right\}=0 \quad (k=1,2,\dots),$$

где A_n — некоторая матрица, зависящая от $\{a_i\}_0^{n-1}$ [см. ([7]), формула (2.15)].

§ 3

Нами было показано, что при условии (2.10) функция $\frac{\sqrt{h}}{\pi(z)}$, $|z|<1$, принадлежит классу H_2 (6); следовательно, почти всюду в $[0,2\pi]$ существуют радиальные предельные значения

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{\pi(re^{i\theta})} = \frac{1}{\pi(e^{i\theta})}, \tag{3.1}$$

через которые она может быть выражена интегралом Коши, причем почти всюду в $[0,2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{1}{|\pi(re^{i\theta})|^2} = p(\theta). \tag{3.2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}-1\right|^2 d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta - 2\Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}d\theta\right\} + 1 =$$
$$= \frac{1}{2\pi h}\int_0^{2\pi}|P_n^*(e^{i\theta})|^2 p(\theta)\,d\theta - 2\Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{P_n^*(z)}{\pi(z)}\cdot\frac{dz}{z}\right\} + 1 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{h_n}{h} - 2\Re\left\{\frac{P_n^*(0)}{\pi(0)}\right\} + 1; \tag{3.3}$$

так как $P_n^*(0) = \pi(0) = 1$, то имеем неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}-1\right|^2 d\theta \leqslant \frac{h_n}{h} - 1, \tag{3.4}$$

откуда окончательно находим

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}-1\right|^2 d\theta\right\} = 0.^* \tag{3.5}$$

Обратно, из (3.5), где $\frac{1}{\pi(z)}$ — некоторая функция класса H_2, вытекает для всех $n \geqslant n_0$

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(re^{i\theta})}{\pi(re^{i\theta})}-1\right|^2 d\theta < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0); \tag{3.6}$$

но так как при $|z|<1$ имеем, пользуясь неравенством Буняковского—Шварца,

$$\left|\frac{P_n^*(z)}{\pi(z)}-1\right|^2 \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}\cdot\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(re^{i\theta})}{\pi(re^{i\theta})}-1\right|^2 d\theta < \varepsilon', \tag{3.7}$$

---

* Для случая, когда функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна, эта формула впервые выведена В. Смирновым (14), а затем Г. Сегё (15); легко видеть, что полином $Q_n(z)$, фигурирующий в формуле (46) В. Смирнова, тождественен полиному $P_n^*(z)$.

то при $|z|<1$

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(z) = \pi(z); \tag{3.8}$$

отсюда, как показано в ([6]), вытекает условие (2.10) или (2.12).

На основании (1.9), мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n^*(e^{i\theta})-f_0(\theta)|^2\frac{hd\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2}\leqslant \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n^*(e^{i\theta})-f_0(\theta)|^2 d\sigma(\theta)\right\}=0,$$

откуда находим

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{P_n^*(e^{i\theta})}{\pi(e^{i\theta})}-\frac{f_0(\theta)}{\pi(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta\right\}=0. \tag{3.9}$$

Сопоставление (3.9) с (3.5) показывает, что при условии (2.10) почти всюду в $[0,2\pi]$ справедливо равенство $f_0(\theta)=\pi(e^{i\theta})$.

Если через $E\subset[0,2\pi]$ обозначить множество точек отрезка $[0,2\pi]$, в которых производная $p(\theta)=\sigma'(\theta)$ существует и положительна, то мы имеем

$$f_0(\theta)=\begin{cases}\pi(e^{i\theta}), & \theta\in E,\\ 0\ , & \theta\,\overline{\in}\,E.\end{cases} \tag{3.10}$$

§ 4

Из (3.5) вытекает существование подпоследовательности, сходящейся к $\pi(e^{i\theta})$

$$\lim_{\nu\to\infty} P_{n_\nu}^*(e^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}) \tag{4.1}$$

почти всюду на отрезке $[0,2\pi]$; *обратно, из этого предельного соотношения* (4.1), *где* $\frac{1}{\pi(z)}\in H_2$, *вытекает* (2.10) *или* (2.12).

Действительно, из соотношения

$$\lim_{\nu\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})-f_0(\theta)|^2 d\sigma(\theta)\right\}=0 \tag{4.2}$$

вытекает существование новой подпоследовательности $\{P_{n_k}(e^{i\theta})\}$, для которой имеем одновременно

$$\lim_{k\to\infty} P_{n_k}^*(e^{i\theta})=\pi(e^{i\theta}),\qquad \lim_{k\to\infty} P_{n_k}^*(e^{i\theta})=f_0(\theta); \tag{4.3}$$

так как оба предельных соотношения справедливы почти всюду на отрезке $[0,2\pi]$, то почти всюду имеем $f_0(\theta)=\pi(e^{i\theta})$; так как $\frac{1}{\pi(z)}\in H_2$, то существует интеграл

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{|\pi(e^{i\theta})|^2}d\theta>-\infty; \tag{4.4}$$

следовательно, функция $f_0(\theta)$ не эквивалентна нулю, а так как все коэффициенты Фурье — Чебышева функции $e^{-i\theta}f_0(\theta)$ равны нулю, то система $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ неполна в L_σ^2. Покажем, что *неполнота, а следовательно, и незамкнутость ортогональной системы* $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ *в* L_σ^2 *эквивалентна условию* (2.10).

При условии (2.10) ортогональная система $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ неполна, а следовательно, и незамкнута в L_σ^2, ибо существует функция $e^{i\theta}\pi(e^{i\theta})$, не эквивалентная нулю, у которой все коэффициенты Фурье — Чебы-

шева равны нулю. Обратно, если существует функция $\varphi(\theta)\in L_\sigma^2$, не эквивалентная нулю, со всеми коэффициентами Фурье — Чебышева равными нулю, то для нее, очевидно, интеграл типа Коши — Стильтьеса

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\overline{\varphi(\theta)}\,d\sigma(\theta)}{e^{i\theta}-z} \tag{4.5}$$

тождественно равен нулю для $|z|>1$; отсюда вытекает, что в области $|z|<1$ функция $\lambda(z)$, изображаемая формулой (4.5), принадлежит классу H_1, и что почти всюду в $[0, 2\pi]$ существуют радиальные предельные значения

$$\lim_{r\to 1-0}\lambda(re^{i\theta})=\lambda(e^{i\theta})=e^{-i\theta}\,\overline{\varphi(\theta)}\,\sigma'(\theta), \tag{4.6}$$

для которых существуют интегралы Лебега [(12), гл. IV]

$$\int_0^{2\pi}|\lambda(e^{i\theta})|\,d\theta<+\infty,\quad \int_0^{2\pi}\log|\lambda(e^{i\theta})|\,d\theta>-\infty. \tag{4.7}$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\log|\varphi(\theta)|\,d\theta+\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta>-\infty. \tag{4.8}$$

С другой стороны, из условия $\varphi(\theta)\in L_\sigma^2$ находим

$$\int_0^{2\pi}|\varphi(\theta)|^2 p(\theta)\,d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}|\varphi(\theta)|^2\,d\sigma(\theta)<+\infty, \tag{4.9}$$

откуда вытекает

$$2\int_0^{2\pi}\log|\varphi(\theta)|\,d\theta+\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta<+\infty. \tag{4.10}$$

Сопоставление (4.10) с (4.8) дает

$$\int_0^{2\pi}\log p(\theta)\,d\theta>-\infty. \tag{4.11}$$

Таким образом, *условие* (4.11) *необходимо и достаточно для неполноты (а следовательно, и незамкнутости) системы* $\{P_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ *в пространстве* L_σ^2. *

Примечание 4.1. Полагая $d\sigma(\theta)=p(\theta)\,d\theta$, Г. Сегё нашел [(16), стр. 184], что для функции

$$\varphi_0(\theta)=\frac{\pi(e^{i\theta})}{1-\bar{\alpha}e^{i\theta}}\left[\overline{\pi(\alpha)}-\overline{\pi(e^{i\theta})}\right]\quad(|\alpha|<1) \tag{4.12}$$

* Необходимость и достаточность условия (4.11) для неполноты системы функций $\{e^{ik\theta}\}_0^\infty$ в пространстве L_σ^2 была впервые доказана А. Колмогоровым (10) и вытекает, как частный случай, из более общих результатов М. Крейна (11) и Н. Ахиезера (1), (2).

все коэффициенты Фурье — Чебышева равны нулю. Из наших предыдущих рассуждений вытекает, что самая общая формула, дающая все функции $\varphi(\theta)$, обладающие этим свойством, такова:

$$\varphi(\theta)=\begin{cases} e^{-i\theta}|\pi(e^{i\theta})|^2\overline{\lambda(e^{i\theta})}, & \theta\in E,\\ 0, & \theta\overline{\in} E,\end{cases} \tag{4.13}$$

где $\lambda(e^{i\theta})$ — предельные значения произвольной функции $\lambda(z)\in H_1$.

В случае, рассмотренном Г. Сегё, функция $\lambda(z)$ имеет вид:

$$\lambda(z)=\frac{1}{z-\alpha}\left\{\frac{\pi(\alpha)}{\pi(z)}-1\right\} \quad (|\alpha|<1); \tag{4.14}$$

более простой пример получим, если возьмем $\lambda(z)=\frac{1}{\pi(z)}$; тогда

$$\varphi(\theta)=e^{-i\theta}f_0(\theta)=\begin{cases} e^{-i\theta}\pi(e^{i\theta}), & \theta\in E,\\ 0, & \theta\overline{\in} E.\end{cases} \tag{4.15}$$

§ 5

Справедливость утверждения в случае 4 таблицы I вытекает из неравенства

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n^*(e^{i\theta})-\pi(e^{i\theta})|\,d\theta\right\}^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P_n^*(e^{i\theta})-\pi(e^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\pi(e^{i\theta})|^2\,d\theta. \tag{5.1}$$

В силу условия

$$\frac{1}{h}\int_0^{2\pi}|\pi(e^{i\theta})|^2\,d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{p(\theta)}<+\infty \tag{5.2}$$

и (3.5), левая часть (5.1) стремится к нулю.

Рассмотрим случай 5; из условия (2.10) вытекает сходимость последовательности

$$\lim_{n\to\infty}P_n^*(z)=\pi(z), \quad |z|<1, \tag{5.3}$$

и, следовательно, слабая сходимость последовательности $\left\{\frac{1}{P_n^*(e^{i\theta})}\right\}_0^\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\theta}d\theta}{P_n^*(e^{i\theta})}\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{ik\theta}d\theta}{\pi(e^{i\theta})} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots); \tag{5.4}$$

при этом ([6])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2}=\frac{c_0}{2h_n}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2}\leqslant\frac{c_0}{2h}. \tag{5.5}$$

Если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна,

$$\sigma(\theta)=\int_0^\theta \frac{h\,d\varphi}{|\pi(e^{i\varphi})|^2}, \tag{5.6}$$

то в соотношении (5.5) имеет место знак равенства; отсюда вытекает сильная сходимость последовательности $\left\{\frac{1}{P_n^*(e^{i\theta})}\right\}_0^\infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{P_n^*(e^{i\theta})}-\frac{1}{\pi(e^{i\theta})}\right|^2 d\theta=0. \tag{5.7}$$

Обратно, из условия (5.7) выводим, так же как и в § 3, условие (5.3), откуда следуют (2.10) и (5.4); далее,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{h_n}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|P_n^*(e^{i\theta})|^2}\right\}=\frac{c_0}{2}=\frac{h}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{|\pi(e^{i\theta})|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\sigma(\theta), \tag{5.8}$$

т. е. полная вариация функции $\sigma(\theta)$ равна полной вариации ее абсолютно непрерывной компоненты

$$\int_0^\theta \frac{h\,d\varphi}{|\pi(e^{i\varphi})|^2}; \tag{5.9}$$

следовательно, функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна.

Переходим к случаю 6; для сходимости ортогонального ряда

$$\sum_{n=0}^\infty a_n P_n(e^{i\theta}) \tag{5.10}$$

почти всюду на множестве E' точек роста функции $\sigma(\theta)$ достаточно условие Радемахера ([19]) — Меньшова ([13]):

$$\sum_{n=2}^\infty |a_n|^2\log^2 n<+\infty \tag{5.11}$$

или условие Меньшова ([13]):

$$\sum_{n=0}^\infty |a_n|^k<+\infty,\quad k<2. \tag{5.12}$$

Таким образом, по (1.6) при (5.11) или (5.12), мы имеем

$$\lim_{n\to\infty}P_n^*(e^{i\theta})=f(\theta) \tag{5.13}$$

почти всюду в E'; но условие (5.11) или (5.12) влечет за собой условие (2.12), откуда вытекает, во-первых, тот факт, что мера множества E' равна 2π, а во-вторых, существование подпоследовательности $\{P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})\}$, для которой почти всюду в $[0, 2\pi]$

$$\lim_{\nu\to\infty}P_{n_\nu}^*(e^{i\theta})=\pi(e^{i\theta}); \tag{5.14}$$

следовательно, почти всюду в $[0, 2\pi]$

$$f(\theta) = \pi(e^{i\theta}).$$

Переходим к случаю 7; в случаях 3—9 в области $|z| < 1$ мы имеем

$$\pi(z) = \lim_{n\to\infty} P_n^*(z) = 1 - z \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(z), \tag{5.15}$$

причем предельная функция $\pi(z)$ имеет почти всюду на окружности $|z| = 1$ радиальные предельные значения; возникает естественный вопрос: при каких условиях, наложенных на $\{a_n\}_0^\infty$, сходимость в некоторой точке $\theta = \theta_0$ последовательности

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta_0}) = f(\theta_0) \tag{5.16}$$

влечет за собой существование соответствующего радиального предельного значения

$$\pi(e^{i\theta_0}) = \lim_{r\to 1-0} \pi(re^{i\theta_0}) = f(\theta_0) \tag{5.17}$$

(аналогично теореме Абеля в теории степенных рядов) и обратно: в каком случае существование радиального предельного значения (5.17) влечет за собой сходимость последовательности (5.16) (аналогично теореме Таубера *)?

Простой пример показывает необходимость некоторых ограничений, которые надо наложить на числа $\{a_n\}_0^\infty$ для справедливости этих утверждений; пусть, например (6),

$$a_n = \frac{1}{n+\beta} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad \beta > 1: \tag{5.18}$$

тогда

$$P_n^*(z) = 1 - \frac{z(z^n - 1)}{(n+\beta-1)(z-1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5.19}$$

откуда

$$\pi(z) = \lim_{n\to\infty} P_n^*(z) = 1, \quad |z| < 1. \tag{5.20}$$

В точке $z = 1$ имеем

$$P_n^*(1) = \frac{\beta - 1}{n+\beta-1}, \quad \lim_{n\to\infty} P_n^*(1) = 0; \tag{5.21}$$

в то же время

$$\lim_{r\to 1-0} \pi(r) = \pi(1) = 1. \tag{5.22}$$

§ 6

Рассмотрим теорему, дающую достаточные условия для того, чтобы условия (5.16) и (5.17) были эквивалентны.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть ортогональная система* $\{P_n(z)\}_0^\infty$ *подчинена условию* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$ *и пусть*

* См. А. Таубер (21), а также Э. Ландау [(20), гл. III], где приведены дальнейшие обобщения теоремы Таубера.

$$|P_n(z)| \leqslant M_n, \quad |z| \leqslant 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6.1}$$

*где числа $\{M_n\}$ образуют неубывающую последовательность *; пусть*

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(z), \quad |z| < 1; \tag{6.2}$$

тогда, если числа $\{b_n\}$ подчинены условию

$$b_n = o\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{M_n}}\right), \tag{6.3}$$

то существование радиального предельного значения

$$\lim_{r \to 1-0} \varphi(re^{i\theta_0}) = \varphi(e^{i\theta_0}), \quad \theta_0 \in E, \tag{6.4}$$

эквивалентно сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(e^{i\theta_0}) = \varphi(e^{i\theta_0}). \tag{6.5}$$

Отметим, прежде всего, что $M_n \geqslant 1$, ибо полином $T_n(z) = z^n$ наименее уклоняется от нуля на окружности $|z| = 1$ из всех полиномов вида $z^n + \cdots$. Из равномерной сходимости ряда ([6])

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|P_k(z)|^2}{h_k} = \frac{|\pi(z)|^2}{h(1-|z|^2)}, \quad |z| \leqslant r < 1, \tag{6.6}$$

вытекает равномерная сходимость в той же области ряда (6.2), ибо

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k P_k(z)\right|^2 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 h_k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|P_k(z)|^2}{h_k} = o\left(\frac{1}{nM_n^{\frac{2}{3}}}\right) \cdot \frac{|\pi(z)|^2}{1-|z|^2}. \tag{6.7}$$

Так как для $\theta_0 \in E$ существует радиальное предельное значение

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{h}{|\pi(re^{i\theta_0})|^2} = \frac{h}{|\pi(e^{i\theta_0})|^2} = p(\theta_0) > 0, \tag{6.8}$$

то $|\pi(re^{i\theta_0})| = O(1)$; поэтому окончательно

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k P_k(re^{i\theta_0})\right| = o\left(n^{-\frac{1}{3}} M_n^{-\frac{1}{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r}}, \quad 0 < r < 1. \tag{6.9}$$

Далее, так как при $|z| \leqslant 1$ имеем $|P_n(z)| \leqslant M_n$, то в той же области имеем

$$|P_n'(z)| \leqslant nM_n,$$

следовательно,

$$|P_n(re^{i\theta_0}) - P_n(e^{i\theta_0})| \leqslant (1-r)\, nM_n. \tag{6.10}$$

---

* По (2.2), можно положить $M_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1 + |a_k|)$ или $M_n = \exp\left\{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right\}$.

Выберем достаточно большое $m \geqslant N$ и оценим разность

$$\varphi(re^{i\theta_0}) - \sum_{n=0}^{m} b_n P_n(e^{i\theta_0}).$$

По (6.10),

$$\left|\varphi(re^{i\theta_0}) - \sum_{n=0}^{m} b_n P_n(e^{i\theta_0})\right| \leqslant \left|\sum_{n=0}^{m} b_n [P_n(re^{i\theta_0}) - P_n(e^{i\theta_0})]\right| +$$

$$+ \sum_{k=m+1}^{\infty} |b_k| |P_k(re^{i\theta_0})| \leqslant (1-r)\sum_{n=1}^{m} n|b_n| M_n + \sum_{k=m+1}^{\infty} |b_k| |P_k(re^{i\theta_0})|. \quad (6.11)$$

Для первой суммы находим, пользуясь (6.3), оценку

$$\sum_{n=1}^{m} n|b_n| M_n = o(1) \sum_{n=1}^{m} M_n^{\frac{2}{3}} \leqslant o(1)\, m M_m^{\frac{2}{3}}; \quad (6.12)$$

для второй суммы имеем оценку (6.9); окончательно находим

$$\left|\varphi(re^{i\theta_0}) - \sum_{n=0}^{m} b_n P_n(e^{i\theta_0})\right| = o(1)(1-r)\, m M_m^{\frac{2}{3}} + o(1)\, m^{-\frac{1}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}} M_m^{-\frac{1}{3}}. \quad (6.13)$$

Полагая

$$1 - r = m^{-1} M_m^{-\frac{2}{3}}, \quad (6.14)$$

получаем

$$\left|\varphi(re^{i\theta_0}) - \sum_{n=0}^{m} b_n P_n(e^{i\theta_0})\right| = o(1). \quad (6.15)$$

Вводя обозначения

$$\varphi(re^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta_0}) = \varepsilon(r), \quad \sum_{n=0}^{m} b_n P_n(e^{i\theta_0}) - \varphi(e^{i\theta_0}) = \eta(m), \quad (6.16)$$

мы имеем, пользуясь (6.15),

$$\lim_{m\to\infty} \{\varepsilon(r) - \eta(m)\} = 0; \quad (6.17)$$

поэтому эквивалентны оба условия:

$$\lim_{r\to 1-0} \varepsilon(r) = 0, \quad \lim_{m\to\infty} \eta(m) = 0, \quad (6.18)$$

т. е. условия (6.4) и (6.5) эквивалентны.

Примечание. 6.1 Условие (6.3) можно заменить условием *

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 M_n^{\frac{2}{3}} < +\infty. \quad (6.19)$$

Действительно, вводя обозначение

$$\varepsilon_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} n|b_n|^2 M_n^{\frac{2}{3}}, \quad (6.20)$$

* Оно аналогично условию тауберовой теоремы Фейера [(20), гл. III]. Наше доказательство теоремы 6.1 является незначительным видоизменением доказательства Таубера и Фейера [см. (20), §§ 7, 11, 13].

мы имеем из (6.11)

$$\left|\varphi(re^{i\theta_0})-\sum_{n=0}^{m}b_nP_n(e^{i\theta_0})\right|\leqslant(1-r)\sqrt{\sum_{n=1}^{m}n\,|\,b_n\,|^2M_n^{\frac{2}{3}}\cdot\sum_{n=1}^{m}nM_n^{\frac{4}{3}}}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty}n|\,b_n\,|^2M_n^{\frac{2}{3}}\cdot\sum_{n=m+1}^{\infty}h_nn^{-1}M_n^{-\frac{2}{3}}\frac{|\,P_n(re^{i\theta_0})\,|^2}{h_n}}\leqslant$$

$$\leqslant O(1)(1-r)\,mM_n^{\frac{2}{3}}+O(1)\,m^{-\frac{1}{2}}M_m^{-\frac{1}{3}}(1-r)^{-\frac{1}{2}}\varepsilon_m^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.21)$$

Полагая

$$1-r=m^{-1}M_m^{-\frac{2}{3}}\varepsilon_m^{\frac{1}{2}}, \qquad (6.22)$$

найдем

$$\left|\varphi(re^{i\theta_0})-\sum_{n=0}^{m}b_nP_n(e^{i\theta_0})\right|\leqslant O(1)\,\varepsilon_m^{\frac{1}{2}}+O(1)\,\varepsilon_m^{\frac{1}{4}}=o(1). \qquad (6.23)$$

§ 7

Рассмотрим два частных случая теоремы 6.1.

I. Пусть для достаточно больших $n\geqslant n_0$ имеем

$$|\,a_n\,|\leqslant\frac{\alpha}{n+\beta}; \qquad (7.1)$$

на основании (2.2) и (6.1), можно положить

$$M_n=\frac{(\beta+\alpha)\cdots(\beta+\alpha+n-1)}{\beta\cdots(\beta+n-1)}=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\beta)}=O(n^{\alpha}); \qquad (7.2)$$

поэтому, если

$$b_n=o\left(n^{-\frac{\alpha}{3}-1}\right), \qquad (7.3)$$

то будем иметь

$$b_n=o\left(n^{-1}M_n^{-\frac{1}{3}}\right). \qquad (7.4)$$

Таким образом, теорема 6.1 справедлива, если

$$|\,a_n\,|\leqslant\frac{\alpha}{n+\beta},\quad n\geqslant n_0, \qquad (7.5)$$

а числа $\{b_n\}$ подчинены одному из условий

$$b_n=o\left(n^{-\frac{\alpha}{3}-1}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\,b_n\,|^2\,n^{\frac{2\alpha}{3}+1}<+\infty. \qquad (7.6)$$

Это же заключение остается в силе, если вместо (7.1) имеем

$$a_n=o\left(\frac{1}{n}\right),$$

а числа $\{b_n\}$ подчинены одному из условий

$$b_n=O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}|\,b_n\,|^2\,n^{1+2\varepsilon}<+\infty,\quad \varepsilon>\frac{1}{3}. \qquad (7.7)$$

Случай $|a_n| < \frac{\alpha}{n+\beta}$ интересен потому, что *при* $\alpha < \frac{1}{2}$ *функция* $\sigma(\theta)$ *непрерывна.* Действительно, из (2.2) и (7.1) имеем

$$|P_n(e^{i\theta})| \geqslant O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right); \tag{7.8}$$

отсюда вытекает, что при $\alpha < \frac{1}{2}$ расходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|P_n(e^{i\theta})|^2}{h_n} = +\infty; \tag{7.9}$$

но, как мы показали в ([6]), имеет место соотношение

$$\sigma(\theta+0) - \sigma(\theta-0) = 2\pi : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|P_n(e^{i\theta})|^2}{h_n}; \tag{7.10}$$

отсюда вытекает непрерывность функции $\sigma(\theta)$ на всем отрезке $[0, 2\pi]$. Интересно отметить также, что важен не только порядок $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, но и величина коэффициента α; в случае $a_n = \frac{1}{n+\beta}$, рассмотренном в § 6, имеем такое обложение $d\sigma(\theta)$ ([6]): при $\theta \neq 0$ существует производная $p(\theta) = \frac{\beta-1}{\beta}$; в точке $\theta = 0$ сконцентрирована масса

$$\sigma(+0) - \sigma(-0) = \frac{2\pi}{\beta} \tag{7.11}$$

и, таким образом, функция $\sigma(\theta)$ не непрерывна.

II. Пусть для $n \geqslant n_0$ выполняются неравенства

$$|a_n| \leqslant \frac{\alpha}{n \log n}; \tag{7.12}$$

мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| = C + \alpha \log\log n; \tag{7.13}$$

на основании (2.3) и (6.1), можно положить

$$M_n = C' (\log n)^{\alpha}, \tag{7.14}$$

поэтому, если

$$b_n = o\left[n^{-1} (\log n)^{-\frac{\alpha}{3}}\right], \tag{7.15}$$

то будем иметь

$$b_n = o\left(n^{-1} M_n^{-\frac{1}{3}}\right). \tag{7.16}$$

Таким образом, *теорема* 6.1 *справедлива, если*

$$|a_n| \leqslant \frac{\alpha}{n \log n}, \quad n \geqslant n_0, \tag{7.17}$$

а числа $\{b_n\}$ *подчинены одному из условий*

$$b_n = o\left[n^{-1} (\log n)^{-\frac{\alpha}{3}}\right], \quad \sum_{n=2}^{\infty} n |b_n|^2 (\log n)^{\frac{2\alpha}{3}} < +\infty. \tag{7.17'}$$

Это же заключение остается в силе, если вместо (7.12) *имеем*

$$a_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right), \tag{7.18}$$

а числа $\{b_n\}$ *подчинены одному из условий*

$$b_n = O\left[\frac{1}{n(\log n)^{\varepsilon}}\right], \quad \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n|^2 (\log n)^{2\varepsilon} < +\infty, \quad \varepsilon > \frac{1}{3}. \tag{7.19}$$

Отсюда в частности вытекает, что *при выполнении условия*

$$|a_n| \leqslant \frac{\alpha}{n \log n}, \quad n \geqslant n_0, \quad \alpha < 3, \tag{7.20}$$

асимптотическая формула

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(e^{i\theta_0}) = \pi(e^{i\theta_0}) \tag{7.21}$$

справедлива во всех точках $\theta = \theta_0$, *в которых существуют радиальные предельные значения*

$$\lim_{r\to 1-0} \pi(re^{i\theta_0}) = \pi(e^{i\theta_0}), \tag{7.22}$$

и только в этих точках.

Вместо (7.20) можно потребовать, чтобы

$$a_n = o\left(\frac{1}{n \log n}\right), \tag{7.23}$$

или потребовать сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \exp\left[\frac{2}{3}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\right] < +\infty. \tag{7.24}$$

§ 8

Случай 7 таблицы I, т. е. $|a_n| \leqslant \frac{\alpha}{n \log n}$ приводит к результату, который является в некотором смысле наилучшим: асимптотическая формула (7.21) справедлива не только почти всюду, как мы могли утверждать в случае 6, а всюду, где она вообще может быть справедлива, т. е. всюду, где существует предел (7.22). Для того чтобы она была справедлива всюду и чтобы сходимость была равномерной, необходимы добавочные условия: функция $\sigma(\theta)$ должна быть абсолютно непрерывной, а ее производная $\sigma(\theta)$ должна быть непрерывной и положительной на отрезке $[0, 2\pi]$; кроме того, для всех $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ должен существовать интеграл (в смысле главного значения) [см. ([15]), § 10. 3]

$$\int_0^{2\pi} \log p(\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta - t}{2}\, d\theta; \tag{8.1}$$

эти условия вместе с условием (7.20) являются и достаточными для того, чтобы (7.21) имело место равномерно на всем отрезке $[0, 2\pi]$; однако они неудобны потому, что часть ограничений накладывается на функцию $\sigma(\theta)$, а часть — на последовательность $\{a_n\}$. Рассмотрим вместо них другие достаточные условия, приведенные в случае 8 таблицы I.

С. Н. Бернштейн показал [3], что, *если на отрезке* $[0, 2\pi]$ *функция* $\sigma(\theta)$ *абсолютно непрерывна, а ее производная* $p(\theta)$ *положительна и удовлетворяет условию Дини — Липшица:*

$$|p(\theta+\delta)-p(\theta)|<L|\log\delta|^{-1-\lambda},\qquad L,\lambda>0,\qquad \theta,\theta+\delta\in[0,2\pi],\tag{8.2}$$

то на всем отрезке $[0, 2\pi]$ *имеем* *

$$P_n^*(e^{i\theta})=\pi(e^{i\theta})+\varepsilon_n\tag{8.3}$$

с оценкой погрешности $\varepsilon_n = O[(\log n)^{-\lambda}]$.

Г. Сегё [17] показал справедливость (8.3) при более ограничительных условиях, чем (8.2) — по Сегё *достаточно, чтобы вес* $p(\theta)$ *был положителен и дважды дифференцируем на отрезке* $[0, 2\pi]$. Автором [6] дано условие, достаточное для справедливости (8.3), выраженное через числа $\{a_n\}$ — именно, *достаточна сходимость ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|<+\infty;\tag{8.4}$$

из этого условия вытекает *абсолютная непрерывность функции* $\sigma(\theta)$, *непрерывность и ограниченность сверху и снизу функции* $p(\theta)$ *и справедливость* (8.3) *с оценкой погрешности*

$$\varepsilon_n=O\left(\sum_{k=n}^{\infty}|a_k|\right).$$

Так как в случае 8 нашей таблицы имеем $M_n = O(1)$, то мы приходим к следующему обобщению теоремы Таубера: *пусть ортогональные полиномы* $\{P_n(z)\}$ *соответствуют случаю 8 таблицы I и пусть*

$$\varphi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nP_n(z),\tag{8.5}$$

где $b_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ *или* $\sum_{n=1}^{\infty} n\,|b_n|^2 < +\infty$; *тогда в каждой точке* $\theta_0\in[0, 2\pi]$, *в которой существует радиальное предельное значение*

$$\varphi(e^{i\theta_0})=\lim_{r\to 1-0}\varphi(re^{i\theta_0}),\tag{8.6}$$

имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_nP_n(e^{i\theta_0})=\varphi(e^{i\theta_0}).\tag{8.7}$$

Заканчивая рассмотрение таблицы I, отметим, что случай 9 рассмотрен в нашей статье [8].

§ 9

Рассмотрим таблицу II; так как [6]

$$|a_n|=\sqrt{1-\frac{\Delta_{n+1}\Delta_{n-1}}{\Delta_n^2}},\qquad \Delta_n=\left|c_{i-k}\right|_0^n,\tag{9.1}$$

то случаи 3, 5, 6 таблицы II сразу вытекают из результатов предыдущих параграфов; добавим, что случаи 1, 2 рассмотрены в [5], а случай 6 в [9].

---

* См. также Г. Сегё [[15], гл. XII].

В случае 6 таблицы II, который соответствует случаю 8 таблицы I, функция $\pi(z)$ непрерывна в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ и во всех точках окружности $|z| = 1$ имеет предельные значения. Так как [см. ([15]), гл. X]

$$\pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log p(\theta)\, d\theta\right\}, \quad |z| < 1, \tag{9.2}$$

то в этом случае существует функция, сопряженная с $\log p(\theta)$, причем

$$\operatorname{sgn} \pi(e^{i\theta}) = \frac{\pi(e^{i\theta})}{|\pi(e^{i\theta})|} = \exp\left\{-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log p(t) \operatorname{ctg}\frac{\theta-t}{2}\, dt\right\}. \tag{9.3}$$

Перейдем, наконец, к случаю 4 таблицы II. Рассмотрим решение следующей задачи: найти минимум h'_n интеграла

$$h'_n = \min\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left|1 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{i\theta} + \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{-ik\theta}\right|^2 d\sigma(\theta);\right. \tag{9.4}$$

мы можем поставить задачу еще и так: найти минимум h'_n интеграла

$$h'_n = \min\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |R_{2n}(e^{i\theta})|^2\, d\sigma(\theta),\right. \tag{9.5}$$

где

$$R_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} d_k z^k \tag{9.6}$$

— полином степени $2n$, подчиненный условию

$$d_n = 1. \tag{9.7}$$

Мы должны, таким образом, минимизировать форму Тёплица

$$L_n = \sum_{s=0}^{2n} \sum_{k=0}^{2n} d_s \bar{d}_k c_{s-k} \tag{9.8}$$

при условии (9.7). Условия экстремума дают

$$\sum_{k=0}^{2n} \bar{d}_k c_{s-k} = 0, \quad s \neq n; \quad \sum_{k=0}^{2n} \bar{d}_k c_{n-k} = \lambda, \tag{9.9}$$

откуда $h'_n = \lambda$; множитель λ находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_{-1} & c_{-2} & \cdots c_{-n} & \cdots c_{-2n} & 0 \\ c_1 & c_0 & c_{-1} & \cdots c_{-n+1} & \cdots c_{-2n+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots c_0 & \cdots c_{-n} & \lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{2n} & c_{2n-1} & c_{2n-2} & \cdots c_n & \cdots c_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 1 & \cdots 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{9.10}$$

откуда

$$h'_n = \lambda = \frac{\Delta_{2n}}{\Delta'_{2n}}, \tag{9.11}$$

где Δ'_{2n} — минор определителя Δ_{2n}, соответствующий элементу c_0, стоящему в его центре, т. е. строчке и столбцу с номерами $n+1$. Так как $h'_n \geqslant h'_{n+1} > 0$, то всегда существует предел

$$h' = \lim_{n\to\infty} h'_n \geqslant 0. \tag{9.12}$$

Условие

$$h' = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_{2n}}{\Delta'_{2n}} > 0 \tag{9.13}$$

эквивалентно тому, что система функций $\{e^{\pm ik\theta}\}_1^\infty$ не замкнута в L^2_σ, т. е. существует функция $\varphi(\theta) \in L^2_\sigma$, для которой

$$\int_0^{2\pi} \overline{\varphi(\theta)}\, e^{ik\theta} d\sigma(\theta) = 0 \quad (k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{9.14}$$

Так же как в § 4, находим, что интеграл типа Коши — Стильтьеса

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{\varphi(\theta)}\, e^{i\theta} d\sigma(\theta)}{e^{i\theta} - z} \tag{9.15}$$

тождественно равен нулю в области $|z| > 1$, а в области $|z| < 1$ изображает функцию $\lambda(z) \in H_1$; но в этом случае мы имеем также

$$\int_0^{2\pi} \overline{\varphi(\theta)}\, e^{-ik\theta} d\sigma(\theta) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{9.16}$$

откуда вытекает, что $\lambda(z) \equiv \mathrm{const}$. Так как почти всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ имеем

$$\lambda(e^{i\theta}) = \overline{\varphi(\theta)}\, \sigma'(\theta) = C, \tag{9.17}$$

то

$$+\infty > \int_0^{2\pi} |\varphi(\theta)|^2 d\sigma(\theta) > \int_0^{2\pi} |\varphi(\theta)|^2 \sigma'(\theta)\, d\theta = C^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sigma'(\theta)}. \tag{9.18}$$

Обратно, если выполняется это последнее условие, то легко видеть, что функция $\varphi(\theta)$, где

$$\overline{\varphi(\theta)} = \begin{cases} \dfrac{C}{p(\theta)}, & \theta \in E, \\ 0, & \theta \overline{\in} E, \end{cases} \tag{9.19}$$

ортогональна ко всем функциям системы $\{e^{\pm ik\theta}\}$ и не эквивалентна нулю, поэтому эта система неполна, а следовательно, и не замкнута в L^2_σ, т. е. выполняется (9.13).* Отметим в заключение, что если функция $\sigma(\theta)$ абсолютно непрерывна и, таким образом,

$$p(\theta) \sim \frac{c_0}{2} + \Re \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \tag{9.20}$$

---

* А. Н. Колмогоров ([10]) показал, что

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{p(\varphi)}.$$

то все результаты нашей таблицы относятся к неотрицательной функции $p(\theta)$; если же нас интересуют свойства функции $q(\theta)$, не подчиненной условию неотрицательности, то мы полагаем

$$p(\theta)=e^{q(\theta)}, \quad c_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{q(\theta)-in\theta}\,d\theta \quad (n=0, \pm 1, \ldots)$$

и получаем результаты, относящиеся к функции $e^{q(\theta)}$.

Поступило
5. VI. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ахиезер Н. И., Об одном предложении А. Н. Колмогорова и одном предложении М. Г. Крейна, Доклады Ак. Наук СССР, L (1945), 35—39.
[2] Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Москва, 1947.
[3] Бернштейн С. Н., О многочленах, ортогональных в конечном интервале Харьков, 1937.
[4] Геронимус Я. Л., Обобщенные ортогональные полиномы и формула Кристоффеля — Дарбу, Доклады Ак. Наук СССР, XXVI (1940), 893—896.
[5] Геронимус Я. Л., О полиномах, ортогональных на круге, о тригонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с нею функциях типа Каратеодори и Шура, Матем. сборн., 15 (57) (1944), 99—130.
[6] Геронимус Я. Л., Полиномы, ортогональные на круге, и их приложения, Сообщ. Харьк. мат. общ., т. 19 (1948), 35—120.
[7] Геронимус Я. Л. О некоторых асимптотических свойствах полиномов, Мат. сборн., 23 (65): 1 (1948), 77—78.
[8] Геронимус Я. Л., Об асимптотических формулах для ортогональных полиномов, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 3—14.
[9] Геронимус Я. Л., О положительных тригонометрических полиномах и гармонических функциях, Доклады Ак. Наук СССР, LI (1946), 569—572.
[10] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ. Математика, II, вып. 6 (1941).
Интерполирование и экстраполирование случайных стационарных последовательностей, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем. 5 (1941), 3—14.
[11] Крейн М. Г., Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова, Доклады Ак. Наук СССР, XLVI (1945), 95—98.
[12] Привалов И. И., Граничные свойства однозначных аналитических функций, Москва, 1941.
[13] Меньшов Д., Sur les séries de fonctions orthogonales, Fundamenta Mathematicae, IV (1923), 82—105; X (1927), 375—420.
[14] Смирнов В. И., Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, Изв. Ак. Наук СССР, ОМЕН, т. 3 (1932), 337—372.
[15] Szegö G., Orthogonal polynomials, New York, 1939.
[16] Szegö G., Beiträge zur Theorie der Toeplitzchen Formen, Math. Zeitschrift, IX (1921), 167—190.
[17] Szegö G., Über den asymptotischen Ausdruck von Polynomen, die durch eine Orthogonalitätseigenschaft definiert sind, Math. Ann., 85 (1922), 188—212.
[18] Szegö G., Über die Entwickelung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Ann., 82 (1921), 188—212.
[19] Rademacher H., Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann., 87 (1922), 112—138.
[20] Landau E., Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin, 1929.
[21] Tauber A., Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen, Monatshefte für Math. und Physik, 8 (1897), 273—277.
[22] Verblunsky S., On positive harmonic functions. II, Proc. London Math. Soc., 40 (1935), 290—320.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 145—154

Н. А. САПОГОВ

О ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе устанавливается несколько теорем о применимости закона больших чисел к суммам различного рода зависимых случайных величин.

1. Мы рассматриваем последовательность серий

$$x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

зависимых, вообще говоря, случайных величин. Через $\psi_{ni}(x)$ будем обозначать интегральный априорный закон распределения вероятносте величины x_{ni}, а через $\overline{\psi}_{ni}(x)$ — условный закон той же величины x_{ni} при условиях, каждый раз особо оговариваемых.

Мы считаем, что существуют условные математические ожидания $a'_{ni} = M'(x_{ni})$ величин x_{ni} при любых предположениях о прочих величинах x_{nj}:

$$a'_{ni} = M'(x_{ni}) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, d\overline{\psi}_{ni}(x).$$

Не оговаривая этого в дальнейшем, будем всегда считать, без ущерба для общности, что математическое ожидание a priori любой величины x_{ni} равно нулю, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x d\psi_{ni}(x) = 0.$$

Согласимся еще для упрощения записи не писать в дальнейшем у рассматриваемых величин индекс n, указывающий номер рассматриваемой серии, который, таким образом, всегда должен подразумеваться: будем писать x_i вместо x_{ni}, a_i вместо a_{ni} и т. д. $c_1, c_2, \ldots$ будут в дальнейшем всегда означать постоянные.

2. Отметим сначала одно простое общее предложение. Введем вместо величин x_i новые величины $x_i^{(T)}$, определяемые следующим образом: $x_i^{(T)} = x_i$, если $|x_i| \leqslant T$ и $x_i^{(T)} = 0$, если $|x_i| > T$. Допустим, что $T = T(n)$ выбрано так, что

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{|x|>T} d\psi_i(x) \to 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \int_{|x|>T} x\, d\psi_i(x) \to 0 \tag{2}$$

при $n \to \infty$. Тогда для применимости закона больших чисел к $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ необходима и достаточна применимость его к $S_n^{(T)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{(T)}$. При этом под применимостью закона больших чисел к случайной величине z_n, зависящей от параметра n, понимается, что вероятность неравенства $|z_n - M(z_n)| < \varepsilon$ стремится к достоверности, когда $n \to \infty$, каково бы ни было заданное $\varepsilon > 0$.

В частности, при условиях (1) и (2) для применимости закона больших чисел к S_n достаточно, чтобы

$$\frac{B_n^{(T)}}{n^2} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{3}$$

где

$$B_n^{(T)} = M\left[(S_n^{(T)} - A_n^{(T)})^2\right], \quad A_n^{(T)} = M(S_n^{(T)}).$$

Установим несколько теорем, фиксирующих те или иные конкретные группы достаточных условий для справедливости закона больших чисел.

ТЕОРЕМА 1. *Закон больших чисел применим к* $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, *если выполнены следующие условия:*

1) *интегралы* $\int_{-\infty}^{\infty} x\, d\bar{\psi}_i(x)$, *вычисленные в различных предположениях относительно величин* x_k, $k < i$, *сходятся равномерно относительно* i;

2) $M(x_i x_j) \to 0$ *при* $|j - i| \to \infty$ *также равномерно относительно* i.

ТЕОРЕМА 2. *Закон больших чисел применим к* $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, *если выполнены следующие условия:*

1) *существует число* p, $1 < p < 2$, *для которого*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p\, d\psi_i(x) \leqslant c_1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

2)
$$\int_{|x| \geqslant n^{\frac{p-1}{2(2-p)}}} |x|\, d\bar{\psi}_i(x) = o(1)$$

равномерно, каковы бы ни были x_k, $k < i$, $i = 1, 2, \ldots$

3) $M(x_i x_j) \to 0$ *при* $|i - j| \to \infty$ *равномерно относительно* i.

Из условий формулированных теорем вытекают соотношения (1), (2) и (3), чем и доказывается их справедливость.

Предельный случай теоремы 2, соответствующий значению $p = 2$, при котором условие (2) всегда выполняется, дается известной теоремой С. Н. Бернштейна [(1), стр. 193]:

Если дисперсии всех рассматриваемых величин x_i ограничены, т. е. $b_i < L$, и коэффициент корреляции $R_{i,k}$ между x_i и x_k равномерно стремится к нулю, то к $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ закон больших чисел применим.

3. Если рассматриваемые величины x_i равномерно ограничены, т. е. $|x_i| \leqslant L$ при всех i, то имеет место следующее условие применимости закона больших чисел, одновременно необходимое и достаточное.

ТЕОРЕМА 3. *Если при всех i $|x_i| \leqslant L$, то для применимости закона больших чисел к $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$, необходимо и достаточно, чтобы выражения*

$$\frac{1}{n} M\left(x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \tag{4}$$

равномерно приближались к нулю при $n \to \infty$.

Достаточность формулированного условия непосредственно вытекает из равенства

$$\frac{B_n}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} M\left(x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

С другой стороны,

$$\left|\frac{1}{n} M\left(x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| = \left|M\left[x_i \cdot \underset{x_i}{M'}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|M\left[x_i \cdot \varepsilon \cdot P'_{x_i}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| < \varepsilon\right) + x_i \cdot L \cdot P'_{x_i}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon L \cdot M\left[P'_{x_i}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| < \varepsilon\right)\right] + L^2 \cdot M\left[P'_{x_i}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)\right], \tag{5}$$

каково бы ни было данное $\varepsilon > 0$. Здесь через $\underset{x_i}{M'}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ обозначено условное математическое ожидание $\frac{S_n}{n}$ в предположении, что x_i приняло данное значение, равным образом, как через $P'_{x_i}(\cdots)$ обозначена условная вероятность неравенства, указанного в скобках, при том же предположении.

Допустим теперь, что к $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ закон больших чисел применим, т. е. для данных произвольно малых $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ для всех достаточно больших n справедливо неравенство

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) < \alpha.$$

Тогда, принимая во внимание, что будет справедливым и неравенство

$$M\left[P'_{x_i}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)\right] < \alpha,$$

из (5) получим:

$$\left|\frac{1}{n} M\left(x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| < \varepsilon L + L^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим частный случай, когда x_k принимают только по два значения, а именно 0 и 1 с вероятностями, a priori равными соответственно q_k и p_k. Пусть, кроме того, p_k^i и $q_k^i = 1 - p_k^i$ обозначают условные вероятности равенств $x_k = 1$ и $x_k = 0$ в предположении, что $x_i = 1$; а $p_k^{(i)}$ и $q_k^{(i)} = 1 - p_k^{(i)}$ — условные вероятности тех же равенств в предположении, что $x_i = 0$. Тогда получим

$$M(x_i) = p_i,$$

$$M[(x_i - p_i)(x_k - p_k)] = q_i p_i (p_k^i - p_k^{(i)}),$$

а выражение (4) будет иметь вид:

$$\frac{1}{n} M\left(x_i \cdot \sum_{k=l}^{n} x_k\right) = p_i \cdot q_i \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^i}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^{(i)}}{n}\right).$$

Теорема 3 приводит, таким образом, к следующей теореме С. Н. Бернштейна ([2]):

Если x_k принимают только по два значения 1 и 0 с вышеуказанными вероятностями $p_k, q_k, p_k^i, q_k^i, p_k^{(i)}, q_k^{(i)}$, то для приложимости к $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ закона больших чисел необходимо и достаточно, чтобы

$$p_i q_i \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^i}{n} - \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k^{(i)}}{n}\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty \tag{6}$$

равномерно относительно i.

С. Н. Бернштейн доказывает далее, что условие (6) может быть заменено несколько иным условием, а именно, для приложимости закона больших чисел к S_n необходимо и достаточно, чтобы

$$p_i q_i \cdot \left(\frac{\sum\limits_{k=i+1}^{n} p_k^i}{n} - \frac{\sum\limits_{k=i+1}^{n} p_k^{(i)}}{n}\right) \to 0 \text{ при } n \leftarrow \infty$$

равномерно по i.

Это видоизменение условия (6), делающее его более удобным для приложения к цепям Маркова, может быть произведено и в более общем случае теоремы 3. Вместо выражений (4), для приложимости

закона больших чисел к $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ в случае $|x_k| \leqslant L$ необходимо и достаточно, чтобы равномерно стремились к нулю выражения

$$\frac{1}{n} M\left(x_i \cdot \sum_{k=i+1}^{n} x_k \right).$$

Достаточность этого условия очевидна, необходимость же следует из того, что вероятность неравенства

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=i+1}^{n} x_k}{n} \right| < \varepsilon$$

становится при $n \to \infty$ сколь угодно близкой к 1, каково бы ни было i, если закон больших чисел применим к $S_n = \sum_{k=}^{n} x_k$ и величины x_k ограничены. Доказательство этого совпадает с соответствующим рассуждением С. Н. Бернштейна (2).

4. Будем рассматривать простую цепь величин x_h, принимающих дискретный ряд возможных значений $a_i^{(h)}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ с вероятностями a priori $p_i^{(h)}$ и вероятностями перехода $p_{j,\,i}^{(h)}$. Нашей целью является выяснение условий, при которых $S_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$ подчиняется при $n \to \infty$ закону больших чисел, и, в соответствии с принятой в начале этой статьи точкой зрения, мы будем считать, что, вообще говоря, величины x_h зависят не только от номера h, но также и от числа слагаемых n суммы S_n.

Условимся в следующей терминологии. Будем говорить, что цепь величин x_h подчиняется условию (A), если число возможных значений каждой величины x_h конечно: $a_1^{(h)}, a_2^{(h)}, \ldots, a_{k_h}^{(h)}$ и все вероятности перехода $p_{j,\,i}^{(h)}$ удовлетворяют неравенству:

$$p_{j,i}^{(h)} \geqslant \frac{\lambda}{k_h} > 0, \tag{A}$$

где $\lambda = \lambda(n)$ не зависит от i, j и h.

В случае, если для каждого h существует индекс $i = i(h)$, не зависящий от j, для которого выполнены неравенства

$$p_{j,\,i}^{(h)} \geqslant \lambda > 0 \tag{B}$$

(для всех j), где попрежнему $\lambda = \lambda(n)$ не зависит от i, j и h, причем в данном случае не требуется конечности числа возможных значений величин x_h, то будем говорить, что цепь подчинена условию (B).

Имеет место следующая теорема, в основных чертах принадлежащая А. А. Маркову.

ТЕОРЕМА. *Если для величин x_h, связанных в цепь, выполнены условия:*

1) $M'(|x_h|) < c_6$, *каковы бы ни были* h *и* x_l *при* $l < h$;

2) *цепь подчиняется условию* (A) *или условию* (B), *то*

$$\left| \underset{x_l}{M'}(x_h) - M(x_h) \right| < c_7(1-\lambda)^{h-k}, \tag{7}$$

каковы бы ни были x_l *при* $l \leqslant k < h$.

Доказательство см. в ([4]), § 4.

Докажем теперь теорему, дающую довольно широкие условия, при которых закон больших чисел применим к цепи Маркова.

ТЕОРЕМА 4. *Если величины* x_h, *связанные в цепь Маркова, таковы, что*

1) *существует число* p, $1 < p \leqslant 2$, *для которого*

$$M'(|x_h|^p) < c_8 \quad (h = 1, 2, \ldots),$$

каковы бы ни были x_l, $l < h$;

2) *цепь подчиняется условию* (A) *или условию* (B) *с* $\lambda = \frac{\varphi(n)}{n^{2-\frac{2}{p}}}$, *где возрастающая функция* $\varphi(n) \to \infty$, *то закон больших чисел применим к* $S_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$. (*Считаем* $M(x_h) = 0$.)

Чтобы сохранить соответствие с ранее принятыми обозначениями, введем интегральный априорный закон распределения вероятностей $\psi_i(x)$ величины x_i и условные законы $\overline{\psi}_i(x)$, т. е. положим

$$\psi_i(x) = \sum_{a_l^{(i)} < x} p_l^{(i)}, \quad \overline{\psi}_i(x) = \sum_{a_l^{(i)} < x} p_{j,l}^{(k,i)},$$

где суммирование в обеих суммах распространяется на значения l, для которых $a_l^{(i)} < x$.

Пусть $T = \varphi^{\frac{1}{4}}(n)\, n^{\frac{1}{p}}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{|x|>T} d\psi_i(x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{c_8}{\varphi^{\frac{p}{4}}(n)\, n} = \frac{c_8}{\varphi^{\frac{p}{4}}(n)} \to 0$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \int\limits_{|x|>T} |x|\, d\psi_i(x) < \sum_{i=1}^{n} \frac{c_8}{nT^{p-1}} = \frac{c_8}{\left[\varphi^{\frac{1}{4}}(n)\, n^{\frac{1}{p}}\right]^{p-1}} \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е. выполнены соотношения (1) и (2). Убедимся теперь в выполнимости и соотношения (3). Имеем:

$$B_n^{(T)} = \sum_{|i-j| \leqslant N} M\,[x_i^{(T)} - a_i^{(T)})(x_j^{(T)} - a_j^{(T)})] + \\ + \sum_{|i-j| > N} M\,[(x_i^{(T)} - a_i^{(T)})(x_j^{(T)} - a_j^{(T)})], \tag{8}$$

где N определено ниже. Заметив, что

$$\sqrt{b_i^{(T)} \cdot b_j^{(T)}} \leqslant \sqrt{M\,(x_i^{(T)})^2} \cdot \sqrt{M\,(x_j^{(T)})^2} \leqslant T^{2-p}\, c_8$$

и приняв

$$N = \frac{n^{2-\frac{2}{p}}}{\varphi^{1-\frac{p}{4}}(n)},$$

получим для первой суммы (8) нужную нам оценку

$$\Big| \sum_{|i-j| \leqslant N} \Big| \leqslant (2N+1)\, nT^{2-p} c_8 < \frac{3c_8}{\varphi^{\frac{1}{2}}(n)} n^2 = o(n^2), \tag{9}$$

а для второй суммы (8) находим, что

$$|M[(x_i^{(T)} - a_i^{(T)})(x_j^{(T)} - a_j^{(T)})]| \leqslant |M(x_i x_j)| + c_9\delta, \tag{10}$$

где $\delta \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, вследствие (7), при $|i-j| > N$

$$|M[(x_i^{(T)} - a_i^{(T)})(x_j^{(T)} - a_j^{(T)})]| < c_{10}(1-\lambda)^N + c_9\delta \sim c_{10}e^{-\varphi^{\frac{p}{4}}(n)} + c_9\delta.$$

Это неравенство вместе с (9) приводит к $B_n^{(T)} = o(n^2)$, что и требовалось доказать.

Отметим частный случай теоремы 4, когда $p = 2$.

ТЕОРЕМА [С. Н. Бернштейн, ([1]), стр. 208]. *Если* $M'(x_i^2) < c_{11}$ *и цепь удовлетворяет условию* (A) *с* $\lambda = \frac{\varphi(n)}{n}$, *где* $\varphi(n)$ *произвольная, возрастающая до* ∞ *функция, то закон больших чисел применим к* $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Приведенная нами формулировка может быть несколько усилена, а именно, для применимости закона больших чисел к $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ вместо условия $M'(x_i^2) < c_{11}$ достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, d\psi_i(x) < c_{12}, \tag{*}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, d\overline{\psi}_i(x) < c_{13}, \tag{**}$$

каковы бы ни были x_k, $k < i$, и каково бы ни было i.

Дело в том, что для выполнения соотношений (1) и (2) используется только условие (*), а для доказательства неравенства (10), как это непосредственно видно, вполне достаточно условия (**).

5. В заключение рассмотрим вопрос об усиленном законе больших чисел для сумм $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ зависимых величин и, в частнсcти, для величин, связанных в цепь Маркова. А. Я. Хинчину принадлежит следующий критерий приложимости усиленного закона больших чисел к суммам произвольно связанных величин ([5]). Пусть

$$M(x_i) = 0, \quad M(x_i^2) = b_i, \quad \frac{M(x_i x_j)}{\sqrt{b_i b_j}} = r_{i,j},$$

$$c_k = \sup_{|i-j|=k} |r_{i,j}|, \quad C_n = \sum_{k=1}^{n} c_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Если $B_n C_n = o(n^{2-\delta})$, где $\delta > 0$ — постоянное число, то суммы $S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ подчинены усиленному закону больших чисел, т. е. вероятность соблюдения хотя бы одного из неравенств

$$|S_{n+k}| > \varepsilon(n+k) \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \ldots$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Применительно к цепям этот критерий дает несколько менее общие условия, чем это в действительности необходимо для справедливости усиленного закона больших чисел. Сейчас будет дано видоизменение этого критерия, в случае цепей приводящее к более сильному результату, но представляющее также и самостоятельный интерес.

Мы будем основываться на следующей лемме, которая является обобщением известного предложения А. Н. Колмогорова, формулированного им только для сумм независимых величин (3).

ЛЕММА. *Пусть случайные величины x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подчинены условию*

$$\left| M'\Big(\sum_{h=k+1}^{n} x_h \Big) \right| < H,$$

где M' вычисляется при любых предположениях о x_i, $i < k$, и H не зависит от k. (Считаем $M(x_i) = 0$.) Тогда

$$P\{U_n \geqslant t\} \leqslant \frac{B_n}{t^2 \left(1 - \frac{2H}{t}\right)}, \tag{11}$$

если только $\frac{2H}{t} < 1$. *Здесь*

$$U_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k|, \quad B_n = M(S_n^2),$$

и произвольное $t > 0$.

Для доказательства введем, подобно тому как это делает А. Н. Колмогоров, события e_k, определяемые условиями:

$$|S_i| < t \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1), \quad |S_k| \geqslant t.$$

Замечая, что

$$|P(e_k) \cdot M'_{e_k}[S_k(S_n - S_k)]| \leqslant HP(e_k) \cdot M'_{e_k}(|S_k|) \leqslant H \cdot P(e_k) \sqrt{M'_{e_k}(S_k^2)},$$

где $M'_{e_k}(z)$ — условное математическое ожидание величины z при условии e_k, мы получаем:

$$B_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(e_k) \cdot M'_{e_k}(S_n^2) \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(e_k)\, M'_{e_k}(S_k^2) - 2H \sum_{k=1}^{n} P(e_k) \sqrt{M'_{e_k}(S_k^2)}\,.$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n} P(e_k)\cdot\sqrt{M'_{e_k}(S_k^2)} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} P(e_k)}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n} P(e_k)\cdot M'_{e_k}(S_k^2)}.$$

Поэтому

$$B_n \geqslant \sum_{k=1}^{n} P(e_k)\, M'_{e_k}(S_k^2)\left\{1-2H\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} P(e_k)}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} P(e_k)\, M'_{e_k}(S_k^2)}}\right\}\geqslant$$

$$\geqslant t^2\sum_{k=1}^{n} P(e_k)\left(1-\frac{2H}{t}\right)=t^2\left(1-\frac{2H}{t}\right)P\{U_n\geqslant t\},$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть* $x_i\,(i=1,\,2,\,\ldots)$ — *последовательность случайных величин. Усиленный закон больших чисел применим к суммам* $S_n=\sum_{i=1}^{n} x_i$ *первых* n *членов этой последовательности, если:*

1) $\left|M'\left(\sum_{h=k+1} x_h\right)\right|<H(n)$, *каковы бы ни были* x_l, $l\leqslant k$, *где* $H(n)=o(n)$;

2) $\frac{B_n}{n^2}<\frac{1}{\varphi(n)}$, *где* $\varphi(n)$ — *монотонная функция, для которой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\varphi(n)}$ *сходится.*

Доказательство будет проведено аналогично тому, как это делает С. Н. Бернштейн для независимых величин [см. ([1]), стр. 155—156], причем роль неравенства Колмогорова, на котором основывается это рассуждение, у нас перейдет к неравенству (11) вышеизложенной леммы.

Будем через $P\left\{\begin{matrix}|S_n|\leqslant R\\ (n\in\{n_j\})\end{matrix}\right\}$ обозначать вероятность совместного осуществления неравенств указанного в скобках вида при всех n, принадлежащих последовательности $\{n_j\}$. Ясно, что

$$P\left\{\begin{matrix}|S_n|\leqslant t\sqrt{B_{2n_0}}\\ (n\in\{1,2,\ldots,2n_0\})\end{matrix}\right\}\leqslant P\left\{\begin{matrix}|S_n|\leqslant t\sqrt{B_{2n_0}}\\ (n\in\{(n_0+1,\ldots,2n_0\})\end{matrix}\right\}\leqslant P\left\{\begin{matrix}\frac{|S_n|}{n}\leqslant t\,\frac{\sqrt{B_{2n_0}}}{n_0}\\ (n\in\{\overline{n_0+1},\ldots,2n_0\})\end{matrix}\right\}, \tag{12}$$

каково бы ни было $t\geqslant 0$ и целое $n_0>0$. Пусть $\frac{t\sqrt{B_{2n_0}}}{n_0}$ равно данному произвольно малому $\varepsilon>0$. Вследствие (12), вероятность нарушения хотя бы одного из неравенств

$$|S_n|\leqslant \varepsilon n \tag{13}$$

для всех n, удовлетворяющих условию $n_0<n\leqslant 2n_0$, будет меньше, чем

$$1-P\left\{\begin{matrix}|S_n|\leqslant\varepsilon n_0\\ (n\in\{1,2,\ldots,2n_0\})\end{matrix}\right\}=P\{U_{2n_0}>\varepsilon n_0\}.$$

Беря вместо n_0 число $2^r n_0$, где целое $r > 0$, получим таким же образом, что вероятность нарушения хотя бы одного из неравенств (13) при $2^r n_0 < n \leqslant 2^{r+1} n_0$ будет меньше, чем $P\{U_{2^{r+1}n_0} > \varepsilon \cdot 2^r n_0\}$. Поэтому вероятность нарушения хотя бы одного из неравенств (13) при всех $n > n_0$ будет меньше, чем

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{U_{2^{r+1} \cdot n_0} > \varepsilon \cdot 2^r \cdot n_0\}.$$

Последняя сумма, вследствие (11), не превосходит

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_{2^{r+1} \cdot n_0}}{\varepsilon^2 2^{2r} n_0^2 \left(1 - \frac{2H(2^{r+1} \cdot n_0)}{\varepsilon \cdot 2^r \cdot n_0}\right)} < \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_{2^{r+1} \cdot n_0}}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2r-1} n_0^2}, \tag{14}$$

так как n_0 можно считать столь большим, чтобы $\frac{2H(2^{r+1} n_0)}{\varepsilon 2^r n_0}$ было меньше $\frac{1}{2}$ при всех $r > 0$. Вследствие условия 2) доказываемой теоремы, из неравенства (14) получаем, что вероятность нарушения неравенства (13) хотя бы при одном $n > n_0$ будет меньше, чем

$$\frac{8}{\varepsilon^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\varphi(2^{r+1} n_0)}. \tag{15}$$

Но последний ряд сходится и сумма его стремится к нулю при $n_0 \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы. Сходимость ряда (15) вытекает из неравенства

$$\frac{1}{\varphi(2^{r+1})} \leqslant 2 \sum_{2^r \leqslant n < 2^{r+1}} \frac{1}{n \varphi(n)}$$

и условия 2) доказываемой теоремы.

Следствие. Усиленный закон больших чисел применим к сумме $S_n = \sum_{h=1}^{n} x_h$ величин x_h, связанных в цепь (речь идет о последовательности x_h, образующей цепь), если:

1) $M'(|x_h|) < c_{14}$, каковы бы ни были x_k, $k < h$ $(h = 1, 2, \ldots)$;

2) $M(x_h^2) < c_{15}$.

3) Цепь удовлетворяет условию (А) или условию (В) с $\lambda = \frac{\varphi(h)}{h}$, где $\varphi(h)$ — монотонно возрастающая функция, для которой сходится ряд $\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h \varphi(h)}$.

Поступило
30. III. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, М. — Л., Гостехиздат, 1946.

[2] Бернштейн С. Н., О законе больших чисел, Сообщения Харьковского мат. об-ва, т. XVI (1918), 82—87.

[3] Колмогоров А. Н., Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängigen Grössen, Math. Ann., 99 (1928), 309—320.

[4] Сапогов Н. А., Двумерная предельная теорема для двумерной цепи, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 13 (1949), 301—312.

[5] Хинчин А. Я., Sur la loi forte des grands nombres, Comptes Rendus de l'Acad. Sc. Paris, t. 186 (1928), 285—287.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 155—178

Ю. М. СМИРНОВ

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ, КОМПАКТНЫХ В ДАННОМ ОТРЕЗКЕ МОЩНОСТЕЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуется до конца понятие компактности в данном отрезке мощностей, в частности, понятие финальной компактности.

Если все множества, лежащие в данном пространстве, финально компактны, то пространство обладает рядом свойств пространств со счетной базой.

Глава первая. Общая теория

§ 1. Основные определения

Началом теории бикомпактных пространств послужила основная теорема, доказанная в 1922 г. П. С. Александровым и П. С. Урысоном [см., например, ([1]), § 2]:

Следующие три свойства топологического пространства R эквивалентны между собою:

Свойство а°. *Всякое бесконечное множество, лежащее в R, имеет в R хотя бы одну точку полного накопления* *;

Свойство б°. *Всякая вполне упорядоченная система непустых убывающих замкнутых множеств*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots$$

имеет непустое пересечение.

Свойство в°. *Всякое бесконечное покрытие* ** *пространства R содержит конечное подпокрытие.*

Топологическое пространство называется, как известно, *бикомпактным*, если оно обладает каким-нибудь одним, а следовательно, и каждым из перечисленных трех свойств.

П. С. Александров и П. С. Урысон доказали, далее ([2]), что бикомпактность может быть также характеризована каждым из свойств а, б, в, которые получаются соответственно из свойств а°, б°, в°, если потребовать, чтобы входящие в формулировку этих свойств точечные мно-

* Точка ξ называется *точкой полного накопления* множества $M \subseteq R$, если каждая окрестность точки ξ пересекается с множеством M по множеству, имеющему ту же мощность, что и все множество M.

** Во всей этой работе под покрытием пространства R понимается система открытых в R множеств, сумма которых есть R. Покрытие Σ' (того же пространства R) называется *подпокрытием* покрытия Σ, если каждое множество, являющееся элементом покрытия Σ', есть в то же время элемент покрытия Σ.

жества и покрытия имели *регулярную мощность*, а вполне упорядоченные системы замкнутых множеств — *регулярный порядковый тип* *.

Это положение вещей привело названных авторов к далеко идущему обобщению понятия бикомпактности, а именно:

Пусть даны два бесконечных кардинальных числа a *и* b, *удовлетворяющих неравенству* $a \leqslant b$; *топологическое пространство* R *называется компактным в отрезке мощностей* $[a, b]$ *или* $[a, b]$-*компактным, если оно обладает следующим свойством:*

Свойство А. *Всякое бесконечное множество* M, *лежащее в* R, *мощность которого есть какое-нибудь регулярное кардинальное число, содержащееся в отрезке мощностей* $[a, b]$ (т. е. удовлетворяющее неравенству $a \leqslant m \leqslant b$), *имеет в* R *точку полного накопления.*

Оказывается [см. ([2])] свойству А эквивалентно

Свойство Б. *Всякая вполне упорядоченная система, состоящая из непустых убывающих замкнутых множеств*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots$$

пространства R *и имеющая регулярный порядковый тип* θ, *удовлетворяющий неравенству* $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$, *обладает непустым пересечением.*

После этого естественно ввести еще и

Свойство В. *Всякое покрытие пространства* R, *имеющее регулярную мощность* m, $a \leqslant m \leqslant b$, *содержит подпокрытие мощности* $< a$.

Однако П. С. Александров и П. С. Урысон не доказывают эквивалентности свойства В каждому из свойств А и Б, а доказывают лишь эквивалентность двух последних свойств следующему свойству:

Свойство $\widetilde{\text{В}}$. *Всякое покрытие пространства* R, *имеющее регулярную мощность* m, $a \leqslant m \leqslant b$, *содержит подпокрытие мощности* $< m$.

Настоящая работа и возникла из стремления заполнить пробел в исследовании П. С. Александрова и П. С. Урысона и доказать, что свойство В также эквивалентно $[a, b]$-компактности.

Эта задача привела к рассмотрению ряда новых свойств, характеризующих $[a, b]$-компактность и представляющих, как кажется, некоторый интерес. Для формулировки этих свойств нам нужны некоторые дальнейшие определения из общей теории множеств.

Скажем, что кардинальное число m является a-регулярным, если его нельзя представить в виде суммы кардинальных чисел, каждое из которых меньше, чем m, и число которых $< a$.

---

* Кардинальное число m называется, как известно, *регулярным*, если его нельзя представить в виде суммы кардинальных чисел, каждое из которых и число которых меньше, чем m. Обозначая всегда через $\omega(m)$ первое порядковое число мощности m, можно сказать, что порядковые числа вида $\omega(m)$, где m — регулярная мощность, и только они называются регулярными. Это определение эквивалентно следующему: порядковое число θ называется *регулярным*, если оно не конфинально никакому меньшему порядковому числу.

Аналогичным образом, порядковое число θ назовем a-регулярным, если оно не конфинально никакому порядковому числу $\theta' < \omega(a)$.

Легко видеть, что среди чисел вида $\omega(m)$ a-регулярны те и только те, для которых m есть a-регулярная мощность.

Теперь естественно сформулировать свойства $А^a$, $Б^a$, $В^a$, получающиеся, соответственно, из свойств А, Б, В, если потребовать от входящих в их формулировки чисел m, θ вместо регулярности лишь a-регулярность (сохраняя, конечно, требование $a \leqslant m \leqslant b$, соответственно $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$).

Продолжая тот же ход мыслей, мы вводим еще свойства $А^0$, $Б^0$, $В^0$, которые получаются соответственно из свойств А, Б, В путем полного отказа от требования регулярности входящих в формулировки этих свойств чисел m, θ (так что в $А^0$, $Б^0$, $В^0$ рассматриваются любые m, удовлетворяющие условию $a \leqslant m \leqslant b$, и любые θ, удовлетворяющие условию $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$).

Назовем теперь какую-нибудь систему множеств *a-центрированной*, если всякая подсистема нашей системы, имеющая мощность $< a$, имеет непустое пересечение.

Простым переходом к дополнительным множествам сразу устанавливается, что свойства $В^0$, $В^a$, В могут быть сформулированы и так:

Свойство $В^0$. *Всякая a-центрированная система мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, состоящая из замкнутых в R множеств, имеет непустое пересечение.*

Свойства $В^a$, соответственно В, получаются, если дополнительно потребовать, чтобы m было a-регулярно, соответственно регулярно.

Оказывается полезным ввести еще свойства $(БВ)^0$, $(БВ)^a$, (БВ), до некоторой степени промежуточные между $Б^0$, $Б^a$, Б и $В^0$, $В^a$, В.

Свойство $(БВ)^0$. *Всякая a-центрированная вполне упорядоченная по типу θ, $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$, система убывающих замкнутых множеств пространства R имеет непустое пересечение.*

Свойства $(БВ)^a$, соответственно (БВ), получаются из $(БВ)^0$, если формулировку последнего условия ограничить требованием a-регулярности, соответственно регулярности числа θ.

Основное замечание 1. Введем следующее очень важное определение:

Положить в формулировке какого-либо из перечисленных свойств

$$b = \infty,$$

значит потребовать, чтобы это свойство выполнялось для любого кардинального числа $m \geqslant a$, соответственно для любого порядкового числа $\theta \geqslant \omega(a)$, подчиненного, где нужно, требованиям регулярности, соответственно a-регулярности.

Таким образом, мы будем называть *$[a, \infty]$-компактными пространствами* (или *финально a-компактными пространствами*) топо-

логические пространства, в которых всякое множество произвольной регулярной мощности $m \geqslant a$ имеет точку полного накопления (т. е. пространства, $[a, b]$-компактные при любом $b \geqslant a$).

Пространства $[\aleph_1, \infty]$-компактные заслуживают специального наименования; мы будем называть их *финально компактными*.

Заметим еще следующий очевидный факт. *Всякое пространство мощности $< a$ является $[a, \infty]$-компактным.*

Вообще *для того чтобы какое-либо пространство R было $[a, \infty]$-компактным, достаточно* (и, конечно, необходимо), *чтобы оно было $[a, b]$-компактно хотя бы при одном b, не меньшем чем мощность пространства R. Такое b может быть всегда предположено регулярным* (так как всякое кардинальное число $b' = \aleph_{\tau+1}$, непосредственно следующее за каким-нибудь кардинальным числом $b = \aleph_\tau$, обладает свойством регулярности). Отсюда следует, что всякое свойство, доказанное специально для $[a, b]$-компактных пространств с регулярным числом b, верно и для всех $[a, \infty]$-компактных пространств.

Замечание 2. В определении $[a, b]$-компактности случай $a = b$ отнюдь не исключается. Однако, если число $a = b$ иррегулярно, то, очевидно, всякое топологическое пространство является $[a, b]$-компактным. Поэтому случай отрезка мощностей, состоящего из одного лишь иррегулярного числа $a = b$, мы называем случаем *тривиального отрезка мощностей*.

§ 2. Формулировка основной общей теоремы

Основным общим результатом первой главы настоящей работы является

ТЕОРЕМА 1. *Девять свойств*

$$\left.\begin{array}{llll} & & (\text{БВ})^{\circ}, & \\ \text{А}^{a}, & \text{Б}^{a}, & (\text{БВ})^{a}, & \text{В}^{a}, \\ \text{А}, & \text{Б}, & (\text{БВ}), & \text{В} \end{array}\right\} \quad (1)$$

топологического пространства R эквивалентны между собою для любого отрезка мощностей $[a, b]$. Если b есть a-регулярное число, а также в случае $b = \infty$ перечисленным девяти свойствам эквивалентно еще и свойство В°.

Перед тем как переходить к доказательству этой теоремы, сделаем некоторые замечания.

Замечание 3. Из теоремы 1 следует, что всякое пространство веса $< a$ является $[a, \infty]$-компактным, так как во всяком таком пространстве любое покрытие мощности $\geqslant a$ содержит подпокрытие мощности $< a$ (см. ([3]), стр. 136, теорема IV; доказательство, данное в ([3]) для пространств со счетной базой, дословно сохраняется и в нашем общем случае).

Одним из простейших примеров финально компактного пространства может служить пространство T_{ω_ω} всех порядковых чисел, меньших чем ω_ω, с естественной топологией, присущей ему как упорядоченному мно-

жеству. В этом пространстве, как легко убедиться, выполнены не только свойства В, В^a, но и свойство В^0; однако ни свойство А^0, ни свойство Б^0 в нем не имеют места (достаточное основание для того, чтобы не пытаться класть во главу угла эти последние свойства) *.

Если взять тривиальный отрезок мощностей $[a, b]$, где $a = b$ иррегулярно, то пространство R, состоящее из множеств мощности $a = b$ изолированных точек, будучи (как и всякое вообще пространство) $[a\ b]$-компактным, не обладает, тем не менее, свойством В^0 (так как одноточечные множества нашего пространства образуют покрытие мощности a, не содержащее никакого собственного подпокрытия). Если отвлечься от этого тривиального случая, то мне неизвестен никакой пример $[a, b]$-компактного пространства, не обладающего свойством В^0.

Заметим, наконец, что в случае $a = \aleph_0$ (при любом b) эквивалентность всех двенадцати свойств А^i, Б^i, $(\text{БВ})^i$, В^i, $i = \Lambda$, 0, a,** содержится в работе (2), стр. 20, теорема I_τ'.

Приведем еще один пример финально компактного пространства. Это — пространство $\mathscr{H}$, построенное Хаусдорфом по другому поводу. Точками пространства $\mathscr{H}$ являются все действительные числа. Топология вводится посредством окрестностей следующим образом: за окрестность любой точки x принимается произвольный интервал, содержащий эту точку, после удаления из него произвольного не более чем счетного множества точек, отличных от точки x. Пространство $\mathscr{H}$ обладает, как легко убедиться, тем свойством, что не только оно само, но и всякое лежащее в нем множество является финально компактным пространством.

Такие пространства называются *наследственно финально компактными*; мы будем ими заниматься во второй главе.

Замечание 4. Непосредственно из определения перечисленных выше свойств вытекают такие соотношения между ними (здесь и везде дальше стрелка означает логическое следование одного свойства из другого):

$$\begin{array}{cccc} \text{А}^0 & \text{Б}^0 \rightarrow & (\text{БВ})^0 & \leftarrow \text{В}^0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{А}^a & \text{Б}^a \rightarrow & (\text{БВ})^a & \leftarrow \text{В}^a \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{А} & \text{Б} \rightarrow & (\text{БВ}) & \leftarrow \text{В} \end{array}$$

(Следования типа $\text{В} \rightarrow (\text{БВ})$ вытекают из второй формулировки свойства В^0, В^a, В при помощи a-центрированных систем замкнутых множеств).

---

* Помимо этого, исследование свойства А^0 даже в простейших случаях связано с трансцендентными задачами теории множеств: так, например, вопрос о том, всякое ли множество действительных чисел (рассматриваемое с его естественной топологией как топологическое пространство) обладает свойством А^0, эквивалентен вопросу, удовлетворяет ли мощность континуума с неравенству $\mathfrak{c} < \aleph_\omega$.

** Здесь и везде Λ означает пустое множество.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Из только что приведенной таблицы нам понадобятся соотношения

$$\begin{array}{ccccc} & & (\text{БВ})^0 & & \\ & & \downarrow & & \\ & \text{Б}^a & (\text{БВ})^a & & \text{В}^a \\ & \downarrow & & & \downarrow \\ \text{А} & \text{Б} & \rightarrow (\text{БВ}) & \leftarrow & \text{В} \end{array}$$

Далее мы докажем четыре утверждения: первое: $(\text{БВ})^a \rightarrow \text{Б}^a$, второе: $(\text{БВ})^a \rightarrow \text{В}^a$, третье: $(\text{БВ}) \rightarrow \text{А}$ и четвертое: $\text{А} \rightarrow (\text{БВ})^0$. В результате получим таблицу

$$\begin{array}{ccccc} \text{А} \text{ (к } (\text{БВ})^0) & \longrightarrow & (\text{БВ})^0 & & \\ & & \downarrow & & \\ & \text{Б}^a & \leftarrow (\text{БВ})^a \rightarrow & \text{Б}^a & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{А} & \text{Б} & \rightarrow (\text{БВ}) & \leftarrow \text{В} & \\ \uparrow & & | & & \\ \multicolumn{3}{c}{\text{(от } (\text{БВ}) \text{ к А)}} & & \end{array} \qquad (2)$$

из которой уже видна эквивалентность всех содержащихся в ней свойств.

После этого мы докажем, что всякое $[a, b]$-компактное пространство обладает свойством А^a, а в случае a-регулярного b — и свойством В^0.

Переходим к осуществлению изложенного плана доказательства теоремы 1.

ЛЕММА. *При произвольном кардинальном числе k всякая вполне упорядоченная система непустых убывающих множеств k-регулярного типа θ является k-центрированной системой.*

В самом деле, пусть система

$$M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_\alpha \supseteq \ldots, \quad \alpha < \theta, \qquad (3)$$

удовлетворяет условию леммы. Надо доказать, что всякая подсистема мощности $< k$ системы (3) имеет непустое пересечение. Но иначе и быть не может, так как всякая такая подсистема, имея порядковый тип $< \omega(k)$, не может быть конфинальной системе (3) k-регулярного порядкового типа θ и, следовательно, найдется множество M_β, следующее в системе (3) за всеми элементами этой подсистемы. Лемма доказана.

Доказательство первого утверждения $(\text{БВ})^a \rightarrow \text{Б}^a$ очевидно следует из этой леммы, если положить в ней кардинальное число $k = a$.

Доказательство второго утверждения $(\text{БВ})^a \rightarrow \text{В}^a$. Предполагая условие $(\text{БВ})^a$ выполненным, предположим, что условие В^a не выполнено, и приведем это предположение к противоречию.

Пусть m есть такое наименьшее a-регулярное кардинальное число, что существует a-центрированная система мощности m, состоящая из замкнутых множеств, с пустым пересечением. Ясно, что $m \geqslant a$. Запишем одну из таких систем в виде вполне упорядоченной системы

$$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \omega(m), \qquad (4)$$

a-регулярного порядкового типа $\omega(m)$. Положим

$$\Phi_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} F_\beta, \quad \alpha < \omega(m).$$

Так как подсистема

$$F_0, F_1, F_2, \ldots, F_\beta, \ldots, \quad \beta < \alpha < \omega(m),$$

системы (4) есть также a-центрированная система и так как мощность этой подсистемы $< m$, то из определения числа m вытекает, что никакое Φ_α не пусто. Следовательно, система

$$\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \ldots \supseteq \Phi_\alpha \supseteq \ldots, \quad \alpha < \omega(m), \tag{5}$$

состоит из непустых замкнутых множеств и имеет своим порядковым типом a-регулярное порядковое число $\omega(m)$. На основании леммы (положив в ней $k = a$) и в силу условия $(БВ)^a$, заключаем, что $\bigcap_\alpha F_\alpha = \bigcap_\alpha \Phi_\alpha$ не пусто, вопреки предположению. Этим утверждение $(БВ)^a_{\cdot} \rightarrow B^a$ доказано.

Доказательство третьего утверждения: (БВ) $\rightarrow$ А. Для доказательства сформулируем следующее

Свойство $(\widetilde{БВ})$. *Всякая вполне упорядоченная система регулярного типа $\omega(m)$, $a \leqslant m \leqslant b$, состоящая из убывающих замкнутых в R множеств и являющаяся m-центрированной, имеет непустое пересечение.*

Очевидно, что (БВ) $\rightarrow (\widetilde{БВ})$, поэтому достаточно доказать, что $(\widetilde{БВ}) \rightarrow$ А.

Пусть M есть множество регулярной мощности m. Превращаем его во вполне упорядоченное по типу $\omega(m)$ множество:

$$M = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\alpha, \ldots\}, \quad \alpha < \omega(m).$$

Обозначаем через M_α множество всех тех ξ_β, у которых $\beta > \alpha$, и через F_α — замыкание* $[M_\alpha]$ множества M_α в R. Имеем:

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots, \quad \alpha < \omega(m). \tag{6}$$

На основании леммы (положив в ней $k = m$) заключаем, что система (6) (и даже система всех M_α) является m центрированной и, следовательн о, в силу $(\widetilde{БВ})$, пересечение $\bigcap_\alpha F_\alpha$ не пусто.

Возьмем произвольно точку $\xi \in \bigcap_\alpha F_\alpha$ и докажем, что ξ есть точка полного накопления множества M. В самом деле, если бы существовала окрестность $O\xi$ точки ξ такая, что мощность множества $M \cap O\xi$ была бы меньше, чем m, то окрестность $O\xi$, в силу регулярности числа m, могла бы содержать лишь точки ξ_{α_λ}, индексы α_λ которых меньше некоторого $\beta < \omega(m)$. Но в этом случае точка ξ не содержалась бы даже во множестве F_β и тем более во множестве $\bigcap_\alpha F_\alpha$. Этим утверждение (БВ) $\rightarrow$ А доказано.

Доказательство четвертого утверждения: А $\rightarrow (БВ)^0$. Пусть дана a-центрированная вполне упорядоченная система произвольного типа θ, $\omega(a) \leqslant \theta \leqslant \omega(b)$, состоящая из убывающих замкнутых множеств:

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots, \quad \alpha < \theta. \tag{7}$$

---

* Везде в этой работе замыкание множества M обозначается через $[M]$, а в случаях, когда надо указать пространство, в котором замыкание производится, — через $R[M]$.

Если все F_α, начиная с некоторого, совпадают, то пересечение всех F_α, очевидно, не пусто. Если же нет такого α, что $F_\alpha = F_\beta$ для любого $\beta > \alpha$, то можно найти конфинальную системе (7) подсистему

$$F_{\alpha_0} \supset F_{\alpha_1} \supset \ldots \supset F_{\alpha_\lambda} \supset \ldots, \quad \lambda < \sigma. \tag{8}$$

Взяв подсистему (8) так, чтобы ее порядковый тип σ был наименьшим возможным, мы видим, что σ есть регулярное порядковое число вида $\omega(k)$, где k — регулярная мощность.

Если $k < a$, то пересечение всех F_α, равное пересечению всех F_{α_λ}, не пусто, в силу a-центрированности системы (7), и наша цель достигнута.

Пусть $k \geqslant a$. Возьмем в каждом из множеств $F_{\alpha_\lambda} \diagdown F_{\alpha_{\lambda+1}}$ по точке ξ_λ. Множество M полученных таким образом точек ξ_λ имеет регулярную мощность $k \geqslant a$ и, в силу условия А, имеет точку полного накопления ξ. Докажем, что ξ содержится в любом F_{α_λ}; этим будет доказано, что $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = \bigcap\limits_\lambda F_{\alpha_\lambda}$ не пусто. Но утверждение $\xi \in F_{\alpha_\lambda}$ при любом $\lambda < \omega(k)$ следует из того, что открытое множество $R \diagdown F_{\alpha_\lambda}$ содержит лишь те точки $\xi_\varkappa$, для которых $\varkappa < \lambda$, так что мощность множества $M \cap (R \diagdown F_{\alpha_\lambda})$ меньше, чем k. Поэтому точка ξ, будучи точкой полного накопления множества M, не может иметь открытое множество $R \diagdown F_{\alpha_\lambda}$ в числе своих окрестностей, а это значит, что $\xi \in F_{\alpha_\lambda}$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что всякое $[a, b]$- компактное пространство обладает свойством A^a. Для этого понадобятся некоторые предварительные рассуждения. Пусть R — топологическое пространство, Ξ — какое-нибудь (абстрактно заданное) множество, элементы которого будем называть «индексами». Пару (x, α), одним из элементов которой является некоторая точка $x \in R$, а другим — индекс $\alpha \in \Xi$, назовем *обозначенной точкой* пространства R [см. ([4]), стр. 25]. При этом точку x, входящую в пару (x, α), назовем *носителем обозначенной точки* (x, α). Различные обозначенные точки могут иметь один и тот же носитель (отличаясь только своими «индексами»).

Всякое множество обозначенных точек пространства R назовем *обозначенным множеством* этого пространства; множество носителей обозначенных точек, являющихся элементами данного обозначенного множества, назовем *носителем этого обозначенного множества.*

Мы скажем, что данная обозначенная точка лежит в данном множестве $M \subseteq R$, если носитель этой обозначенной точки лежит в M. Пересечением множества M и обозначенного множества $\mathfrak{M}$ назовем подмножество $\mathfrak{M}_0 = M \cap \mathfrak{M}$ множества $\mathfrak{M}$, состоящее из всех элементов множества $\mathfrak{M}$, лежащих в M.

Точку $\xi \in R$ назовем *точкой полного накопления обозначенного множества* $\mathfrak{M}$, если пересечение обозначенного множества $\mathfrak{M}$ с любой окрестностью точки ξ имеет ту же мощность, что и все множество $\mathfrak{M}$.

ЛЕММА 2. *Пусть R есть $[a, b]$-компактное пространство. Всякое обозначенное множество $\mathfrak{M}$ пространства R, имеющее регулярную мощность m, $a \leqslant m \leqslant b$, имеет хотя бы одну точку полного накопления.*

Доказательство. Пусть M — носитель обозначенного множества $\mathfrak{M}$. Назовем *весом* точки $x \in M$ мощность множества всех обозначенных точек $(x, \alpha) \in \mathfrak{M}$, имеющих точку x своим носителем. Если вес точки $x \in M$ равен m, то точка x, очевидно, есть точка полного накопления обозначенного множества $\mathfrak{M}$ и лемма доказана. Пусть вес τ_x каждой точки $x \in M$ меньше, чем m. Так как мощность m множества $\mathfrak{M}$ равна сумме весов всех точек множества M:

$$m = \sum_{x \in M} \tau_x, \quad \tau_x < m,$$

и m есть регулярное кардинальное число, то мощность M равна m. Поэтому M имеет в R точку полного накопления, которая, очевидно, является точкой полного накопления и для обозначенного множества $\mathfrak{M}$. Лемма доказана.

Пусть теперь M — произвольное множество, лежащее в $[a, b]$-компактном пространстве R и имеющее a-регулярную мощность m, $a \leqslant m \leqslant b$. Если m есть не только a-регулярное, но регулярное кардинальное число, то M, в силу $[a, b]$-компактности пространства R, имеет в нем точку полного накопления. Предположим, что m хотя и a-регулярная, но не регулярная мощность. Наименьшее порядковое число, которому конфинально число $\omega(m)$, является начальным числом $\omega(k)$ регулярной мощности k, $a \leqslant k < m$; кардинальное число m, как нетрудно видеть, можно представить в виде суммы

$$m = \sum_{\lambda < \omega(k)} m_\lambda,$$

где для любого λ число m_λ, $a \leqslant m_\lambda < m$, регулярно. Кроме того, можно еще предположить, что для любых λ и λ', $\lambda < \lambda' < \omega(k)$, имеем $m_\lambda < m_{\lambda'}$. Поэтому

$$M = \bigcup_{\lambda < \omega(k)} M_\lambda,$$

где множества M_λ попарно не пересекаются и каждое M_λ имеет мощность m_λ. Так как m_λ регулярно, то каждое M_λ имеет в R точку полного накопления x_λ, которая, рассматриваемая вместе с индексом λ, образует обозначенную точку (x_λ, λ) пространства R. Мощность обозначенного множества

$$\mathfrak{M} = \{(x_0, 0), (x_1, 1), \ldots, (x_\lambda, \lambda), \ldots\}, \quad \lambda < \omega(k), \tag{9}$$

равна k. Но k — регулярное число, $a \leqslant k < b$, значит, в силу леммы, обозначенное множество $\mathfrak{M}$ имеет в R точку полного накопления ξ. Докажем, что ξ есть в то же время и точка полного накопления множества M. В самом деле, пусть $O\xi$ есть произвольная окрестность точки ξ. Мощность обозначенного множества

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \cap O\xi$$

есть k, поэтому элементы этого множества $\mathfrak{M}_0$ образуют конфинальную последовательность

$$(x_{\lambda_0}, \lambda_0), (x_{\lambda_1}, \lambda_1), \ldots, (x_{\lambda_\sigma}, \lambda_\sigma), \ldots, \quad \sigma < \omega(k),$$

в последовательности (9) всех элементов множества $\mathfrak{M}$. Так как окрестность $O\xi$ является окрестностью каждой из точек x_{λ_σ}, то, по определе-

нию этих точек, любое множество $M_{\lambda_\sigma} \cap O\xi$ имеет мощность m_{λ_σ}. Но множества $M_{\lambda_\sigma} \cap O\xi$ с различными σ попарно не пересекаются, поэтому мощность их суммы $M' \subseteq M \cap O\xi$ равна кардинальному числу

$$\sum_{\sigma<\omega(k)} m_{\lambda_\sigma} = \sum_{\lambda<\omega(k)} m_\lambda = m,$$

а потому и мощность множества $M \cap O\xi$ равна m. Так как $O\xi$—произвольная окрестность точки ξ, то эта точка является точкой полного накопления множества M, что и требовалось доказать.

Пусть теперь b есть a-регулярное число. Для доказательства того, что в этом случае свойство B^{o} является следствием свойства B^{a}, очевидно, достаточно сделать следующее общее

Замечание 5. *Если каждое покрытие Σ мощности b содержит подпокрытие мощности $<a$, то каждое покрытие любой мощности $m<b$ содержит подпокрытие мощности $<a$.*

В самом деле, пусть Σ' есть покрытие мощности $m<b$. Возьмем какой-нибудь элемент $G \in \Sigma'$ и построим покрытие Σ, состоящее из всех элементов Σ' и еще из элементов $G_\alpha = G$, взятых в числе b. Покрытие Σ имеет мощность b, следовательно, содержит подпокрытие Σ_0 мощности $<a$. Покрытие

$$\Sigma_0' = \Sigma' \cap \Sigma_0 \subseteq \Sigma'$$

есть искомое.

Пусть R — какое-нибудь $[a, \infty]$-компактное пространство. Взяв произвольное регулярное b, не меньшее, чем вес пространства R, мы видим, что всякое покрытие пространства R содержит подпокрытие мощности $\leqslant b$, а следовательно, и подпокрытие мощности $<a$.

Таким образом, в $[a, \infty]$-компактных пространствах выполнено свойство B^{o}, и теорема 1 полностью доказана.

§ 4. Некоторые замечания

Замечание 6. Свойство $\breve{\mathrm{B}}$, сформулированное в § 2, может быть посредством перехода к дополнительным множествам записано следующим образом: *всякая система регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, состоящая из замкнутых в R множеств и являющаяся m-центрированной, имеет не пустое пересечение.*

Дополняя доказанное в § 3 следование $(\widetilde{\text{БВ}}) \to \mathrm{A}$ очевидными следованиями $\mathrm{B} \to \breve{\mathrm{B}} \to (\widetilde{\text{БВ}})$, мы видим, что каждое из свойств $\breve{\mathrm{B}}$ и $(\widetilde{\text{БВ}})$ эквивалентно свойствам (1) и может быть принято за определение $[a, b]$-компактности *.

Замечание 7. *Всякое множество Φ, замкнутое в $[a, b]$-компактном пространстве R, является $[a, b]$-компактным пространством.*

Действительно, всякое множество регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, лежащее в Φ, имеет точку полного накопления в R, принадлежащую, в силу замкнутости множества Φ, этому множеству.

---

* Таблица (1) эквивалентных свойств, характеризующих $[a, b]$-компактность, может быть дополнена, конечно, еще и свойствами $\breve{\mathrm{B}}^a$, $(\widetilde{\text{БВ}})^a$, $(\widetilde{\text{БВ}})^{\mathrm{o}}$, очевидную формулировку которых можно предоставить читателю.

Замечание 8. *Для того чтобы множество M, лежащее в топологическом пространстве R, было $[a, b]$-компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая система $\Sigma = \{\Gamma_\alpha\}$ открытых в R множеств, имеющая a-регулярную мощность m, $a \leqslant m \leqslant b$, и покрывающая множество M, содержала подсистему $\Sigma' = \{\Gamma_{\alpha_\lambda}\}$ мощности $< a$, также покрывающую множество M.*

Для доказательства предположим сначала, что M является $[a, b]$-компактным. Тогда из покрытия $\{M \cap \Gamma_\alpha\}$ множества M можно выделить подпокрытие $\{M \cap \Gamma_{\alpha_\lambda}\}$ мощности $< a$; соответствующие Γ_{α_λ} образуют искомую подсистему Σ' системы Σ.

Обратно, пусть наше условие выполнено. Докажем, что M будет $[a, b]$-компактным. Для этого возьмем какое-нибудь покрытие $\{G_\alpha\}$ множества M, имеющее a-регулярную мощность m, $a \leqslant m \leqslant b$. Выбираем открытые в R множества Γ_α под условием $M \cap \Gamma_\alpha = G_\alpha$. Из полученной системы $\{\Gamma_\alpha\}$ выбираем покрывающую множество M подсистему $\{\Gamma_{\alpha_\lambda}\}$ мощности $< a$.

Соответствующие $M \cap \Gamma_{\alpha_\lambda} = G_{\alpha_\lambda}$ образуют подпокрытие покрытия $\{G_\alpha\}$, имеющее мощность $< a$.

Отметим следующий частный случай этого замечания:

Пусть M — финально компактное множество, лежащее в топологическом пространстве R. Тогда любая система открытых в R множеств, покрывающая множество M, содержит счетную или конечную подсистему, также покрывающую множество M.

Замечание 9. Несколько особняком стоит следующее предложение, доказанное для бикомпактов Н. Б. Веденисовым [см. (3), стр. 147, теорема XVI]:

Непрерывный образ $[a, b]$-компактного пространства есть $[a, b]$-компактное пространство.

Доказательство Веденисова остается в силе и в нашем общем случае.

§ 5. Регулярные финально компактные пространства

ТЕОРЕМА 2. *Пусть F и Φ — два непересекающихся замкнутых множества, лежащие в регулярном пространстве R. Если множества F и Φ являются финально компактными пространствами, то они имеют в R непересекающиеся окрестности.*

Эту теорему мы доказываем, воспроизводя, по существу, доказательство теоремы А. Н. Тихонова [см. (3), стр. 138, теорема IX] о нормальности регулярных пространств со счетной базой *.

Доказательство теоремы 2. Пусть F и Φ удовлетворяют условию теоремы. Для каждой точки $\xi \in \Phi$ строим окрестность, замыкание которой в R не пересекается с F. Из полученной системы окрестностей, в силу замечания 8 предшествующего параграфа, можно выбрать счет-

* Доказательство А. Н. Тихонова, в свою очередь, представляет лишь небольшое видоизменение тех рассуждений, при помощи которых П. С. Александров доказал теорему о том, что во всяком регулярном пространстве всякие два непересекающиеся счетные замкнутые множества имеют непересекающиеся окрестности [см. (5), § 4, стр. 265, сноска 19].

ную подсистему, покрывающую множество Ф. Элементы этой подсистемы обозначим через Γ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ Точно так же строим счетную систему открытых множеств G_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, покрывающую множество F и обладающую тем свойством, что $[G_i] \cap \Phi$ пусто для любого i. Полагаем

$$U_1 = G_1, \quad V_1 = \Gamma_1 \setminus [U_1]$$

и вообще

$$U_n = G_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} [V_i], \quad V_n = \Gamma_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [U_i].$$

Множества

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{и} \quad \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

и будут искомыми непересекающимися окрестностями множеств F и Ф.

Так как всякое замкнутое множество финально компактного пространства R само является финально компактным пространством (§ 4, замечание 7), то справедливо следующее

Следствие. *Всякое регулярное финально компактное пространство нормально.**

Это следствие обобщает как теорему о нормальности всех бикомпактов, так и теорему А. Н. Тихонова о нормальности регулярных пространств счетного веса. Далее усилено оно не может быть: возьмем топологическое произведение T пространства $T_{\Omega+1}$ всех порядковых чисел $\leqslant \Omega$ и пространства $T_{\omega+1}$ всех порядковых чисел $\leqslant \omega$. Удалив из T точку (Ω, ω), мы получим, как известно, регулярное, но не нормальное пространство, которое имеет мощность $\aleph_1$ и, следовательно, $[\aleph_2, \infty]$-компактно.

§ 6. Локально [a, b]-компактные пространства

Назовем пространство R *локально* $[a, b]$-*компактным*, если для любой его точки ξ существует окрестность $O\xi$, замыкание $R[O\xi]$ которой является $[a, b]$-компактным пространством.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G есть открытое множество $[a, b]$-компактного пространства R. Если для любой точки $x \in G$ существует окрестность Ox, замыкание $R[Ox]$ которой лежит в G, то G есть локально $[a, b]$-компактное пространство.*

Доказательство. Пусть G есть открытое множество $[a, b]$-компактного пространства R, удовлетворяющее условию теоремы, и x — произвольная точка G. Если для некоторой окрестности Ox точки x замыкание $R[Ox] \subseteq G$, то замыкание $G[Ox] = R[Ox]$ есть замкнутое в R множество и, следовательно, $[a, b]$-компактно. Значит, согласно определению, G есть локально $[a, b]$-компактное пространство, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Всякое открытое множество G регулярного $[a, b]$-компактного пространства есть локально $[a, b]$-компактное пространство.*

* Доказано Н. Б. Веденисовым [(7), стр. 135, VIII].

Следствие 2. *Множество $R \setminus \Phi$, дополнительное к конечному множеству Φ, лежащему в хаусдорфовом $[a, b]$-компактном пространстве R, есть локально $[a, b]$-компактное пространство.*

Это последнее предложение может быть обращено. Более того, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4′. *Всякое локально $[a, b]$-компактное хаусдорфово пространство R может быть присоединением одной точки ξ дополнено до хаусдорфова $[a, b]$-компактного пространства.*

Прежде чем доказывать это предложение, заметим, что из него и из следствия 2 вытекает

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы хаусдорфово пространство R присоединением одной точки могло быть дополнено до хаусдорфова $[a, b]$-компактного пространства, необходимо и достаточно, чтобы R было локально $[a, b]$-компактно.*

Доказательству теоремы 4 предпошлем следующее

Замечание 10. Дополнить пространство R до пространства R' присоединением одной точки ξ значит построить пространство R', точками которого являются все точки x пространства R и еще одна новая точка ξ, и при этом определить топологию в R' так, чтобы во множестве $R = R' \setminus \xi$ она совпадала с данной в R топологией. В нашем случае требуется, кроме того, чтобы в этой топологии R' было $[a, b]$-компактным и притом хаусдорфовым* пространством.

Всякое хаусдорфово $[a, b]$-компактное пространство R', получающееся из данного хаусдорфова пространства R присоединением одной точки ξ, будем называть** в этой работе *$[a, b]$-компактным расширением пространства R.*

Прежде чем строить некоторое вполне определенное такое расширение, установим одно общее свойство, которым должны обладать все замкнутые множества любого $[a, b]$-компактного расширения R' данного локально $[a, b]$-компактного хаусдорфова пространства R. Именно, если Φ' есть какое-нибудь замкнутое множество пространства R', то, по определению пространства R', множество $\Phi = R \cap \Phi'$ должно быть замкнуто в R. Но множество Φ совпадает с Φ', если Φ' не содержит точки ξ, и получается из Φ присоединением точки ξ, если $\xi \in \Phi'$. При этом в первом случае $\Phi = \Phi'$, как замкнутое множество $[a, b]$-компактного пространства R', само $[a, b]$-компактно.

Итак, *всякое замкнутое множество Φ' пространства R' либо получается присоединением точки ξ к какому-нибудь* (не непременно $[a, b]$-компактному) *замкнутому множеству пространства R, либо само есть некоторое замкнутое и притом $[a, b]$-компактное множество пространства R.*

---

* Это требование совершенно естественно: как известно, всякое T_1- (значит, и подавно, всякое хаусдорфово) пространство может быть присоединением одной точки дополнено до бикомпактного T_1-пространства.

** В силу следствия 2 теоремы 3, пространство R в данных условиях непременно локально $[a, b]$-компактно.

В заключение заметим, что всякое множество вида $\Phi \cup \xi$, где Φ замкнуто в R, является замкнутым в R'. Однако не всякое $[a, b]$-компактное замкнутое $\Phi \subseteq R$ должно быть замкнутым в R'.

Доказательство теоремы 4'. Построим некоторое определенное топологическое пространство $\bar{R}$, являющееся $[a, b]$-компактным расширением данного локально $[a, b]$-компактного хаусдорфова пространства R. За точки $\bar{R}$, естественно, примем все точки $x \in R$ и еще точку ξ. В качестве замкнутых множеств пространства $\bar{R}$ мы определяем, во-первых, все множества вида $\xi \cup \Phi$, где Φ — любое замкнутое множество пространства R, и, во-вторых, все замкнутые $[a, b]$-компактные множества Φ пространства R. Из этого определения следует, что открытыми множествами в $\bar{R}$ являются: во-первых, все открытые множества пространства R и, во-вторых, все множества вида $\xi \cup \Gamma$, где $\Gamma = R \setminus \Phi$ и Φ замкнуто в R и $[a, b]$-компактно. Отсюда очевидно, что пространство $\bar{R}$ может быть определено как окрестностное пространство следующим образом: точки $x \in R$ сохраняют в $\bar{R}$ те окрестности, которые имелись у них в R: окрестности $O\xi$ точки ξ суть множества вида $\xi \cup \Gamma$, где $\Gamma = R \setminus \Phi$ и Φ замкнуто в R и $[a, b]$-компактно. Легко видеть, что определенное таким образом пространство $\bar{R}$ есть хаусдорфово пространство: хаусдорфова аксиома отделимости для точек ξ и x следует из того, что в силу предположенной локальной $[a, b]$-компактности пространства R точка x имеет в R окрестность Ox с $[a, b]$-компактным замыканием $\Phi = R[Ox]$; полагая $\Gamma = R \setminus \Phi$, получим непересекающиеся окрестности Ox и $O\xi = \xi \cup \Gamma$.

Наконец, пространство $\bar{R}$ является $[a, b]$-компактным. Пусть, в самом деле, M — любое множество регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, лежащее в $\bar{R}$. Если существует замкнутое в R локально $[a, b]$-компактное Φ, пересекающееся с M по множеству M' той же мощности m, то, в силу $[a, b]$-компактности Φ, множество $M' \subseteq \Phi$ имеет в Φ точку полного накопления x и эта точка x является точкой полного накопления множества M в $\bar{R}$. Если же всякое $[a, b]$-компактное замкнутое в R множество Φ пересекается с M по множеству мощности $< m$, то это значит, что пересечение множества M с любой окрестностью точки ξ имеет мощность m, т. е. ξ есть точка полного накопления множества M.

Итак, $\bar{R}$ есть $[a, b]$-компактное расширение пространства и теорема 4' (а значит, и теорема 4) доказаны.

Предположим теперь, что во всех $[a, b]$-компактных расширениях R' данного локально $[a, b]$-компактного R точка ξ одна и та же. Тогда можно говорить о тождественном отображении одного произвольного $[a, b]$-компактного расширения пространства R на любое другое, в частности, о тождественном отображении пространства $\bar{R}$ на любое $[a, b]$-компактное расширение R' пространства R. Из замечания, сделанного выше о замкнутых множествах любого R' и из построения пространства $\bar{R}$ следует, что всякое замкнутое множество любого R' есть в то же время замкнутое множество пространства $\bar{R}$, т. е., что тождественное отображение пространства $\bar{R}$ на всякое $[a, b]$-компактное расширение R' пространства R непрерывно.

Очевидно, пространство $\overline{R}$ есть единственное $[a, b]$-компактное расширение пространства R, обладающее этим свойством (так как если бы существовало второе такое расширение $\overline{\overline{R}}$, то тождественное отображение одного из этих двух пространств на другое было бы непрерывным в обе стороны, т. е. топологическим, и пространства $\overline{R}$ и $\overline{\overline{R}}$ были бы гомеоморфны, а так как они состоят из одних и тех же точек, то и тождественны между собою). Пространство $\overline{R}$ мы называем *первым* $[a, b]$-компактным расширением пространства R.

Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Среди всех $[a, b]$-компактных расширений данного хаусдорфова локально $[a, b]$-компактного пространства R имеется одно — первое $[a, b]$-компактное расширение $\overline{R}$ пространства R, которое вполне определяется тем, что тождественное отображение пространства $\overline{R}$ на любое $[a, b]$-компактное расширение R' пространства R непрерывно.*

Этой теореме можно придать и такую формулировку.

Множество всех $[a, b]$-компактных расширений пространства R (мы будем обозначать их через R', R'' и т. д.) естественно делается частично упорядоченным, если положить $R' < R''$ в том случае, когда тождественное отображение пространства R' на R'' оказывается непрерывным. *В этом частично упорядоченном множестве пространство $\overline{R}$ является первым элементом* (отсюда и название — первое $[a, b]$-компактное расширение пространства R).

В том частном случае, когда локально $[a, b]$-компактное пространство R является пространством локально бикомпактным, в частично упорядоченном множестве всех $[a, b]$-компактных расширений пространства $\overline{R}$ имеется не только первый элемент $\overline{R}$, но и последний элемент, а именно, единственное бикомпактное расширение R^* пространства R.

Пример. Обозначим через R пространство, полученное из пространства T_Ω всех порядковых чисел $< \Omega$ удалением точки ω. Пространство R локально бикомпактно. Рассматривая R как локально компактное (т. е. как локально $[a, a]$-компактное при $a = \aleph_0$) пространство, мы видим, что его первым компактным расширением является пространство T_Ω (здесь $\xi = \omega$). Последним компактным расширением будет бикомпакт R^*, полученный присоединением к R точки ξ с окрестностями $O_{m,\alpha}\xi$ (предполагаем $m < \omega \leqslant \alpha < \Omega$), состоящими из ξ, из всех порядковых чисел β, $\alpha < \beta < \Omega$, и из всех натуральных чисел $n > m$. Можно получить и бесконечное множество «промежуточных» компактных расширений, например, определив окрестности $O_{m,\alpha}\xi$ как состоящие из ξ, из всех натуральных $n > m$ и из всех порядковых чисел β первого рода, удовлетворяющих условию $\alpha < \beta < \Omega$.

Рассмотрим то же пространство R как локально $[\aleph_1, \aleph_1]$- (и вместе с тем локально $[\aleph_1, \infty]$-) компактное пространство. Тогда первым $[\aleph_1, \aleph_1]$-компактным расширением пространства R будет пространство $\overline{R}$, полученное удалением точки ω из пространства $T_{\Omega+1}$ всех порядковых чисел $\leqslant \Omega$, а последним будет, конечно, тот же бикомпакт R^*, являющийся единственным бикомпактным расширением локально бикомпактного пространства R.

Глава 2. Наследственная $[a, b]$-компактность

§ 1. Предварительные замечания

Согласно общепринятой терминологии, топологическое пространство R обладает каким-либо свойством наследственно, если всякое множество, лежащее в R и рассматриваемое как топологическое пространство, обладает этим свойством.

Так, пространство R называется *наследственно $[a, b]$-компактным*, если каждое лежащее в R множество $[a, b]$-компактно. Очевидно, наследственно $[a, b]$-компактные пространства могут быть определены как пространства, удовлетворяющие следующему условию:

Каждое множество M регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, лежащее в пространстве R, содержит хотя бы одну точку полного накопления. В этой формулировке можно, естественно, предположение о регулярности мощности m заменить предположением об a-регулярности числа m.

Наследственной $[a, b]$-компактности, в особенности же наследственной $[a, \infty]$-компактности и посвящена эта глава.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы пространство R было наследственно $[a, b]$-компактным, достаточно (и, очевидно, необходимо), чтобы каждое открытое в R множество было $[a, b]$-компактным пространством.*

Доказательство. В самом деле, предположим, что каждое открытое в R множество $[a, b]$-компактно. Докажем, что тогда $[a, b]$-компактным является и всякое лежащее в R множество M. Для этого достаточно доказать, в силу замечания 8, § 4, гл. 1, что любая система $\Sigma = \{\Gamma_\alpha\}$ открытых в R множеств Γ_α регулярной мощности m, $a \leqslant m \leqslant b$, покрывающая M, содержит подсистему мощности $< a$, также покрывающую все M.

Рассмотрим открытое в R множество $\Gamma = \bigcup\limits_{\alpha} \Gamma_\alpha$. Система Σ является покрытием множества Γ, значит, в силу наших предположений, существует подсистема $\Sigma' = \{\Gamma_{\alpha_\lambda}\}$ системы Σ, имеющая мощность $< a$ и покрывающая множество Γ и, тем более, $M \subseteq \Gamma$. Теорема доказана.

Из только что доказанного сразу вытекает

Следствие. *Для того чтобы пространство R было наследственно $[a, \infty]$-компактно, необходимо и достаточно, чтобы из всякой системы Σ открытых множеств можно было выделить подсистему мощности $< a$ с тою же суммой (что и Σ).*

Замечание 1. Переходя к дополнениям, можно придать этому следствию и такую форму:

Для того чтобы пространство R было наследственно $[a, \infty]$-компактным, необходимо и достаточно, чтобы всякая система замкнутых множеств содержала подсистему мощности $< a$ с тем же пересечением (что и вся система).

Замечание 2. Мы видели, что непрерывный образ $[a, b]$-компактного пространства есть также $[a, b]$-компактное пространство. Отсюда сразу следует, что непрерывный образ наследственно $[a, b]$-компактного пространства есть наследственно $[a, b]$-компактное пространство.

§ 2. Основная теорема

Пусть a — некоторое регулярное кардинальное число.

Свойство S. *Всякая вполне упорядоченная по a-регулярному типу $\theta \geqslant \omega(a)$ система*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots, \quad \alpha < \theta, \tag{1}$$

убывающих замкнутых множеств стационарна (т. е. существует такой индекс $\alpha_0 < \theta$, что $F_\alpha = F_{\alpha_0}$ при всяком $\alpha \geqslant \alpha_0$).

Замечание 3. Легко видеть, что свойству S можно придать следующие формулировки:

Свойство S^*. *В любой вполне упорядоченной по типу $\theta \geqslant \omega(a)$ системе убывающих замкнутых множеств число попарно различных множеств $< a$.*

Свойство S_a. *Всякая вполне упорядоченная по типу $\omega(a)$ система*

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F \supseteq \cdots, \quad \alpha < \omega(a), \tag{2}$$

убывающих замкнутых множеств стационарна.

ЛЕММА. *Условие S выражает наследственное свойство пространства R, т. е. если этому условию удовлетворяет R, то ему удовлетворяет и всякое $M \subseteq R$.*

Доказательство. Пусть дано произвольное множество $M \subseteq R$ и пусть

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots, \quad \alpha < \omega(a), \tag{3}$$

есть последовательность типа $\omega(a)$ непустых убывающих *замкнутых в M множеств.* Возьмем замкнутое в R множество Φ_α так, чтобы было $M \cap \Phi_\alpha = F_\alpha$. Заменяя каждое Φ_α через $\Phi'_\alpha = \bigcap_{\beta \leqslant \alpha} \Phi_\beta$, можно с самого начала предположить, что множества Φ_α образуют убывающую последовательность. В силу условия S, предположенного выполненным в R, последовательность множеств Φ_α стационарна (см. замечание 3), а тогда будет стационарной и последовательность (3), что и требовалось доказать. На основании этой леммы доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $[a, b]$ — нетривиальный отрезок мощностей** (другими словами, либо a и b, $a < b$, — какие угодно кардинальные числа, либо $a = b$ есть регулярное кардинальное число). *Тогда свойство наследственной $[a, b]$-компактности эквивалентно свойству наследственной $[a, \infty]$-компактности.*

Так как во всяком нетривиальном отрезке мощностей $[a, b]$ содержится хотя бы одно регулярное кардинальное число, то теорема 2 содержится в следующем утверждении:

ТЕОРЕМА 2'. *Если a есть регулярное кардинальное число, то из наследственной $[a, a]$-компактности пространства R следует наследственная $[a, \infty]$-компактность этого пространства.*

Эта теорема в свою очередь окажется доказанной, если будет доказана.

ТЕОРЕМА 2''. *Если* (в предположении регулярности числа a) *пространство R наследственно $[a, a]$-компактно, то выполнено условие S.*

* См. замечание 7, § 4, гл. 1.

Если это условие выполнено, то пространство R наследственно $[a, \infty]$-компактно.

Докажем второе утверждение. Очевидно, что из свойства S следует свойство* $Б^a$ в отрезке $[a, \infty]$. Но на основании только что доказанной леммы свойство S является наследственным свойством, значит, из свойства S следует наследственное свойство $Б^a$ в отрезке $[a, \infty]$, т. е. наследственная $[a, \infty]$-компактность, что и требовалось доказать.

Докажем первое утверждение. В силу леммы, для этого достаточно показать, что из наследственной $[a, a]$-компактности следует свойство S. Воспользуемся замечанием 3. Пусть дана произвольная система типа $\omega(a)$ убывающих непустых замкнутых в R множеств:

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \cdots \supseteq F_\alpha \supseteq \cdots, \quad \alpha < \omega(a), \tag{2}$$

пространства R. Согласно замечанию 1, система (2) содержит подсистему

$$F_{\alpha_0} \supseteq F_{\alpha_1} \supseteq \cdots \supseteq F_{\alpha_\lambda} \supseteq \cdots \tag{4}$$

мощности $< a$ с тем же пересечением, что и вся система (2). Так как число a предположено регулярным, то система (4) не конфинальна системе (2), откуда следует, что система (2) стационарна. Таким образом, теорема 2″ и, следовательно, теоремы 2′ и 2 доказаны. Кроме того получаем, что *свойство S необходимо и достаточно для наследственной $[a, \infty]$-компактности пространства R.*

Из только что доказанного вытекает

Следствие (теоремы 2). *Пусть a_0 — какое-нибудь бесконечное кардинальное число, и a — первое регулярное кардинальное число, не меньшее чем a_0. Для того чтобы пространство R было наследственно $[a_0, \infty]$-компактным, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено наследственное свойство $[a, a]$-компактности, т. е. чтобы каждое лежащее в R множество мощности a содержало хотя бы одну точку полного накопления.*

Замечание 4. Пусть k — произвольное кардинальное число. Назовем точку $x \in R$ *точкой k-накопления* множества $M \subseteq R$, если для любой окрестности Ox этой точки мощность множества $M \cap Ox$ не меньше, чем k. Тогда предыдущему утверждению можно придать такую форму (в которой a_0 и a сохраняют данный им выше смысл):

Для того чтобы R было наследственно $[a_0, \infty]$-компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое множество мощности $\geqslant a$ содержало хотя бы одну точку a-накопления.

В частности, при $a = \aleph_1$ получаем известный результат: свойство наследственной финальной компактности эквивалентно каждому из следующих трех свойств:

а) Всякое несчетное множество $M \subseteq R$ содержит хотя бы одну точку конденсации.

б) Всякая вполне упорядоченная последовательность строго убывающих замкнутых множеств является конечной или счетной.

* Т. е. свойство $Б^a$ для убывающих последовательностей (1) любого a-регулярного типа $\theta \geqslant \omega(a)$.

в) Всякая несчетная система Σ открытых множеств имеет конечную или счетную подсистему с тою же суммой, что и вся система Σ.

§ 3. Обобщенная теорема Кантора — Бендиксона

Пусть на протяжении всего этого параграфа a есть регулярное кардинальное число.

Назовем множество *a-плотным в себе*, если каждая его точка есть точка a-накопления; назовем множество *a-разрозненным*, если оно не содержит никакого непустого a-плотного в себе множества.

Замечание 5. Само собою разумеется, что всякое множество мощности $< a$ является a-разрозненным.

Мы сейчас докажем, что в наследственно $[a, \infty]$-компактных пространствах верно и обратное утверждение. Более того, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы пространство R было наследственно $[a, \infty]$-компактно, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено какое-нибудь из следующих трех свойств:*

Свойство P. *Всякое лежащее в R множество M разлагается в сумму a-плотного в себе множества D* (быть может и пустого) *и множества E мощности $< a$.*

Свойство P'. *Всякое a-разрозненное множество пространства R имеет мощность $< a$.*

Свойство P''. *Всякое разрозненное множество пространства R имеет мощность $< a$.**

Так как очевидно, что $P \to P' \to P''$, то для доказательства теоремы достаточно показать необходимость свойства P и достаточность свойства P''.

Необходимость свойства P вытекает из следующей леммы:

ЛЕММА. *Пусть множество M есть произвольное множество, лежащее в наследственно $[a, \infty]$-компактном пространстве R. Тогда множество M^a всех точек a-накопления множества M, содержащихся в M, является a-плотным в себе множеством, а множество $M \setminus M^a$ имеет мощность $< a$.*

Доказательство. Если бы множество $M \setminus M^a$ имело мощность $\geqslant a$, то оно, будучи множеством наследственно $[a, \infty]$-компактного пространства R, содержало хотя бы одну точку a-накопления, которая и подавно была бы точкой a-накопления множества M и потому принадлежала бы множеству M^a. Полученное противоречие доказывает, что мощность множества $M \setminus M^a$ меньше, чем a.

Докажем, что множество M^a является a-плотным в себе. В случае, когда мощность множества M меньше, чем a, множество M^a всех точек a-накопления M, содержащихся в M, пусто и, следовательно, a-плотно в себе.

Рассмотрим случай, когда мощность множества M^a не меньше, чем a. Возьмем произвольную точку $\xi \in M^a$ и произвольную окрестность $O\xi$ этой точки. Докажем, что мощность множества $M^a \cap O\xi$ не меньше, чем a.

* При $a = \aleph_1$ теорема частично доказана В. Е. Шнейдером [(6), теорема 2].

Действительно, по определению точки ξ, множество $M_0 = M \cap O\xi$ имеет мощность $\geqslant a$. Из только что доказанного следует, что мощность множества $M_0 \setminus (M_0)^a$ меньше, чем a, значит, мощность множества $(M_0)^a$ не меньше, чем a. Но $(M_0)^a \subseteq M^a$ и $(M_0)^a \subseteq O\xi$, стало быть, множество M^a оказывается a-плотным в себе, что и требовалось доказать.

Заметим, что попутно мы доказали, что мощность множества M^a не меньше, чем a, если мощность всего M не меньше, чем a.

Докажем достаточность свойства P″. Пусть R не обладает свойством наследственной $[a, \infty]$-компактности. Тогда R не обладает и свойством S_a (см. замечание 3), т. е. существует вполне упорядоченная по типу $\omega(a)$ последовательность

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supset F_\alpha \supseteq \ldots \tag{2}$$

непустых замкнутых в R множеств, не являющаяся стационарной. Из этой последовательности можно выбрать конфинальную подпоследовательность

$$F_{\alpha_0} \supset F_{\alpha_1} \supset \cdots \supset F_{\alpha_\lambda} \supset \cdots$$

того же типа $\omega(a)$, состоящую из попарно различных множеств. Выбирая в каждом из множеств $F_{\alpha_\lambda} \setminus F_{\alpha_{\lambda+1}}$ по одной точке ξ_λ, мы получим множество $M = \{\xi_\lambda\}$ мощности a. Это множество разрознено, так как если бы существовало непустое подмножество C множества M, плотное в себе, то, взяв точку $\xi_\lambda \in C$ с наименьшим индексом, мы увидели бы, что в окрестности $R \setminus F_{\alpha_{\lambda+1}}$ точки ξ_λ нет ни одной отличной от ξ_λ точки множества C, вопреки предположению, что C плотно в себе. Таким образом, теорема 3 полностью доказана.

Замечание 6. Как известно, для пространств счетного веса теорема: *всякая вполне упорядоченная система попарно различных убывающих замкнутых множеств является конечной или счетной* доказывается совершенно параллельно теореме: *всякая вполне упорядоченная система попарно различных возрастающих замкнутых множеств является конечной или счетной.*

Поэтому интересно отметить, что даже для наследственно финально компактных пространств второе из этих утверждений может оказаться неверным. Примером может служить пространство $\mathscr{H}$, определенное в гл. 1, § 2. Возьмем в этом пространстве какое-нибудь вполне упорядоченное по типу Ω множество точек

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \Omega,$$

и обозначим через B_α множество всех x_β, где $\beta < \alpha$. Так как в пространстве $\mathscr{H}$ любое счетное множество замкнуто, то все B_α замкнуты; все они различны и образуют возрастающую последовательность типа Ω.

Было бы интересно выяснить, может ли подобное явление иметь место в регулярных наследственно финально компактных пространствах.

§ 4. Наследственная $[a, \infty]$-компактность регулярных пространств

Пусть всюду в этом параграфе a есть регулярное кардинальное число.

Множество, лежащее в топологическом пространстве R, назовем множеством типа $F_{(a)\sigma}$, если оно может быть представлено как сумма,

число слагаемых которой меньше a и каждое слагаемое является замкнутым в R множеством.

Аналогично определяются множества типа $G_{(a)\delta}$, т. е. множества, дополнительные к множествам типа $F_{(a)\sigma}$.

ТЕОРЕМА 4'. *Если в $[a, a]$-компактном пространстве R всякое открытое множество есть множество типа $F_{(a)\sigma}$, то пространство R наследственно $[a, a]$-компактно, а следовательно, $[a, \infty]$-компактно.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 1) доказать, что всякое открытое в R множество Γ обладает свойством $[a, a]$-компактности, т. е., что всякое покрытие $\Sigma = \{\Gamma_\alpha\}$ мощности a множества Γ содержит подпокрытие Σ' мощности $< a$. Для этого представим Γ как сумму замкнутых множеств Φ_α, взятых в некотором числе $a' < a$:

$$\Gamma = \bigcup_\alpha \Phi, \quad \alpha < \omega(a') < \omega(a).$$

Каждое множество Φ_α, будучи $[a, a]$-компактно (на основании замечания. § 4, гл. 1) покрыто подсистемой $\Sigma_\alpha \subseteq \Sigma$ мощности $a_\alpha < a$. Сумма всех подсистем Σ_α образует подсистему Σ' системы Σ, причем мощность Σ', являясь суммой мощностей $a_\alpha < a$, взятых в числе $a' < a$, не может быть, в силу регулярности a, равна a, следовательно, меньше a. Теорема 4' доказана.

Замечание 7. Так как в метрическом пространстве всякое открытое множество есть множество типа F_σ, то из теоремы 4' вытекает

Следствие. *Если для некоторого регулярного числа $a \geqslant \aleph_1$ метрическое пространство является $[a, a]$-компактным, то оно наследственно $[a, \infty]$-компактно.*

Теперь докажем, что если метрическое пространство R наследственно $[a, \infty]$-компактно, то оно имеет вес $< a$.

Достаточно доказать, что в R имеется всюду плотное множество мощности $< a$, для чего, а свою очередь, достаточно при любом $\varepsilon > 0$ построить в R ε-сеть мощности $< a$.

Строим эту ε-сеть обычным путем: берем какую-нибудь точку x_0; если имеется точка x_1, отстоящая от x_0 на расстояние $\geqslant \varepsilon$, то берем такую точку x_1 и т. д. Получаем вполне упорядоченное множество

$$M = \{x_0, x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots\}$$

попарно отстоящих друг от друга точек на расстоянии $\geqslant \varepsilon$. как Так множество M, очевидно, не содержит ни одной своей точки накопления, то мощность M меньше, чем a. Другими словами, процесс построения точек x_α обрывается на некотором $\beta < \omega(a)$, что означает, что множество M есть ε-сеть мощности $< a$.

Итак, *всякое метрическое пространство, которое при некотором регулярном $a \geqslant \aleph_1$ является $[a, \infty]$-компактным, имеет вес $< a$.*

ТЕОРЕМА 4''. *Во всяком регулярном наследственно $[a, \infty]$-компактном пространстве R любое открытое множество Γ есть множество типа $F_{(a)\sigma}$.*

В самом деле, в силу регулярности пространства R, для каждой точки ξ можно выбрать окрестность $O\xi$ с замыканием $[O\xi] \subseteq \Gamma$. Из наслед-

ственной $[a, \infty]$-компактности пространства R следует, что система всех построенных таким образом окрестностей $O\xi$ содержит подсистему $\Sigma = \{O\xi_\alpha\}$ мощности $< a$ с тою же суммой Г. Но тогда Г будет суммою замкнутых множеств $[O\xi_\alpha]$ в числе $< a$, что и требовалось доказать.

Замечание 8. При доказательстве теоремы 4″, в отличие от теоремы 4′, предположение о регулярности числа a оказалось излишним. Объединим теоремы 4′ и 4″ в одно предложение:

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы регулярное $[a, a]$-компактное пространство R было наследственно $[a, \infty]$-компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое открытое в R множество было множеством типа $F_{(a)\sigma}$**.

Остается невыясненным вопрос, верна ли теорема 4 без предположения регулярности кардинального числа a и регулярности пространства R.

§ 5. Мощность наследственно $[a, \infty]$-компактных пространств

ЛЕММА. *Всякое наследственно бикомпактное хаусдорфово пространство состоит из конечного числа точек.*

В самом деле, если хаусдорфово пространство R наследственно бикомпактно, то всякое лежащее в R множество является бикомпактом и, следовательно, замкнуто в R. Но тогда всякое множество, лежащее в R, будет и открытым, т. е. все точки R будут изолированными; бикомпакт, состоящий из изолированных точек, не может содержать бесконечного множества точек. Лемма доказана.

Усилением этого замечания является

ТЕОРЕМА 5. *Всякое наследственно компактное хаусдорфово пространство состоит из конечного числа точек.*

Действительно, компактные пространства суть не что иное как $[\aleph_0, \aleph_0]$-компактные пространства. Из теоремы 2 следует, что всякое наследственно $[\aleph_0, \aleph_0]$-компактное пространство является наследственно $[\aleph_0, \infty]$-компактным, т. е. наследственно бикомпактным, так что утверждение теоремы 5 следует из только что доказанной леммы.

Замечание 9. Можно было бы доказать теорему 5 и без помощи теоремы 2: если бы наследственно компактное пространство R было бесконечным, то оно содержало бы счетное множество M. В силу наследственной компактности R, наследственно компактным было бы и множество M. Однако для счетных пространств понятия компактности и бикомпактности совпадают, поэтому M, как наследственно бикомпактное хаусдорфово пространство, должно быть конечным. Полученное противоречие доказывает теорему 5.

Замечание 10. Предположение, что пространство R является хаусдорфовым пространством, существенно. Для получения примера наследственно бикомпактного T_1-пространства любой мощности** достаточно взять какое-либо множество R любой наперед заданной мощности m и превратить его в топологическое пространство, объявив замкну-

* Для бикомпактных пространств при $a = \aleph_1$ теорема доказана В. Е. Шнейдером [(6), теорема 1].

** Такой пример сообщил А. Н. Колмогоров.

тыми в этом пространстве, во-первых, все множество R и, во-вторых, все конечные подмножества множества R. Полученное T_1-пространство будет, как легко видеть, наследственно бикомпактным.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $a = \aleph_{\tau+1}$ (т. е. a — регулярное и притом не эксорбитантное* кардинальное число). *Всякое наследственно* $[a, \infty]$*-компактное хаусдорфово пространство* R *имеет мощность* $\leqslant 2^{\aleph_\tau}$.

Доказательство**. В предположении, что пространство R содержит более одной точки, мы можем представить его в виде суммы двух замкнутых множеств F_0 и F_1, из которых ни одно не совпадает со всем R:

$$R = F_0 \cup F_1; \quad R \supset F_0, \quad R \supset F_1$$

(значит, $F_0 \neq F_1$). Для этого достаточно взять в R две различные точки x_0 и x_1, взять непересекающиеся окрестности Ox_0 и Ox_1 этих точек и положить

$$F_0 = [Ox_0], \quad F_1 = R \diagdown Ox_0.$$

Построим теперь последовательность типа $\omega_{\tau+1}$ систем

$$\sum\nolimits_0, \sum\nolimits_1, \ldots, \sum\nolimits_\alpha, \ldots, \quad \alpha < \omega_{\tau+1},$$

замкнутых множеств, причем элементами системы Σ_α являются замкнутые множества $F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$, снабженные последовательностью типа α индексов

$$i_0, i_1, \ldots, i_\lambda, \ldots, \quad \lambda < \alpha,$$

каждый из которых равен 0 или 1.

По определению, система Σ_0 состоит из множества $F^{(0)} = R$, а система Σ_1 состоит из множеств $F^{(1)}_0 = F_0$ и $F^{(1)}_1 = F_1$.

Предположим, что системы Σ_β построены для всех $\beta < \alpha$. Построим систему Σ_α. Возможны два случая:

1°. Порядковое число α системы Σ_α — первого рода:

$$\alpha = \gamma + 1.$$

Тогда, если данное множество $F^{(\gamma)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ системы Σ_γ содержит более одной точки, то представим его в виде суммы двух замкнутых множеств $F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 0}$ и $F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 1}$, из которых ни одно не совпадает с $F^{(\gamma)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$. Если же $F^{(\gamma)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$ состоит не более чем из одной точки, то полагаем

$$F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 0} = F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots 1} = F^{(\gamma)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$$

2°. Порядковое число α — второго рода. Тогда полагаем

$$F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots} = \bigcap_{\beta < \alpha} F^{(\beta)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}$$

Рассмотрим последовательности вида

$$F^{(0)}, F^{(1)}_{i_0}, F^{(2)}_{i_0 i_1}, \ldots, F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \ldots i_\lambda \ldots}, \ldots, \quad \alpha < \omega_{\tau+1}, \tag{5}$$

* Кардинальное число $\aleph_\tau$ называется эксорбитантным, если оно регулярно и в то же время имеет предельный индекс τ; существование таких чисел до сих пор не доказано.

** Это доказательство в существенном совпадает с доказательством, данным П. С. Александровым и П. С. Урысоном для случая $a = \aleph_1$ [см. (2), стр. 40—41].

где при $\beta < \alpha$ все индексы у множества $F^{(\beta)}_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$, находятся в числе индексов у множества $F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ (так что множества индексов при каждом из множеств, составляющих последовательность (5), образуют возрастающую систему множеств). Очевидно также, что последовательности (5) являются убывающими последовательностями, т. е.

$$F^{(0)} \supseteq F^{(1)}_{i_0} \supseteq F^{(2)}_{i_0 i_1} \supseteq \dots \supseteq F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \dots, i_\lambda \dots} \supseteq \dots,$$

причем совпадение двух множеств

$$F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \dots i_\lambda, \dots} = F^{(\alpha+1)}_{i_0 i_1 \dots, i_\lambda}$$

в последовательности (5) наступает лишь тогда, когда $F^{(\alpha)}_{i_0 i_1 \dots i_\lambda \dots}$ либо пусто, либо содержит только одну точку. В силу наследственной $[a, \infty]$-компактности пространства R такое совпадение элементов непременно происходит в каждой из последовательностей (5), начиная с некоторого $\alpha < \omega_{\tau+1}$. Отсекая в каждой из последовательностей (5) все совпадающие между собою элементы, кроме первого из них, получим систему последовательностей, каждая из которых занумерована порядковыми числами, меньшими чем $\omega_{\tau+1}$; следовательно, число наших последовательностей не больше, чем $2^{\aleph_\tau}$.

С другой стороны, каждая точка $x \in R$ определяет однозначно некоторую последовательность (5), пересечением всех элементов которой она является. Отсюда следует, что мощность множества всех точек пространства R не превосходит мощности множества всех последовательностей (5), т. е. числа $2^{\aleph_\tau}$, что и требовалось доказать.

В заключение не могу не сказать о большой помощи, оказанной мне Павлом Сергеевичем Александровым. Многие проблемы, которые здесь мною решены, были поставлены им. Свой окончательный вид работа получила только после его тщательного просмотра. За все это, и особенно, за живое и теплое участие ко мне сердечно благодарю П. С. Александрова.

Поступило
2. II. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С., Пространство в топологии, Успехи матем. наук. т. 2, вып. 1 (1947), 5—57.

[2] Александров П. С. и Урысон П. С., Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandelungen Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, sectie I, deel XIV, Nr. 1, 1—96.

[3] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л.. 1937.

[4] Александров П. С., Комбинаторная топология, М. — Л., 1947.

[5] Урысон П. С., Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Ann. 94 (1935), 262—295.

[6] Шнейдер В. Е., Дескриптивная теория множеств в топологических пространствах, Учен. зап. МГУ, т. II, вып. 135 (1949), 37—85.

[7] Веденисов Н. Б., Замечания о размерности топологических пространств, Учен. зап. МГУ (1939), математика, вып. XXX, кн. 3, 131—140.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 179—192

Е. С. ЛЯПИН

НОРМАЛЬНЫЕ КОМПЛЕКСЫ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В статье рассматриваются нормальные комплексы ассоциативных систем, т. е. такие подмножества систем, которые являются полными прообразами отдельных элементов при гомоморфизмах систем.

Целью настоящей статьи является исследование некоторых свойств гомоморфизмов ассоциативных систем (т. е. множеств с одним ассоциативным действием). Именно, рассматриваются подмножества ассоциативных систем, которые при некоторых гомоморфизмах этих систем являются полными прообразами отдельных элементов (нормальные комплексы). Частные случаи таких подмножеств: прообразы единицы системы (нормальные подсистемы) и нуля системы (идеалы) уже рассматривались в математической литературе. В настоящей статье мы тоже особо останавливаемся на этих важных случаях. Нормальные подсистемы рассматривались впервые в моей статье [1] для случая, когда система обладает единицей. Последнее ограничение в некотором отношении не существенно, однако оказалось проще вывести заново некоторые немногочисленные свойства нормальных подсистем систем без единицы, которые мне понадобились в настоящей статье, чем выводить их из результатов упомянутой работы. Также понятия и некоторые из свойств идеалов, встречающиеся в настоящей работе, были уже известны ранее [см., например, [2]], однако то немногое, что потребуется от идеалов, излагается здесь полностью в целях полноты и удобства чтения статьи.

Помимо рассмотрения нормальных комплексов для общих систем в настоящей статье рассматривается также некоторая специальная конструкция, названная взаимно-аннулирующей суммой ассоциативных систем. Для систем, разложимых в такие суммы, выясняется строение нормальных комплексов. Понятие и свойства взаимно-аннулирующих сумм могут оказаться полезными при различных исследованиях ассоциативных систем, особенно же при классификации тех или иных классов систем, пример чего я предполагаю вскоре опубликовать в этом же журнале.

Примечание. В статье используется следующее обозначение. Если из справедливости утверждения α следует справедливость утверждения β, то будем писать $\alpha \to \beta$. Два соотношения $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$ будем заменять одним $\alpha \longleftrightarrow \beta$.

§ 1. Нормальные комплексы

1.1. Определение. *Ассоциативной системой* называется непустое множество $\mathfrak{A}$, в котором определен закон умножения, сопоставляющий каждой упорядоченной паре различных или равных между собою элементов $X, Y \in \mathfrak{A}$ третий элемент из $\mathfrak{A}$, обозначаемый XY. При этом должно иметь место условие ассоциативности:

$$(XY)Z = X(YZ) \quad (X, Y, Z \in \mathfrak{A}).$$

В дальнейшем мы будем для краткости называть ассоциативную систему просто *системой*.

Наравне с произведением элементов системы $\mathfrak{A}$ мы иногда будем говорить и о произведении подмножеств $\mathfrak{A}$. Под $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{N}, \mathfrak{M} \subset \mathfrak{A}$, мы будем понимать совокупность всех элементов вида NM, где $N \in \mathfrak{N}$, $M \in \mathfrak{M}$.

1.2. Если непустое подмножество $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ замкнуто относительно умножения в $\mathfrak{A}$, т. е.

$$X, Y \in \mathfrak{B} \to (XY) \in \mathfrak{B},$$

то $\mathfrak{B}$ сама является системой, которая называется *подсистемой* $\mathfrak{A}$.

Отметим, что пересечение любого множества подсистем системы или пусто или само является подсистемой.

1.3. Элемент E системы $\mathfrak{A}$ будем называть *единицей системы*, если для любого $X \in \mathfrak{A}$ имеет место:

$$XE = EX = X.$$

Элемент O системы $\mathfrak{A}$ будем называть *нулем системы*, если для любого $X \in \mathfrak{A}$ имеет место:

$$XO = OX = O.$$

Очевидно, система может иметь не более одного нуля и не более одной единицы.

1.4. Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{K}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *нормальным комплексом*, если для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $K, K' \in \mathfrak{K}$ имеет место:

$$XKY \in \mathfrak{K} \to XK'Y \in \mathfrak{K},$$

$$XK \in \mathfrak{K} \to XK' \in \mathfrak{K},$$

$$KY \in \mathfrak{K} \to K'Y \in \mathfrak{K}.$$

1.5. Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{N}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *нормальной подсистемой*, если для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $N \in \mathfrak{N}$ имеет место:

$$XNY \in \mathfrak{N} \longleftrightarrow XY \in \mathfrak{N},$$

$$XN \in \mathfrak{N} \longleftrightarrow X \in \mathfrak{N},$$

$$NY \in \mathfrak{N} \longleftrightarrow Y \in \mathfrak{N}.$$

1.6. Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{P}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *идеалом*, если для любых $X \in \mathfrak{A}$ и $P \in \mathfrak{P}$ имеет место:

$$XP \in \mathfrak{P}, \quad PX \in \mathfrak{P}.$$

1.7. Рассмотрим несколько свойств введенных понятий. При доказательстве их, так же как и во всех дальнейших рассуждениях, условимся о следующем. Для того чтобы доказать, что некоторое подмножество является нормальным комплексом, надо доказать выполнение трех условий, формулированных в определении (1.4). Однако в большинстве случаев доказательство двух последних из этих свойств вполне аналогично доказательству первого из них (следует мысленно вычеркнуть во всех выкладках соответственно X или Y). Поэтому во всех таких случаях, мы, не оговаривая этого особо, будем ограничиваться доказательством лишь первого свойства. То же самое имеет место и для нормальных подсистем (1.5) и идеалов (1.6).

На доказательстве свойств, справедливость которых следует непосредственно из определений, мы не будем останавливаться.

1.8.1. Нормальная подсистема $\mathfrak{N}$ системы $\mathfrak{A}$ является нормальным комплексом $\mathfrak{A}$.

Действительно,

$$XNY \in \mathfrak{N} \rightarrow XY\mathfrak{N} \in \rightarrow XN'Y \in \mathfrak{N} \quad (X, Y \in \mathfrak{A};\ N, N' \in \mathfrak{N}).$$

1.8.2. Идеал является нормальным комплексом.

1.8.3. Сама система является своим нормальным комплексом, нормальной подсистемой и идеалом.

1.8.4. Всякий элемент системы является ее нормальным комплексом.

1.8.5. Если система $\mathfrak{A}$ имеет единицу E, то:

а) E является нормальной подсистемой $\mathfrak{A}$,

б) всякая нормальная подсистема содержит E,

с) нормальный комплекс, содержащий E, является нормальной подсистемой.

Действительно,

$$XEY = E \longleftrightarrow XY = E.$$

Далее, если $\mathfrak{N}$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$ и $N \in \mathfrak{N}$, то

$$NE = N \in \mathfrak{N} \rightarrow E \in \mathfrak{N}.$$

Наконец, пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, причем $E \in \mathfrak{K}$, $K \in \mathfrak{K}$; тогда

$$XKY \in \mathfrak{K} \longleftrightarrow XEY = XY \in \mathfrak{K}.$$

1.8.6. Если система $\mathfrak{A}$ имеет нуль O, то:

а) O является идеалом $\mathfrak{A}$,

в) всякий идеал содержит O,

с) нормальный комплекс, содержащий O, является идеалом.

Действительно, $OX = O$, по определению. Далее, если $\mathfrak{P}$ есть идеал $\mathfrak{A}$ и $P \in \mathfrak{P}$, то

$$OP = O \in \mathfrak{P}.$$

Наконец, пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, причем $O \in \mathfrak{K}$, $K \in \mathfrak{K}$; тогда

$$XO = O \in \mathfrak{K} \to XK \in \mathfrak{K} \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

1.8.7. Нормальная подсистема является подсистемой.

1.8.8. Идеал является подсистемой.

1.8.9. Пересечение любого множества нормальных комплексов, если оно не пусто, является нормальным комплексом.

Действительно, пусть $\mathfrak{K}_\nu$ $(\nu = \alpha, \beta, \ldots)$ суть нормальные комплексы системы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{K}_\nu$, причем M, $M' \in \mathfrak{M}$. Тогда

$$XMY \in \mathfrak{M} \to XMY \in \mathfrak{K}_\nu \quad (\nu = \alpha, \beta, \ldots) \to XM'Y \in \mathfrak{K}_\nu \quad (\nu = \alpha, \beta, \ldots) \to$$
$$\to XM'Y \in \mathfrak{M}.$$

1.8.10. Пересечение любого множества нормальных подсистем, если оно не пусто, является нормальной подсистемой системы.

1.8.11. Пересечение любого множества идеалов, если оно не пусто, является идеалом.

Справедливость (1.8.10) и (1.8.11) доказывается совершенно аналогично (1.8.9).

1.8.12. Если $\mathfrak{B}$ есть подсистема $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{K}$ — нормальный комплекс $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{K}$ не пусто, то $\mathfrak{M}$ является нормальным комплексом $\mathfrak{B}$.

Действительно, пусть M, $M' \in \mathfrak{M}$ и $X, Y \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим $Z = XMY$ и $Z' = XM'Y$. Из того, что $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, следует, что

$$Z \in \mathfrak{K} \to Z' \in \mathfrak{K},$$

а так как $Z, Z' \subset \mathfrak{B}$, то

$$Z \in \mathfrak{M} \to Z' \in \mathfrak{M}.$$

1.8.13. Если $\mathfrak{B}$ есть подсистема $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ — нормальная подсистема и $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ не пусто, то $\mathfrak{M}$ является нормальной подсистемой $\mathfrak{B}$.

1.8.14. Если $\mathfrak{B}$ есть подсистема $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P}$ — идеал и $\mathfrak{M} = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{N}$ непусто, то $\mathfrak{M}$ есть идеал $\mathfrak{B}$.

Справедливость (1.8.13) и (1.8.14) доказывается аналогично (1.8.12).

1.8.15. Если $\mathfrak{B}$ является одновременно нормальной подсистемой и идеалом системы $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

Действительно, так как $\mathfrak{B}$ есть идеал, то для всяких $X \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{B}$ имеет место: $XB \in \mathfrak{B}$. Отсюда $X \in \mathfrak{B}$, так как $\mathfrak{B}$ есть нормальная подсистема.

§ 2. Гомоморфизмы

2.1. Определение. Отображение φ системы $\mathfrak{A}$ на систему $\mathfrak{B}$ называется *гомоморфизмом* $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, если для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ имеет место:

$$\varphi(XY) = (\varphi X)(\varphi Y).$$

Если отображение φ взаимно однозначно, то гомоморфизм φ называется *изоморфизмом*.

2.2. Пусть α есть гомоморфизм системы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ и β — гомоморфизм $\mathfrak{A}'$ на $\mathfrak{B}'$, причем $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}'$. Тогда, очевидно, следующее отображение γ системы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}'$ является гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\gamma\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B}'$:

$$\gamma A = \beta(\alpha A) \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Будем называть гомоморфизм γ произведением β и α и записывать $\gamma = \beta\alpha$. Гомоморфизм α в этом случае будем называть *делителем* гомоморфизма γ (гомоморфизм β называть делителем γ не будем). Тот факт, что α есть делитель γ, будем обозначать α/γ.

2.3. Пусть $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \ldots$ есть некоторая совокупность гомоморфизмов системы $\mathfrak{A}$. Гомоморфизм ψ будем называть *общим делителем* этих гомоморфизмов, если имеет место: ψ/φ_α, $\psi/\varphi_\beta, \ldots$ Если при этом ψ делится на всякий другой общий делитель этих гомоморфизмов, то ψ будем называть *общим наибольшим делителем* гомоморфизмов $\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \ldots$

Очевидно, всякие два общих наибольших делителя ψ_1 и ψ_2 связаны одновременными соотношениями: ψ_1/ψ_2 и ψ_2/ψ_1.

2.4. Отметим несколько свойств гомоморфизмов произвольной системы $\mathfrak{A}$.

2. 4. 1. Произведение гомоморфизмов ассоциативно, т. е.

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

для тех случаев, когда эти произведения имеют смысл.

2. 4. 2. Отношение делимости рефлексивно и транзитивно, т. е.

$$\alpha/\alpha; \quad (\alpha/\beta,\ \beta/\gamma) \rightarrow \alpha/\gamma.$$

Действительно, пусть ε есть тождественный изоморфизм системы $\alpha\mathfrak{A}$ (т. е. $\varepsilon X = X$ для всякого $X \in \alpha\mathfrak{A}$). Тогда, очевидно, $\alpha = \varepsilon\alpha$, откуда α/α.

Пусть имеются следующие соотношения между гомоморфизмами:

$$\beta = \eta\alpha, \quad \gamma = \xi\beta.$$

Из того, что имеют смысл $(\eta\alpha)$ и $\xi(\eta\alpha)$, следует, что имеют смысл $(\xi\eta)$ и $(\xi\eta)\alpha$. Отсюда, благодаря (2. 4. 1), получаем:

$$\gamma = \xi\beta = \xi(\eta\alpha) = (\xi\eta)\alpha,$$

т. е. α/γ.

2.4.3. Изоморфизм системы есть делитель всякого гомоморфизма.

2.4.4. Если α/β и β/α, то системы $\alpha\mathfrak{A}$ и $\beta\mathfrak{A}$ изоморфны между собой.

Действительно, $\beta = \varepsilon\alpha$, $\alpha = \eta\beta$. Следовательно, $\beta = (\varepsilon\eta)\beta$, т. е. отображение $(\varepsilon\eta)$ есть тождественное отображение $\beta\mathfrak{A}$ на себя. Это возможно лишь в том случае, когда оба отображения ε и η взаимно однозначны, т. е. являются изоморфизмами.

2.4.5. Если некоторый общий делитель φ совокупности гомоморфизмов Ω сам принадлежит Ω, то φ является общим наибольшим делителем совокупности гомоморфизмов Ω.

2.4.6. Если α/β, то для всяких $X, Y \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$(\alpha X = \alpha Y) \to (\beta X = \beta Y).$$

Действительно, если $\beta = \gamma\alpha$, то

$$\beta X = \gamma(\alpha X) = \gamma(\alpha Y) = \beta Y.$$

2.4.7. Если для всяких $X, Y \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$(\alpha X = \alpha Y) \to (\beta X = \beta Y),$$

то α/β.

Действительно, определим отображение γ системы $\alpha\mathfrak{A}$ на систему $\beta\mathfrak{A}$:

$$\gamma(\alpha A) = \beta A \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Это отображение однозначно, и, как легко видеть,

$$[\gamma(\alpha A)]\,[\gamma(\alpha A')] = \gamma\,[(\alpha A)(\alpha A')].$$

Следовательно, γ есть гомоморфизм и $\beta = \gamma\alpha$.

§ 3. Основные леммы

3.1. Пусть в множестве элементов системы $\mathfrak{A}$ определено некоторое симметричное рефлексивное отношение $\sim$, удовлетворяющее условию:

$$(A \sim B) \to (AX \sim BX,\ XA \sim XB) \quad (A, B, X \in \mathfrak{A}).$$

Для каждого элемента $A \in \mathfrak{A}$ определим «комплекс $\widetilde{A}$», являющийся множеством всех таких элементов $B \in \mathfrak{A}$, для каждого из которых найдутся элементы $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющие условию:

$$A \sim X_1 \sim X_2 \sim \cdots \sim X_n \sim B.$$

Очевидно, два комплекса или совпадают или не имеют общих элементов. Множество всех различных комплексов системы $\mathfrak{A}$ обозначим через $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

3.2. ЛЕММА. *Множество комплексов $\widetilde{\mathfrak{A}}$ относительно действия*

$$\widetilde{A}\cdot\widetilde{B} = (\widetilde{AB}) \quad (A, B \in \mathfrak{A})$$

образует систему.

Доказательство. Прежде всего покажем, что определенное в $\widetilde{\mathfrak{A}}$ действие однозначно, т. е., что результат действия не зависит от выбора представителей в каждом комплексе.

Пусть $\widetilde{A} = \widetilde{A}'$, $\widetilde{B} = \widetilde{B}'$ $(A, A', B, B' \in \mathfrak{A})$. Это означает, что существуют $X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$A \sim X_1 \sim \cdots \sim X_n \sim A', \quad B \sim Y_1 \sim \cdots \sim Y_m \sim B';$$

отсюда, по свойству отношения $\sim$, следует

$$AB \sim X_1B \sim \cdots \sim X_nB \sim A'B \sim A'Y_1 \sim \ldots \sim A'Y_m \sim A'B'.$$

т. е. $(\widetilde{AB}) = (\widetilde{A'B'})$.

Ассоциативность действия в $\widetilde{\mathfrak{A}}$ доказывается без труда:

$$(\widetilde{A}\widetilde{B})\widetilde{C} = (\widetilde{AB})\widetilde{C} = (\widetilde{ABC}),$$

$$\widetilde{A}(\widetilde{B}\widetilde{C}) = \widetilde{A}(\widetilde{BC}) = (\widetilde{ABC}).$$

3.3. ЛЕММА. *Отображение $\widetilde{\varphi}$ системы $\mathfrak{A}$ на систему $\widetilde{\mathfrak{A}}$:*

$$\widetilde{\varphi}A = \widetilde{A} \quad (A \in \mathfrak{A})$$

является гомоморфизмом.

Доказательство. Так как различные комплексы не имеют попарно общих элементов, то отображение $\widetilde{\varphi}$ однозначно. Свойство гомоморфизма

$$\widetilde{\varphi}(AB) = (\widetilde{\varphi}A)(\widetilde{\varphi}B) \quad (A, B \in \mathfrak{A})$$

следует из определения действия в $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

3.4 ЛЕММА. *Гомоморфизм $\widetilde{\varphi}$ (3.3) системы $\mathfrak{A}$ на систему $\widetilde{\mathfrak{A}}$ является общим наибольшим делителем множества всех таких гомоморфизмов ψ, у которых:*

$$(A \sim B) \to (\psi A = \psi B) \quad (A, B \in \mathfrak{A}).$$

Доказательство. Так как

$$(A \sim B) \to (\widetilde{A} = \widetilde{B}),$$

то гомоморфизм φ сам принадлежит множеству гомоморфизмов, рассматриваемых в лемме. Пусть ψ есть некоторый другой гомоморфизм этого множества. Условие $\widetilde{\varphi}A = \widetilde{\varphi}B\,(A, B \in \mathfrak{A})$ означает, что $\widetilde{A} = \widetilde{B}$, т. е. что существуют такие элементы $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathfrak{A}$, что

$$A \sim X_1 \sim X_2 \sim \cdots \sim X_n \sim B.$$

Отсюда, по свойству гомоморфизма ψ, следует, что

$$\psi A = \psi X_1 = \psi X_2 = \cdots = \psi X_n = \psi B.$$

Следовательно,

$$(\widetilde{\varphi}A = \widetilde{\varphi}B) \to (\psi A = \psi B),$$

что, согласно (2.4.7), и означает, что $\widetilde{\varphi}/\psi$. Согласно (2.4.5), $\widetilde{\varphi}$ есть общий наибольший делитель рассматриваемого множества гомоморфизмов.

§ 4. Связь нормальных комплексов с гомоморфизмами

4.1. Мы уже упоминали, что значение введенных в § 1 понятий (1.4), (1.5), (1.6) определяется их связью со свойствами гомоморфизмов систем.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{K}$ есть подмножество системы $\mathfrak{A}$.*

Для того чтобы существовал гомоморфизм φ системы $\mathfrak{A}$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов $\varphi\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ был нормальным комплексом.

Для того чтобы существовал гомоморфизм φ системы $\mathfrak{A}$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы системы $\varphi\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ была нормальной подсистемой.

Для того чтобы существовал гомоморфизм φ системы $\mathfrak{A}$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз нуля системы $\varphi\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ был идеалом системы.

Доказательство. — 1°. Пусть $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз в $\mathfrak{A}$ элемента $\varphi\mathfrak{K}$ при гомоморфизме φ. Тогда, если для $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $K, K' \in \mathfrak{K}$ имеет место $XKY \in \mathfrak{K}$, то

$$XKY \in \mathfrak{K} \to \varphi\mathfrak{K} = \varphi(XKY) = (\varphi X)(\varphi K)(\varphi Y) = \\ = (\varphi X)(\varphi K')(\varphi Y) = \varphi(XK'Y) \to XK'Y \in \mathfrak{K}.$$

Следовательно, $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс системы $\mathfrak{A}$.

2°. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс системы $\mathfrak{A}$. Определим в $\mathfrak{A}$ следующее отношение $\sim$. Для элементов $A, B \in \mathfrak{A}$ имеет место $A \sim B$, если существуют такие элементы $X, Y \in \mathfrak{A}$, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$\text{a)}\quad A, B \in X\mathfrak{K}Y, \qquad \text{c)}\quad A, B \in \mathfrak{K}Y,$$
$$\text{b)}\quad A, B \in X\mathfrak{K}, \qquad \text{d)}\quad A, B \in \mathfrak{K},$$
$$\text{e)}\quad A = B.$$

Очевидно, определенное отношение обладает свойствами отношения 3.1) и $\mathfrak{K}$ сам является одним из комплексов этого отношения. Отсюда, согласно (3.3), вытекает, что $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов системы $\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\varphi}\mathfrak{A}$ при гомоморфизме $\widetilde{\varphi}$.

3°. Пусть $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы $E_{(\varphi\mathfrak{A})}$ системы $\varphi\mathfrak{A}$ при гомоморфизме φ. Пусть $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $K \in \mathfrak{K}$; тогда, очевидно,

$$XKY \in \mathfrak{K} \longleftrightarrow E_{(\varphi\mathfrak{A})} = \varphi(XKY) = (\varphi X)(\varphi K)(\varphi Y) = \\ = (\varphi X)\,E_{(\varphi\mathfrak{A})}(\varphi Y) = (\varphi X)(\varphi Y) = \varphi(XY) \longleftrightarrow XY \in \mathfrak{K}.$$

Следовательно, $\mathfrak{K}$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$.

4°. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальная подсистема системы $\mathfrak{A}$. Определим следующим образом отношение $\sim$ в системе $\mathfrak{A}$. $A \sim B\,(A, B \in \mathfrak{A})$, если существуют такие элементы $X, Y \in \mathfrak{A}$, что выполняется хотя бы одно из следующих условий:

$$\text{a)}\quad A, B \in (X\mathfrak{K}Y) \cup XY, \qquad \text{c)}\quad A, B \in (\mathfrak{K}Y) \cup Y,$$
$$\text{b)}\quad A, B \in (X\mathfrak{K}) \cup X, \qquad \text{d)}\quad A, B \in \mathfrak{K}.$$

Очевидно, определенное отношение обладает свойствами отношения (3.1) и $\mathfrak{K}$ сам является одним из комплексов этого отношения, т. е. полным прообразом элемента $\widetilde{\varphi}\mathfrak{K}$ системы $\widetilde{\mathfrak{A}} = \widetilde{\varphi}\mathfrak{A}$ при гомоморфизме $\widetilde{\varphi}$ (3.3). Покажем, что $\widetilde{\varphi}\mathfrak{K} = \widetilde{K}\,(K \in \mathfrak{K})$ есть единица системы $\widetilde{\mathfrak{A}}$. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Так как $AK \sim A$ и $KA \sim A$, то

$$\widetilde{A}\widetilde{K} = (\widetilde{AK}) = \widetilde{A}, \quad \widetilde{K}\widetilde{A} = (\widetilde{KA}) = \widetilde{A},$$

т. е. $\widetilde{K}$ есть единица системы $\widetilde{\mathfrak{A}}$.

5°. Пусть $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз нуля $O_{(\varphi\mathfrak{A})}$ системы $\varphi\mathfrak{A}$ при гомоморфизме φ. Пусть $X \in \mathfrak{A}$ и $K \in \mathfrak{K}$; тогда

$$\varphi(XK) = (\varphi X)(\varphi K) = (\varphi X) \cdot O_{(\varphi\mathfrak{A})} = O_{(\varphi\mathfrak{A})},$$

т. е. $XK \in \mathfrak{K}$ и, следовательно, $\mathfrak{K}$ есть идеал системы $\mathfrak{A}$.

6°. Пусть $\mathfrak{K}$ есть идеал системы $\mathfrak{A}$. Определим следующим образом отношение $\sim$ в системе $\mathfrak{A}$. $A \sim B\,(A, B \in \mathfrak{A})$, если $A = B$ или $A, B \in \mathfrak{K}$. Очевидно, определенное отношение обладает свойствами отношения (3.1) и $\mathfrak{K}$ сам является одним из комплексов этого отношения, т. е. полным прообразом элемента $\widetilde{\varphi}K$ системы $\widetilde{\varphi}\mathfrak{A} = \widetilde{\mathfrak{A}}$ (3.2) при гомоморфизме $\widetilde{\varphi}$ (3.3). Покажем, что $\widetilde{\varphi}\mathfrak{K} = \widetilde{K}\,(K \in \mathfrak{K})$ есть нуль системы $\mathfrak{A}$. Пусть $A \in \mathfrak{A}$. Так как $AK \sim K$ и $KA \sim K$, то

$$\widetilde{A}\widetilde{K} = (\widetilde{AK}) = \widetilde{A}, \quad \widetilde{K}\widetilde{A} = (\widetilde{KA}) = \widetilde{A},$$

т. е. $\widetilde{K}$ есть нуль системы $\mathfrak{A}$.

4.2. Отметим, что благодаря доказанной теореме (4.1) свойства нормальных комплексов, рассмотренные в § 1, могут быть переформулированы естественным образом так, чтобы они являлись свойствами гомоморфизмов систем.

4.3. Гомоморфизмы $\widetilde{\varphi}$, рассмотренные в пунктах 2°, 4°, 6° доказательства теоремы (4.1), не только полезны для этого доказательства, но интересны и сами по себе.

4.3.1. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс системы $\mathfrak{A}$ и $\overset{\frown}{\varphi}$ есть гомоморфизм, рассмотренный в пункте 2° доказательства теоремы (4.1).

$\overset{\frown}{\varphi}$ есть общий наибольший делитель всех тех гомоморфизмов φ системы $\mathfrak{A}$, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов системы $\varphi\mathfrak{A}$.

Дийствительно, согласно (3.4), $\widetilde{\varphi}$ есть общий наибольший делитель всех таких гомоморфизмов ψ, при которых

$$(A \sim B) \rightarrow (\psi A = \psi B) \quad (A, B \in \mathfrak{A}),$$

где $\sim$ понимается в смысле 2° п. 4.1. Но, очевидно, всякий гомоморфизм $\mathfrak{A}$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов, принадлежит к числу таких гомоморфизмов ψ. Отсюда, благодаря (2.4.5), следует справедливость нашего утверждения.

4.3.2 Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальная подсистема системы $\mathfrak{A}$ и $\breve{\varphi}$ есть гомоморфизм, рассмотренный в 4° п.4.1.

$\breve{\varphi}$ есть общий наибольший делитель всех тех гомоморфизмов φ системы $\mathfrak{A}$, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы системы $\varphi\mathfrak{A}$.

4.3.3. Пусть $\mathfrak{K}$ есть идеал системы $\mathfrak{A}$ и $\widetilde{\varphi}$ есть гомоморфизм, рассмотренный в 6° п.4.1.

$\widetilde{\varphi}$ есть общий наибольший делитель всех тех гомоморфизмов φ системы $\mathfrak{A}$, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз нуля системы $\varphi\mathfrak{A}$.

Доказательства (4.3.2) и (4.3.3) вполне аналогичны доказательству (4.3.1), только отношение $\sim$ надо понимать не в смысле 2° п.4.1, а соответственно в смысле 4° и 6°.

4.4. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальная подсистема системы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим гомоморфизм $\overset{\frown}{\varphi}_1$, являющийся общим наибольшим делителем всех тех гомоморфизмов, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов (4.3.1), и гомоморфизм $\breve{\varphi}_2$, являющийся общим наибольшим делителем всех тех гомоморфизмов, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз

единицы системы, на которую отображается $\mathfrak{A}$ (4.3.2). Конечно, всегда $\widetilde{\varphi}_1/\widetilde{\varphi}_2$, при этом, однако, иногда $\widetilde{\varphi}_1$ и $\widetilde{\varphi}_2$ существенно различны. Это видно на примере следующей системы третьего порядка. $\mathfrak{A}$ состоит из элементов A, B, O со следующим правилом коммутативного умножения:

$$A^2 = A, \quad B^2 = B, \quad AB = BA = O,$$
$$AO = OA = BO = OB = O^2 = O.$$

Подмножество системы, состоящее из одного элемента A, очевидно, является нормальной подсистемой. Следовательно, для A $\widetilde{\varphi}_1$ есть изоморфизм. Однако A не является единицей системы $\mathfrak{A}$. Поэтому $\breve{\varphi}_2$ не может быть изоморфизмом. Легко видеть, что в качестве $\breve{\varphi}_2$ можно рассмотреть, например, отображение $\mathfrak{A}$ на свою подсистему, состоящую из элементов A и O:

$$\breve{\varphi}_2 A = A, \quad \breve{\varphi}_2 B = \breve{\varphi}_2 O = O.$$

4.5. Если $\mathfrak{K}$ есть идеал системы $\mathfrak{A}$, то легко видеть, что отношение $\sim$, определенное для $\mathfrak{K}$ по способу 2° п.4.1, совпадает с отношением 6° п.4.1. Следовательно, общий наибольший делитель $\breve{\varphi}$ всех гомоморфизмов, при которых $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз одного из элементов (4.3.1), отображает $\mathfrak{K}$ на нуль системы $\breve{\varphi}\mathfrak{A}$. Отсюда непосредственно следует, что при всяком гомоморфизме ψ, при котором все элементы $\mathfrak{K}$ отображаются в один элемент системы $\psi\mathfrak{A}$, элемент $\psi\mathfrak{K}$ является нулем системы $\psi\mathfrak{A}$.

§ 5. Определение взаимно-аннулирующей суммы

5.1. Пусть неединичные системы (т. е. системы, обладающие каждая более чем одним элементом) $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathfrak{B}_\beta$, ..., $\mathfrak{B}_\nu$, ..., число которых больше одной, не имеют попарно общих элементов, за исключением элемента O, который содержится в каждой $\mathfrak{B}_\nu$ и является в ней нулем. Определим в множестве $\mathfrak{A} = \bigcup_\nu \mathfrak{B}_\nu$ умножение. Если X, Y принадлежат одному и тому же $\mathfrak{B}_\nu$ и $XY = Z$ в этом $\mathfrak{B}_\nu$, то и в $\mathfrak{A}$ полагаем $XY = Z$. Если же X и Y принадлежат различным системам $\mathfrak{B}_\nu$, то в $\mathfrak{A}$ полагаем: $XY = O$. Очевидно, относительно определенного таким образом действия $\mathfrak{A}$ представляет собой систему, которую назовем *взаимно-аннулирующей суммой систем* $\mathfrak{B}_\nu$ и будем обозначать:

$$\mathfrak{A} = \sum_\nu {}^{\oplus} \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}_\nu \oplus \cdots$$

Такое обозначение не может вызвать смешения с обозначением прямой суммы, ибо мы употребляем мультипликативную запись для действия в системе.

Если некоторая система допускает разложение на взаимно-аннулирующую сумму, то будем называть ее *разложимой* и в противном случае — *неразложимой*.

5.2. Из определения (5.1) непосредственно вытекают следующие свойства взаимно-аннулирующих сумм:

5.2.1. Всякое слагаемое взаимно-аннулирующей суммы является его идеалом.

5.2.2. Если имеет место

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu} \oplus \mathfrak{B}_{\nu}, \quad \mathfrak{B}_{\nu} = \sum_{\mu} \oplus \mathfrak{B}_{\nu, \mu},$$

то

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu, \mu} \oplus \mathfrak{B}_{\nu, \mu}.$$

5.2.3. Пусть даны два разложения системы $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующие суммы:

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu} \oplus \mathfrak{B}_{\nu}, \quad \mathfrak{A} = \sum_{\mu} \oplus \mathfrak{C}_{\mu},$$

Тогда имеет место также следующее разложение $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму:

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu, \mu} \oplus \mathfrak{N}_{\nu, \mu}, \quad \mathfrak{N}_{\nu, \mu} = \mathfrak{B}_{\nu} \cap \mathfrak{C}_{\mu}.$$

(Если $\mathfrak{N}_{\nu, \mu}$ состоит из одного нуля, то его следует опустить.)

5.3. ТЕОРЕМА. *Каждая разложимая система разлагается единственным образом на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых слагаемых.*

Доказательство. Пусть X есть произвольный ненулевой элемент разложимой системы $\mathfrak{A}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_X$ совокупность всех таких элементов $M \in \mathfrak{A}$, что каково бы ни было разложение $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму двух слагаемых, X и M обязательно содержатся в одном и том же слагаемом. Из этого определения непосредственно следует, что $\mathfrak{M}_X \ni X, O$. Покажем, что $\mathfrak{M}_X$ есть подсистема. Действительно, предположим, что $M, M' \in \mathfrak{M}_X$, а $N = (MM') \overline{\in} \mathfrak{M}_X$. Тогда при некотором разложении системы $\mathfrak{A}$ имеет место: $X, M, M' \in \mathfrak{B}_{\nu}$ и $N \overline{\in} \mathfrak{B}_{\nu}$, но это невозможно, ибо слагаемое $\mathfrak{B}_{\nu}$ есть подсистема системы.

Если $X, Y \in \mathfrak{A}$, то, очевидно, $\mathfrak{M}_X$ и $\mathfrak{M}_Y$ или совпадают, или не имеют общих элементов, кроме нуля O. Поэтому в сумме $\mathfrak{A} = \bigcup_{X \in \mathfrak{A}} \mathfrak{M}_X$ можно выкинуть часть слагаемых так, чтобы получилась сумма

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\nu} \mathfrak{M}_{X_{\nu}},$$

в которой X_{ν} суть лишь некоторые, а не все элементы $\mathfrak{A}$, причем:

$$\mathfrak{M}_{X_{\alpha}} \cap \mathfrak{M}_{X_{\beta}} = O \quad (X_{\alpha} \neq X_{\beta}).$$

Пусть A и A' принадлежат различным $\mathfrak{M}_{X_{\nu}}$. Это означает, что при некотором разложении $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму элементы A и A' принадлежат разным слагаемым. Отсюда следует, что $AA' = O$. Согласно определению взаимно-аннулирующей суммы, имеет место

$$\mathfrak{A} = \sum_{\nu} \oplus \mathfrak{M}_{X_{\nu}}.$$

Неразложимость каждого из слагаемых этой суммы $\mathfrak{M}_{X_\nu}$ непосредственно следует из (5.2.2).

Единственность разложения на неразложимые слагаемые следует непосредственно из свойства (5.2.3).

§ 6. Нормальные комплексы взаимно-аннулирующих сумм

6.1. Приступим к изучению нормальных комплексов взаимно-аннулирующих сумм.

Как мы уже знаем, среди нормальных комплексов ассоциативных систем особо выделяются по своей важности нормальные подсистемы и идеалы. В настоящем исследовании нам понадобится выделить еще один важный класс нормальных комплексов.

Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{Q}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *антиидеалом* системы $\mathfrak{A}$, если ни при каких $X, Y \in \mathfrak{A}$ ни одно из множеств $X\mathfrak{Q}Y$, $X\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}Y$ не имеет общих элементов с $\mathfrak{Q}$.

6.2. Отметим несколько простейших свойств антиидеалов.

6.2.1. Антиидеал является нормальным комплексом системы.

6.2.2. Антиидеал никогда не является ни нормальной подсистемой, ни идеалом.

6.2.3. Всякое непустое подмножество антиидеала является антиидеалом.

6.3. Пусть дано разложение системы $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots \oplus \mathfrak{B}_\nu \oplus \cdots .$$

ТЕОРЕМА. *Всякая нормальная подсистема системы $\mathfrak{B}_\nu$, отличная от $\mathfrak{B}_\nu$, является нормальной подсистемой $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{A}$ не имеет нормальных подсистем другого типа, отличных от самой $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ есть нормальная подсистема системы $\mathfrak{B}_\nu$ и $N \in \mathfrak{N}$, а $X, Y \in \mathfrak{A}$. Тогда если $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{B}_\nu$, то $\mathfrak{N} \overline{\ni} O$ (1.8.6; 1.8.15). Поэтому включения $XNY \in \mathfrak{N}$ и $XY \in \mathfrak{N}$ возможны лишь при X, $Y \in \mathfrak{B}_\nu$, Но в этом случае, по определению нормальной подсистемы, одно из них влечет другое.

Пусть, $\mathfrak{M}$ есть произвольная нормальная подсистема $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{M}$ содержит и элементы из разных слагаемых $\mathfrak{B}_\nu$, то $\mathfrak{M}$, будучи подсистемой, содержит и O, т. е., согласно 1.8.6, 1.8.15, $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}$. Следовательно, при $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{A}$ нормальная подсистема $\mathfrak{M}$ обязательно содержится в одном из слагаемых разложения, где она, конечно, является нормальной подсистемой. Заметим при этом, что само слагаемое взаимно-аннулирующей суммы, являясь идеалом, не может быть нормальной подсистемой системы $\mathfrak{A}$ (1.8.15).

6.4. ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{P}_\nu \subset \mathfrak{B}_\nu$ ($\nu = \alpha, \beta, \ldots$) есть идеал $\mathfrak{B}_\nu$ или пустое множество, причем множество $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_\alpha \cup \mathfrak{P}_\beta \cup \ldots \cup \mathfrak{P}_\nu \cup \ldots$ не пусто. Тогда $\mathfrak{P}$ есть идеал системы $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{A}$ не имеет идеалов другого типа.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{A}$ и $P_\nu \in \mathfrak{P}_\nu \subset \mathfrak{P}$. Если $X \in \mathfrak{B}_\nu$, то $XP \in \mathfrak{B}_\nu$, так как $\mathfrak{P}_\nu$ есть идеал $\mathfrak{B}_\nu$. Если же $X \overline{\in} \mathfrak{B}_\nu$, то $XP = O \in \mathfrak{P}_\nu$, так как X и P принадлежат различным слагаемым взаимно-аннулирующей суммы.

Пусть теперь $\mathfrak{P}'$ есть произвольный идеал системы $\mathfrak{A}$. Обозначим

$$\mathfrak{P}'_\nu = \mathfrak{P}' \cap \mathfrak{B}_\nu \quad (\nu = \alpha, \beta, \ldots).$$

Очевидно, $\mathfrak{P}' = \bigcup\limits_\nu \mathfrak{P}'_\nu$. Согласно 1.8.14, $\mathfrak{P}'_\nu$ есть идеал $\mathfrak{B}_\nu$.

6.5. ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{Q}_\nu \subset \mathfrak{B}_\nu \, (\nu = \alpha, \beta, \ldots)$ есть антиидеал $\mathfrak{B}_\nu$ или пустое множество, причем множество*

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_\alpha \cup \mathfrak{Q}_\beta \cup \cdots \cup \mathfrak{Q}_\nu \cap \ldots$$

не пусто. Тогда $\mathfrak{Q}$ является антиидеалом системы $\mathfrak{A}$, причем $\mathfrak{A}$ не имеет антиидеалов другого типа.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $Q, Q' \in \mathfrak{Q}$. Предположим, что $XQY = Q'$. Если бы X, Y, Q, не принадлежали одному и тому же слагаемому $\mathfrak{B}_\nu$, то $Q' = O$. Но в таком случае $\mathfrak{Q} \ni O$ и, следовательно, при некотором ν имеет место: $\mathfrak{Q}_\nu \ni O$, т. е. $\mathfrak{Q}_\nu$ является одновременно и идеалом (1.8.6, 6.2.1) и антиидеалом, что невозможно (6.2.2).

Итак, $X, Y, Q, Q' \in \mathfrak{B}_\nu$ и $Q, Q' \in \mathfrak{Q}_{(\nu)}$. Но в таком случае равенство $XQY = Q'$ противоречило бы тому, что $\mathfrak{Q}_\nu$ есть антиидеал $\mathfrak{B}_\nu$.

Пусть теперь $\mathfrak{Q}'$ — произвольный антиидеал $\mathfrak{A}$. Обозначим

$$\mathfrak{Q}' \cap \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{Q}'_\nu;$$

очевидно, $\mathfrak{Q}' = \bigcup\limits_\nu \mathfrak{Q}'_\nu$. Но, согласно (6.2.3), $\mathfrak{Q}'_\nu$, если оно не пусто, является антиидеалом $\mathfrak{A}$, а следовательно, и антиидеалом $\mathfrak{B}_\nu$.

6.6. ТЕОРЕМА. *Единственными нормальными комплексами $\mathfrak{A}$ являются: 1) идеалы, 2) антиидеалы,. 3) нормальные комплексы отдельных слагаемых $\mathfrak{B}_\nu$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что нормальный комплекс $\mathfrak{K}$ системы $\mathfrak{B}_\nu$ является нормальным комплексом $\mathfrak{A}$.

Действительно, пусть $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $K_1, K_2, K_3 \in \mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}_\nu$, причем $XK_1Y = K_2$. Если один из элементов K_1, K_2, K_3 равен O, то нормальный комплекс $\mathfrak{K}$, содержа нуль, является идеалом $\mathfrak{B}_\nu$ (1.8.6), а следовательно, и идеалом $\mathfrak{A}$ (6.4). Пусть все K_1, K_2, K_3 отличны от O. Тогда $X, Y \in \mathfrak{B}_\nu$ и так как $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{B}_\nu$, то $XK_1Y \in \mathfrak{K}$ влечет за собою $XK_3Y \in \mathfrak{K}$.

Пусть теперь $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, не являющийся антиидеалом и содержащий ненулевые элементы по крайней мере из двух различных слагаемых разложения $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму. Поскольку $\mathfrak{A}$ не антиидеал, должны существовать такие элементы $X, Y \in \mathfrak{A}$ и $K, K' \in \mathfrak{K}$, что $XKY = K'$ (последующее рассуждение не изменится, если имеет место аналогичное равенство, но без X или без Y). Если $K' = O$, то $\mathfrak{K}$ есть идеал $\mathfrak{A}$ (1.8.6). Если же $K' \neq 0$, то это означает, что все три элемента X, Y, K содержатся в одном и том же сла-

гаемом $\mathfrak{B}_\nu$. Тогда возьмем в $\mathfrak{K}$ элемент K'', не принадлежащий $\mathfrak{B}_\nu$. Из $XKY \in \mathfrak{K}$ следует, что $O = XK''Y \in \mathfrak{K}$, т. е. $\mathfrak{K}$ есть опять идеал $\mathfrak{A}$.

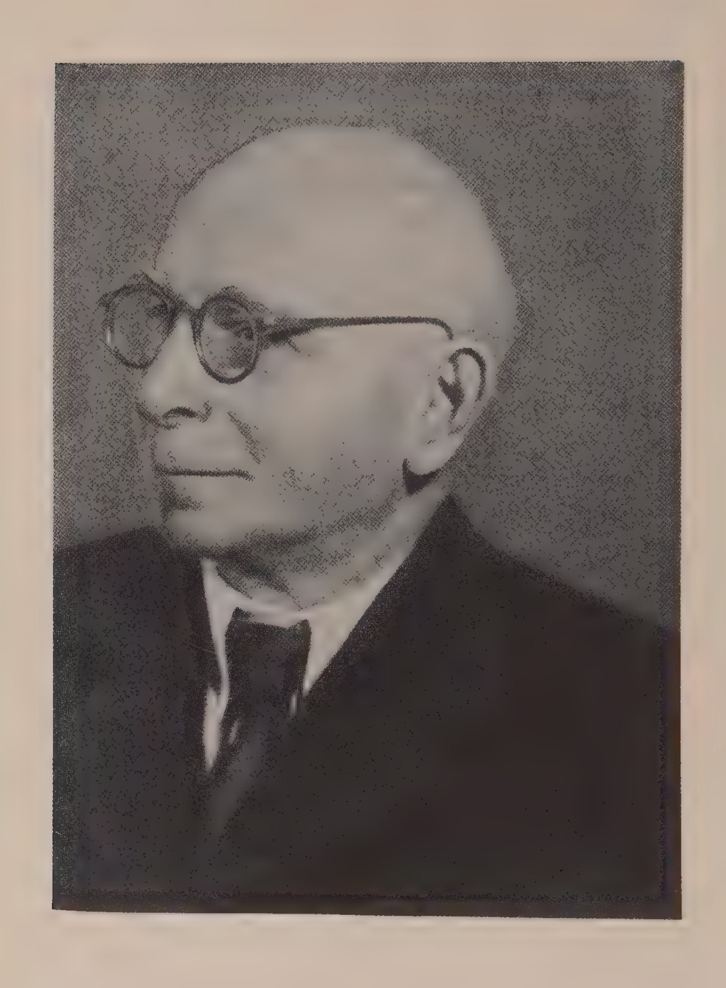
Поступило
23.VII.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпин Е. С., Ядра гомоморфизмов ассоциативных систем, Математ. сборник, 20 (62): 3 (1947), 497—514.

[2] Rees D., On semi-groups, Proc. of Cambridge Phil. Soc. 36 (1940), 387—400.





ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 193—198

К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СЕРГЕЯ НАТАНОВИЧА БЕРНШТЕЙНА

В марте этого года исполнилось семьдесять лет со дня рождения академика Сергея Натановича Бернштейна, одного из крупнейших советских ученых.

Сергей Натанович — продолжатель традиций знаменитых русских математиков Чебышева, Маркова, Ляпунова. Это сказывается не только в тематике работ Сергея Натановича, но и в общей их направленности. В основе его творчества лежит непоколебимое убеждение в том, что математический метод призван пронизывать современное естествознание. «В наши дни все математики и физики согласны, что область применения математики не имеет пределов, отличных от пределов самого знания» — такими словами начинается первая работа Сергея Натановича (1903 г.), в которой решается одна из знаменитых математических проблем, привлекавшая многих крупных математиков. Здесь дается доказательство аналитичности всех достаточно гладких решений уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа. Сергей Натанович всегда остается противником праздной игры ума. Все его работы тесно связаны с вопросами естествознания, понимаемого в самом широком смысле.

Характерной чертой всего творчества Сергея Натановича является также предпочтение, отдаваемое конкретно поставленным трудным проблемам перед близко лежащими и естественно возникающими обобщениями. Преодолевая большие трудности, лежащие на пути решения поставленной задачи, Сергей Натанович часто намного опережает своих современников, захватывая такие области, планомерное освоение которых принадлежит будущему. На первый взгляд кажется иногда, что Сергей Натанович решает трудную частную задачу. На самом же деле оказывается, что те методы, которыми он здесь пользуется, применимы для решения очень широкого класса задач.

Сергею Натановичу принадлежит большое количество замечательных работ. Число их продолжает быстро расти до сих пор. Не претендуя на какую-либо полноту их описания, остановимся на важнейших их направлениях.

Как мы уже говорили, первые его работы посвящены теории дифференциальных уравнений. Кроме упомянутой уже его работы об аналитичности решений уравнений эллиптического типа, сюда относится большой цикл работ, посвященных доказательству существования решения задачи Дирихле для широких классов нелинейных эллиптических уравнений. Результаты этих работ во многих отношениях остаются непревзойденными до сих пор. Сюда же относится следующая теорема, которая тесно свя-

зана с обобщением теоремы Лиувилля об ограниченных гармонических функциях, определенных на всей плоскости. Если функция определена на всей действительной плоскости (x, y), то поверхность $z = f(x, y)$ ни при каком h не может быть заключена между плоскостями $z = \pm h$, если гауссова кривизна ее всюду не положительна и не тождественно равна 0.

В дальнейшем главное внимание Сергея Натановича было направлено на теорию приближения функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами, а в самое последнее время — на вопросы приближения функций, заданных на всей бесконечной оси целыми функциями конечной степени. Основателем этой области науки был знаменитый П. Л. Чебышев. После него эти работы продолжали Е. И. Золотарев, А. А. Марков, В. А. Марков. С. Н. Бернштейну принадлежат здесь многочисленные результаты первостепенной важности. Эти его работы послужили основой современной конструктивной теории функций действительного переменного. Напомним некоторые из них.

Известно, что для всякой непрерывной функции $f(x)$, заданной на конечном интервале, при всяком целом положительном n существует многочлен $P_n(x)$ степени n, отклонение которого от $f(x)$, т. е. максимум $|f(x) - P_n(x)|$ имеет наименьшую величину по сравнению с отклонением от $f(x)$ всех других многочленов n-й степени. Это наименьшее отклонение обозначают через $E_n(f)$. Сергей Натанович указал способ, дающий возможность построить с любой точностью многочлен n-й степени, наименее уклоняющийся от $f(x)$. Он исследовал связь между быстротой убывания $E_n(f)$ при $n \to \infty$ с гладкостью функции $f(x)$ и указал метод, который позволяет установить дифференциальные свойства функций, если известно поведение ее наилучшего приближения. Он показал, что аналитические функции действительного переменного характеризуются тем, что для них $E_n(f)$ стремится к 0 быстрее c^n, где c — некоторое положительное число. Ослабление этого условия привело Сергея Натановича к важным классам квазианалитических функций, т. е. к таким функциям, значения которых на всем интервале вполне определяются их значением на как угодно малой части этого интервала. Отметим еще очень тонкую оценку $E_n(|x|)$ и замечательные многочлены, указанные Сергеем Натановичем и носящие его имя:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Они равномерно приближаются при $n \to \infty$ к любой непрерывной функции $f(x)$, заданной на интервале $(0,1)$.

С вопросами приближения функций алгебраическими полиномами связана теория приближения функций тригонометрическими полиномами, теория тригонометрических рядов и теория механических квадратур, в которых Сергею Натановичу также принадлежит много замечательных результатов. Отметим, например, его следующую широко известную теорему: если функция удовлетворяет условию Липшица с показателем, меньшим половины, то она разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Весьма значительные результаты были получены Сергеем Натановичем в области изучения экстремальных свойств полиномов. Его неравенства для производных от тригонометрических полиномов, носящие в настоящее время его имя, получили обобщения в самых различных направлениях. В частности, важные обобщения принадлежат самому Сергею Натановичу.

В последние годы Сергей Натанович получил ряд замечательных результатов по теории приближения функций, заданных на всей бесконечной оси целыми функциями конечной степени.

Третьим кругом вопросов, которыми занимался Сергей Натанович, является теория вероятностей. Основоположные результаты в этой науке, как и в теории приближений функций многочленами, принадлежат русским ученым П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову. Работы Сергея Натановича по теории вероятностей блестяще завершают исследования этих ученых по предельным теоремам для сумм случайных величин. Он дал доказательство основной предельной теоремы для сумм независимых случайных величин при самых широких предположениях и установил широкие условия, при которых предельная теорема сохраняется для сумм зависимых случайных величин. Впервые он дал также доказательство предельной теоремы для двумерного случая. К этим фундаментальным результатам Сергея Натановича примыкают его остроумные и тонкие решения большого числа более частных проблем теории вероятностей и математической статистики.

СПИСОК ТРУДОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА за период с 1940 по 1949 гг. *

1940

208. К вопросу о локальном наилучшем приближении функций (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 26, стр. 839—842).
209. Первая заметка о линейных дифференциальных операторах (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 29, стр. 532—535).
210. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 4, стр. 17—26).
211. Новые приложения почти независимых величин (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 4, стр. 137—150).
212. Задача об урне с добавляемыми шарами (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 28, стр. 5—7).

1941

213. Петербургская школа теории вероятностей (*Уч. зап. ЛГУ*, № 55, стр. 3—11).
214. О приближении непрерывной функции линейным дифференциальным оператором от многочлена (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 5, стр. 15—42).
215. О суммах зависимых величин, имеющих взаимно почти нулевую регрессию (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 32, стр. 303—307).
216. О «доверительных» вероятностях Фишера (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 5, стр. 85—94).
217. Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса (*Труды Ленинградск. политехн. ин-та*, № 3, стр. 3—20).
218. О первой краевой задаче (задаче Дирихле) для уравнений эллиптического типа и о свойствах функций, удовлетворяющих этим уравнениям (*Успехи матем. наук*, т. VIII, стр. 8—26; совм. с И. Г. Петровским).
219. Доказательство теоремы Гильберта об аналитическом характере решений эллиптических уравнений без использования нормальных рядов (*Успехи матем. наук*, т. VIII, стр. 82—99).
220. Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа (*Успехи матем. наук*, т. VIII, стр. 75—81).
221. Об уравнениях вариационного исчисления (*Успехи матем. наук*, т. VIII, стр. 32—74).

1942

222. Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 6, стр. 285—290).

1943

223. Возврат к вопросу о точности предельной формулы Лапласа (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 7, стр. 3—16).
224. О сходимости многочленов $\sum_{0}^{n} C_n^m f\left(\frac{m}{n}\right) x^m (1-x)^{n-m}$ в комплексной области (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 7, стр. 49—88).
225. Дополнение к моей статье «Усиление теоремы о поверхностях отрицательной кривизны» (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 7, стр. 297—298).

---

* Список работ до 1940 г. опубликован в Известиях Ак. Наук СССР, сер. матем., 4 (1940), стр. 253—260.

1944

226. Новые обобщения теоремы Лиувилля и ее распространение на уравнения параболического типа (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 42, стр. 107—112).
227. Распространение предельной теоремы теории вероятностей на суммы зависимых величин (*Успехи матем. наук,* т. X, стр. 65—114).

1945

228. Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.,* т. 9, стр. 145—158).
229. Академик П. Л. Чебышев (*Природа,* № 3, стр. 78—86).
230. О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей (*Научное наследие П. Л. Чебышева,* изд. АН. СССР, стр. 43—67).

1946

231. О наилучшем приближении функций $\int\limits_0^\infty |y|^s \, d\psi(s)$ на отрезке $(-1, +1)$ (*Известия Ак. Наук СССР, серия матем.,* т. 10, стр. 185—196).
232. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. I (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 51, стр. 327—330).
233. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. II (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 51, стр. 485—488).
234. О наилучшем приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций конечной степени. III (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 52, стр. 565—568).
235. О верхней границе максимума модуля производной монотонной функции конечной степени (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 51, стр. 567—568).
236. Обобщение одного результата С. М. Никольского (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 53, стр. 587—590).
237. О наилучшем приближении на всей вещественной оси при помощи целых функций конечной степени. IV (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 54, стр. 103—108).
238. Добавление к работе И. И. Ибрагимова «Об асимптотическом значении наилучшего приближения функции, имеющей вещественную особую точку» (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.,* т. 10, стр. 461—462).
239. О приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. V (*Доклады Ак. Наук СССР.* т. 54, стр. 479—482).
240. Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближения (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 54, стр. 667—668).
241. О предельной теореме теории вероятностей (*Известия НИИ мат. и мех. при Томском гос. ун-те,* стр. 174—189).
242. Теория вероятностей (М. — Л., изд. 4-е доп., 556 стр.).

1947

243. О наилучшем приближении аналитических функций при помощи целых функций конечной степени (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 56, стр. 891—894).
244. О предельных зависимостях между константами теории наилучшего приближения (*Доклады Ак. Наук СССР,* т. 57, стр. 3—5).
245. О свойствах однородных функциональных классов (*Доклады Ак. Наук. СССР,* т. 57, стр. 111—114).
246. О роли неравенств и экстремальных проблем в математическом анализе (*Юбил. сборн.,* посв. 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции, стр. 114—133).
247. Предельные законы теории наилучших приближений (*Доклады Ак. Наук СССР.* т. 58, стр. 525—528).

248. Чебышев, его влияние на развитие математики (*Учен. зап. Московского гос. ун-та*, 91, стр. 35—45).

1948

249. О некоторых элементарных экстремальных свойствах многочленов нескольких переменных (*Доклады. Ак. Наук СССР*, т. 59, стр. 833—836).
250. Вторая заметка об однородных функциональных классах (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 59, стр. 1379—1384).
251. О целых функциях конечной степени многих вещественных переменных (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 60, стр. 949—952).
252. Распространение неравенств С. Б. Стечкина на целые функции конечной степени (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 60, стр. 1487—1490).
253. Перенесение свойств тригонометрических полиномов на целые функции конечной степени (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 12, стр. 421—444).

1949

254. О майорантах конечного или квазиконечного роста (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 65, стр. 117—120).
255. Об аддитивных майорантах конечного роста (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 66, стр. 545—548).
256. Функции конечной степени и функции конечной полустепени (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 13, стр. 111—124).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 199–214

И. М. ВИНОГРАДОВ

ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА МОДУЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СУММЫ

В статье рассматривается верхняя граница модуля суммы

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)$ — многочлен степени $n+1$ с вещественными коэффициентами. Эта граница дается как функция от p, n и от знаменателя q подходящей дроби к коэффициенту при степени x, высшей чем первая.

Обозначения. n — целое, $n \geqslant 11$, $\nu = \frac{1}{n}$, $b = \left[\frac{5}{4} n + \frac{1}{2}\right]$,

$$h = n+2, \quad k = \left[\frac{\ln Un}{-\ln(1-\nu)} + 1\right], \quad U \geqslant n+1, \quad \sigma = (1-\nu)^k,$$

p_1 — целое, $p_1 > (2n)^{Unk}$, $p_t = p_1^{(1-\nu)^{t-1}}$, $\eta_t = [\nu \log_2 p_t]$; $t = 1, \ldots, k+1$, $a_{n+1}, \ldots, a_1$ — вещественные, $f(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_1 x$.

Символ $\sum\limits_{M}^{M} V$ обозначает сумму не более чем M слагаемых вида V.

Символ $\sum_0 V$ обозначает произведение положительного числа A на сумму не более чем B слагаемых вида V при условии, что $AB = M$.

Символ (z) обозначает расстояние вещественного числа до ближайшего целого числа.

Буквою θ обозначаем число с условием $|\theta| \leqslant 1$.

Для обозначения сравнимости чисел A и B по модулю 1 (т. е. для обозначения равенства дробных частей чисел A и B) пишем $A \equiv B$.

Нетрудно видеть, что имеют место следующие неравенства:

$$b \geqslant 14, (n-1)\ln Un < k < (n-0{,}5)\ln Un + 1, \quad \frac{1-\nu}{Un} \leqslant \sigma < \frac{1}{Un},$$

$$p_{k+1} > (2n)^{k(1-\nu)} > (2n)^{4n}, \quad p_{k+1}^{\nu} > (2n)^4,$$

$$\nu \log_2 p_t - 1 < \eta_t, \quad 0{,}5\, p_t^{\nu} < 2^{\eta_t} \leqslant p_t^{\nu}, \quad 2^{\eta_k} > 8n^4, \quad \eta_k > 16.$$

Целью этого исследования является разыскание такой верхней границы для модуля суммы

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f(x)},$$

которая была бы нетривиальна и в случае, когда степень $n+1$ многочлена может неограниченно расти одновременно с изменением вида многочлена и с беспредельным возрастанием p. Указываемая здесь верхняя

граница модуля суммы является функцией от p, n и от знаменателя q подходящей дроби к любому коэффициенту a_r многочлена, отличному от a_1. Эта граница может быть заменена и еще более точной, что однако связано с значительным усложнением доказательства.

В прежних работах (моих и других авторов) подробное изложение применения моего метода к рассматриваемому здесь случаю (и притом с менее совершенными результатами) было дано лишь для $r = n + 1$.

В приводимых здесь рассуждениях будут применены некоторые леммы моей книги „Метод тригонометрических сумм в теории чисел“ ([1]). В ряде случаев прежние формулировки этих лемм теперь, однако, недостаточны; в этих случаях даются новые формулировки, сопровождаемые подробными доказательствами.

ЛЕММА 1. *Пусть η и m — целые положительные и $T_1, \ldots, T_\eta$ — неотрицательные вещественные. Тогда*

$$\left(\sum_{s=1}^{\eta} 2^{-s} T_s\right)^m < \sum_{s=1}^{\eta} T_s^m.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 2 моей книги ([1]).

ЛЕММА 2. *Пусть r — целое положительное, $m > 1$ и $x_1, \ldots, x_r$ — неотрицательные вещественные. Тогда*

$$x_1 + \cdots + x_r)^m \leqslant r^{m-1}(x_1^m + \cdots + x_r^m), \quad r^r x_1 \ldots x_r \leqslant (x_1 + \cdots + x_r)^r.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 1,b моей книги ([1]).

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$\Phi(y) = \frac{ay + \psi(y)}{q}, \quad (a, q) = 1,$$

f — целое, y пробегает значения $y = f, \ldots, f + q - 1$ и для этих значений y функция $\psi(y)$ имеет вещественные значения, разность между наибольшим и наименьшим из которых не превосходит λ.

Тгода при $V > 0$ число значений y с условием

$$(\Phi(y)) \leqslant V q^{-1} \tag{1}$$

не превосходит $\lambda + 2 + 2V$.

Доказательство. Полагая $y = f + z$, находим

$$(\Phi(y)) = \left(\frac{az + \delta(z)}{q}\right), \quad \delta(z) = af + \psi(f + z).$$

При некотором B для всех $z = 0, \ldots, q-1$ имеем $B \leqslant \delta(z) \leqslant B + \lambda$. Полагая $\beta = \{B\}$ и обозначая буквою ρ наименьший неотрицательный вычет $az + [B]$ по модулю q, получим

$$(\Phi(y)) = \left(\frac{\rho + \sigma(\rho)}{q}\right), \quad \beta \leqslant \sigma(\rho) \leqslant \beta + \lambda.$$

При $q \leqslant \lambda + 2 + 2V$ утверждение леммы очевидно; при $q > \lambda + 2 + 2V$ это утверждение следует из того обстоятельства, что случаями, когда неравенство (1) может иметь место, могут быть лишь такие:

$$\rho = q - [\beta + \lambda + V), \ldots, q - 1; 0, \ldots, [V].$$

ЛЕММА 4. *Пусть* m, p, r — *целые*, $m > 0$, $p > 1$, $r > 1$,

$$\alpha = \frac{am}{q} + \frac{\theta m}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q < p^r,$$

y *пробегает* $\leqslant Y$ *последовательных целых чисел. Тогда при* $W \geqslant 1$ *число значений* y *с условием*

$$(\alpha y) < W p^{-r+1} \tag{2}$$

будет

$$< (3m + 2Wqp^{-r+1}) [Yq^{-1} + 1].$$

Доказательство. Пусть $(m, q) = d$, $m = m_1 d$, $q = q_1 d$. Находим

$$\alpha = \frac{am_1}{q_1} + \frac{\theta m_1}{q_1 q}.$$

Среди $\leqslant q_1$ последовательных значений y число значений с условием (2), согласно лемме 3, будет

$$\leqslant m_1 + 2 + 2Wq_1 p^{-r+1};$$

поэтому среди $\leqslant q$ последовательных значений y число значений с таким условием будет

$$\leqslant m + 2d + 2Wqp^{-r+1} \leqslant 3m + 2Wqp^{-r+1},$$

откуда и следует наша лемма.

ЛЕММА 5. *Пусть* $p_0 > (2n)^n$,

$$p_0 = RH, \quad R > 1, \quad H \geqslant 2n - 1, \quad C \geqslant 2b.$$

Пусть, далее, $v_1, \ldots, v_n$ *пробегают целые числа интервалов*

$$X_1 < v_1 \leqslant Y_1, \ldots, X_n < v_n \leqslant Y_n,$$

ограниченных условиями: $-p_0 \leqslant X_1$, $Y_n \leqslant p_0$,

$$Y_1 - X_1 \geqslant R, \ldots, Y_n - X_n \geqslant R;$$

$$X_2 - Y_1 \geqslant R, X_3 - Y_2 \geqslant R, \ldots, X_n - Y_{n-1} \geqslant R.$$

Тогда, каковы бы ни были интервалы с длинами

$$Cp_0^{1-\nu}, Cp_0^{2(1-\nu)}, \ldots, Cp_0^{n(1-\nu)},$$

для числа E *систем* $v_1, \ldots, v_n$, *при которых суммы*

$$v_1 + \cdots + v_n, \; v_1^2 + \cdots + v_n^2, \ldots, v_1^n + \cdots + v_n^n \tag{3}$$

соответственно лежат в этих интервалах, будем иметь

$$E < C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}} p_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

Доказательство. Сначала оценим число E_0 систем $v_1, \ldots, v_n$, при которых суммы (3) попадают в заданные интервалы с длинами

$$C, Cp_0, \ldots, Cp_0^{n-1}.$$

Пусть s — целое с условием $1 < s \leqslant n$. Если при заданных $v_{s+1}, \ldots, v_n$ суммы (3) лежат в указанных интервалах, то суммы

$$v_1 + \cdots + v_s, \; v_1^2 + \cdots + v_s^2, \ldots, v_1^s + \cdots + v_s^s,$$

очевидно, лежат в некоторых интервалах с длинами

$$C, Cp_0, \ldots, Cp_0^{s-1}.$$

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_s$; $\eta_1+\xi_1, \ldots, \eta_s+\xi_s$ — две системы значений $v_1, \ldots, v_s$ с последним свойством; тогда имеем

$$\frac{(\eta_1+\xi_1)-\eta_1}{\xi_1}\xi_1+\cdots+\frac{(\eta_s+\xi_s)-\eta_s}{\xi_s}\xi_s=\theta_0 C,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(\eta_1+\xi_1)^s-\eta_1^s}{s\xi_1}\xi_1+\cdots+\frac{(\eta_s+\xi_s)^s-\eta_s^s}{s\xi_s}\xi_s=\frac{\theta_{s-1}}{s}Cp_0^{s-1},$$

откуда находим

$$\Delta\xi_s-\Delta'=0; \tag{4}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{(\eta_1+\xi_1)-\eta_1}{\xi_1}\ldots\frac{(\eta_s-\xi_s)-\eta_s}{\xi_s}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{(\eta_1-\xi_1)^s-\eta_1^s}{s\xi_1}\ldots\frac{(\eta_s-\xi_s)^s-\eta_s^s}{s\xi_s}\end{vmatrix},$$

$$\Delta'=\begin{vmatrix}\frac{(\eta_1+\xi_1)-\eta_1}{\xi_1}\ldots\frac{(\eta_{s-1}+\xi_{s-1})-\eta_{s-1}}{\xi_{s-1}}\;\theta_0 C\\ \cdots\cdots\cdots\\ \frac{(\eta_1+\xi_1)^s-\eta_1^s}{s\xi_1}\ldots\frac{(\eta_{s-1}+\xi_{s-1})^s-\eta_{s-1}^s}{s\xi_{s-1}}\;\frac{\theta_{s-1}}{s}Cp_0^{s-1}\end{vmatrix}.$$

Применяя в равенстве (4) формулу Лагранжа последовательно ко всем s переменным $\eta_1, \ldots, \eta_s$, получим

$$\Delta_s\xi_s-\Delta_s'=0;$$

$$\Delta_s=\begin{vmatrix}1 & \ldots & 1\\ \cdot & \cdots & \cdot\\ x_1^{s-1} & \ldots & x_s^{s-1}\end{vmatrix},\quad \Delta_s'=\begin{vmatrix}1 & \ldots & 1 & \theta_0 C\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot\\ x_1^{s-1} & \ldots & x_{s-1}^{s-1} & \frac{\theta_{s-1}}{s}Cp_0^{s-1}\end{vmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_s$ удовлетворяют тем же неравенствам, какие в формулировке леммы указаны для $v_1, \ldots, v_s$.

Далее находим

$$\Delta_s'=\sum_{r=0}^{s-1}\frac{\theta_r C p_0^r}{r+1}U_r,$$

где U_r есть коэффициент при x_s^r в разложении Δ_s по степеням x_s. Но

$$\Delta_s=(x_s-x_1)\cdots(x_s-x_{s-1})\Delta_{s-1};$$

следовательно,

$$U_r=D_{s-1-r}\Delta_{s-1},$$

где D_{s-1-r} есть сумма произведений чисел $-x_1, \ldots, -x_{s-1}$, взятых по $s-1-r$. Поэтому

$$|D_{s-1-r}|\leqslant\binom{s-1}{r}p_0^{s-1-r},\quad |\xi_s|\leqslant\sum_{=0}^{s-1}\frac{\binom{s-1}{r}p_0^{s-1}C}{(r+1)(x_s-x_1)\cdots(x_s-x_{s-1})},$$

откуда, ввиду справедливости при $\alpha > \beta$ неравенства

$$x_\alpha - x_\beta \geqslant (2(\alpha - \beta) - 1) R,$$

имеем

$$|\xi_s| \leqslant \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\binom{s-1}{r} CH^{s-1}}{(r+1)\, 1.3 \ldots (2s-3)} = L_s CH^{s-1}, \quad L_s = \frac{2^s - 1}{1.3 \ldots (2s-3)\, s}.$$

Таким образом, v_s при данных $v_{s+1}, \ldots, v_n$ не может иметь более чем (за η_s можно принять наименьшее из всех возможных)

$$L_s CH^{s-1} + 1$$

различных значений. Это утверждение верно и при $s = 1$, если положим $L_1 = 1$. Действительно, число случаев, когда v_1 при данных $v_2, \ldots, v_n$ лежит в интервале длиною C, будет

$$\leqslant C + 1 = L_1 CH^{1-1} + 1.$$

Из доказанного следует, что

$$E_0 \leqslant \prod_{s=1} (L_s CH^{s-1} + 1) <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{C}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{CH}\right)\left(\frac{7}{9} + \frac{1}{CH^2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{CH^3}\right)^{n-3} C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}} <$$

$$< 2 \cdot 3^{-(n-3)} C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}} < 3^{-7} C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Но очевидно

$$\frac{E}{E_0} < \left(\frac{p_0^{1-\nu}}{1} + 1\right)\left(\frac{p_0^{2(1-\nu)}}{p_0} + 1\right) \cdots \left(\frac{p_0^{(n-1)(1-\nu)}}{p_0^{n-2}} + 1\right) =$$

$$= (p_0^{1-\nu} + 1)(p_0^{1-2\nu} + 1) \cdots (p_0^{\nu} + 1) < p_0^{\frac{n-1}{2}} e^{p_0^{-\nu}(1 - p_0^{-\nu})^{-1}} < 2 p_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

Поэтому

$$E < 2 p_0^{\frac{n-1}{2}} 3^{-7} C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}} < C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}} p_0^{\frac{n-1}{2}}.$$

ЛЕММА 6. *Пусть каждому $t = 1, \ldots, k$ отвечают свои системы*

$$(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n}),$$

состоящие из целых чисел с условиями

$$|U_{t,1}| \leqslant 2bp_t, \ldots, |U_{t,n}| \leqslant 2bp_t^n,$$

причем можно указать число F_t такое, что, каковы бы ни были интервалы с длинами

$$Cp_t^{1-\nu}, \ldots, Cp_t^{n(1-\nu)}, \quad C \geqslant 2b,$$

число систем $(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n})$ с числами, соответственно попадающим в эти интервалы, не превосходит $C^n F_t$.

Выбрав для каждого $t = 1, \ldots, k$ одну из соответствующих этому систем и полагая

$$U_1 = U_{1,1} + \cdots + U_{k,1}, \ldots, U_n = U_{\;,n} + \cdots + U_{k,n},$$

составим систему $(U_1, \ldots, U_n)$.

Тогда, каковы бы ни были $z_1, \ldots, z_n$, *число систем* $(U_1, \ldots, U_n)$ *с условием*

$$U_1 = z_1, \ldots, U_n = z_n \tag{5}$$

будет

$$< 2^k (2b)^{nk} F_1 \ldots F_k.$$

Доказательство. При наличии равенств (5) для данного t и для r, равного любому из чисел $1, \ldots, n$, имеем

$$U_{t,r} = z_r - U_{1,r} - \cdots - U_{t-1,r} - (U_{t+1,r} + \cdots + U_{k,r}).$$

Но сумма, стоящая в скобках, равна нулю при $t = k$, а при $t < k$ эта сумма численно меньше, чем

$$2b\left(p_{t+1}^r + p_{t+2}^r + \cdots + p_k^r\right) = 2bp_{t+1}^r\left(1 + \left(\frac{p_{t+2}}{p_{t+1}}\right)^r + \left(\frac{p_{t+3}}{p_{t+2}}\frac{p_{t+2}}{p_{t+1}}\right)^r + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \left(\frac{p_k}{p_{k-1}}\cdots\frac{p_{t+2}}{p_{t+1}}\right)^r\right) < 2bp_t^{r(1-\nu)}\left(1 + p_{k-1}^{-r\nu} + p_{k-1}^{-2r\nu} + \cdots\right) \leqslant \frac{2bp_t^{r(1-\nu)}}{1-(2n)^{-4}}.$$

Следовательно, $U_{t,r}$ при заданных $U_{1,r}, \ldots, U_{t-1,r}$ лежит в интервале длиною

$$Cp^{r(1-\nu)}, \quad C = \frac{2b}{1-(2n)^{-4}}$$

и потому при заданных системах $(U_{1,1}, \ldots, U_{1,n}) \ldots (U_{t-1,1}, \ldots, U_{t-1,n})$ число систем $(U_{t,1}, \ldots, U_{t,n})$, согласно условию нашей леммы, не превосходит C^nF_t. Доказанное относится к $t = 1, \ldots, k$. Поэтому число систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием (5) будет

$$< C^{nk}F_1 \cdots F_k < 2^k(2b)^{nk}F_1 \cdots F_k.$$

ЛЕММА 7. *Пусть* $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_1$ — *вещественные,*

$$F(x) = \beta_{n+1}x^{n+1} + \cdots + \beta_1 x,$$
$$T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i F(x)}.$$

Тогда имеем

$$\left|T_1^{2b(k+h)}\right| < \sum_{s_1=2}^{n_1} \cdots \sum_{s_k=2}^{n_k} \sum_0^B K(s_1, \ldots, s_k); \tag{6}$$

$$B = (4n)^{2bk}(8n)^{bk(k-1+2h)}p_1^{2b(k+h)}(p_1\cdots p_k)^{-2b}p_{k+1}^{-2bh}2^{(2n-2h(b-n))(s_1+\cdots+s_k)},$$

$$K(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{(x_1, \ldots, x_{n+1})} e^{2\pi i(X_1x_1 + \cdots + X_{n+1}x_{n+1})}, \quad X_r = \frac{F^{(r)}(x_0)}{r!}.$$

Здесь x_0 — *одно из чисел* $1, \ldots, p_1$, *зависящее только от выбора* $K(s_1, \ldots, s_k)$. *Далее, от замены в левой части неравенства* (6) *чисел* $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_1$ *другими в правой части этого неравенства могут измениться лишь числа* $X_1, \ldots, X_{n+1}$, *где* $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_1$ *входят в выражения коэф-*

фициентов при степенях x_0. *Наконец, суммирование распространяется на системы* $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, *состоящие из целых чисел, причем, каковы бы ни были целые* $z_1, \ldots, z_n$, *число систем* $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ *с условием*

$$x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$$

будет

$$\leqslant \psi; \quad \psi = b^{nk} 2^{\frac{n^2-4n}{2}k} (p_1 \cdots p_k)^{2b - \frac{n+1}{2}} p_{k+1}^{2bh} 2^{\left(-2b + \frac{n(n+1)}{2}\right)(s_1 + \cdots + s_k)}.$$

Таким образом,

$$B\psi = (4n)^{2bk} (8n)^{bk(k-1+2h)} b^{nk} 2^{\frac{n^2-4n}{2}k} p_1^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} 2^{-4(s_1 + \cdots + s_k)}.$$

Доказательство. Положим $R_{t,s} = p_t 2^{-s}$. При $t = 1, \ldots, k+1$ символом T_t обозначим всякую сумму вида

$$T_t = \sum e^{2\pi i F(x)},$$

где x пробегает ряд последовательных целых чисел, полностью лежащих в каком-либо интервале вида $\omega < x \leqslant \omega + p_t$. Взяв какое-либо число s ряда $s = 1, \ldots, \eta_t$, интервал суммирования суммы T_t разобьем на 2^s интервалов вида

$$\omega + (g-1) R_{t,s} < x \leqslant \omega + g R_{t,s}; \quad g = 1, \ldots, 2^s. \tag{7}$$

Тогда T_t^b разобьется на сумму 2^{sb} произведений $Z_{t,s}$:

$$T_t^b = \sum Z_{t,s}, \quad Z_{t,s} = Z_{t,s,1} \cdots Z_{t,s,b}, \quad Z_{t,s,j} = \sum_x e^{2\pi i F(x)}.$$

Здесь интервал суммирования для $Z_{t,s,j}$ есть один из интервалов (7); соответствующее этому интервалу значение g назовем номером $Z_{t,s,j}$.

Если среди номеров всех $Z_{t,s,j}$ произведения $Z_{t,s}$ найдется n таких, что разность между любыми двумя численно > 1, то $Z_{t,s}$ назовем правильным; в противном случае $Z_{t,s}$ назовем неправильным.

Пусть g_1 — наименьший из номеров сомножителей $Z_{t,s,j}$ неправильного $Z_{t,s}$; g_2 — наименьший из таких номеров, превосходящих $g_1 + 1$; g_3 — наименьший из таких номеров, превосходящих $g_2 + 1$, и т. д.; наконец, g_{n_1} — наименьший из номеров, превосходящих $g_{n_1-1} + 1$, причем номеров, превосходящих $g_{n_1} + 1$, не имеется. Очевидно, $n_1 < n$ (в противном случае $Z_{t,s}$ оказалось бы правильным). Заставляя $g'_1, \ldots, g'_{n-1}$ независимо друг от друга пробегать значения $1, \ldots, 2^s$, получим $2^{s(n-1)}$ систем $g'_1, \ldots, g'_{n-1}$; среди них найдется система, содержащая все числа $g_1, \ldots, g_{n_1}$, причем из способа образования последних следует, что номера всех $Z_{t,s,j}$ находятся среди чисел

$$g'_1, \ g'_1 + 1, \ g_2, \ g'_2 + 1, \ldots, g'_{n-1}, \ g'_{n-1} + 1. \tag{8}$$

Заставляя $g''_1, \ldots, g''_b$ независимо друг от друга пробегать значения (8), получим $(2n-2)^b$ систем $g''_1, \ldots, g''_b$; среди них найдется система, состоящая из номеров сомножителей $Z_{t,s,j}$ рассматриваемого неправильного $Z_{t,s}$. Из сказанного следует, что число $B_{t,s}$ неправильных $Z_{t,s}$ удовлетворяет неравенству

$$B_{t,s} \leqslant 2^{s(n-1)} (2n-2)^b.$$

Из способа составления интервалов (7) следует, что при $s=2,\ldots,\eta$ каждое неправильное $Z_{t,s-1}$ представляется суммою $\leqslant 2^b$ произведений $Z_{t,s}$. При s, отличном от η_t, всякое правильное из последних обозначим символом $Z'_{t,s}$; при $s=\eta_t$ всякое из них обозначим символом $Z'_{t,s}$. Отсюда следует, что общее число произведений $Z'_{t,s}$ будет

$$\leqslant B_{t,s-1}2^b < 2^{(s-1)(n-1)}(4n-4)^b < 2^{sn-s}(4n)^b.$$

При $t=1,\ldots,k$ имеем (леммы 1 и 2)

$$T_t^b = \sum_{s=2}^{\eta_t} 2^{-s} \sum^{2^{sn}(4n)^b} Z'_{t,s}, \quad |T_t|^{2b(k-t+h+1)} \leqslant \sum_{s=2}^{\eta_t}\left(\sum^{2^{sn}(4n)^b} |Z'_{t,s}|\right)^{2(k-t+h+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=2}^{\eta_t}\left(2^{sn}(4n)^b\right)^{2(k-t+h+1)-1} \sum^{2^{sn}(4n)^b} |Z'_{t,s}|^{2(k-t+h+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=2}^{\eta_t}\left(2^{sn}(4n)^b\right)^{2(k-t+n+1)-1} \sum^{2^{sn}(4n)^b} |Z'_{t,s}|^2 |Z'_{t,s}|^{2(k-t+h)}.$$

$$b^b|Z'_{t,s}| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{b}|Z_{t,s,j}|\right)^b, \quad |Z'_{t,s}|^{2(k-t+h)} \leqslant b^{-2b(k-t+h)}\left(\sum_{j=1}^{b}|Z_{t,s,j}|\right)^{2b(k-t+h)}.$$

Но каждое $Z_{t,s,j}$ разбивается на $\leqslant p_t 2^{-s} p_{t+1}^{-1} + 1 \leqslant 2p_t^{\nu}2^{-s}$ сумм T_{t+1}. Поэтому

$$\left(\sum_{j=1}^{b}|Z_{t,s,j}|\right)^{2b(k-t+h)} \leqslant \left(\sum^{2bp_t^{\nu}2^{-s}} |T_{t+1}|\right)^{2b(k-t+h)} \leqslant$$

$$\leqslant \left(2bp_t^{\nu}2^{-s}\right)^{2b(k-t+h)-1} \sum^{2bp_t^{\nu}2^{-s}} |T_{t+1}|^{2b(k-t+h)},$$

$$|T_t|^{2b(k-t+h+1)} \leqslant \sum_{s=2}^{\eta_t} \sum_0^{M_{t,s}} |Z'_{t,s}|^2 |T_{t+1}|^{2b(k-t+h)},$$

$$M_{t,s} = (4n)^{2b}(8n)^{2b(k-t+h)} 2^{2s(n-b)(k-t+h)+2sn} p_t^{2\nu b(k-t+h)}.$$

Написав в этой формуле s_t вместо s и применяя ее при $t=1,2,\ldots,k$ получим

$$|T_1|^{2b(k+h)} \leqslant \sum_{s_1=2}^{\eta_1} \cdots \sum_{s_k=2}^{\eta_k} \sum_0^{M_{1,s_1},\ldots,M_{k,s_k}} |Z_{1,s_1}|^2 \cdots |Z_{k,s_k}|^2 |T_{k+1}|^{2bh},$$

причем здесь путем очевидных упрощений находим

$$M_{1,s_1} \cdots M_{k,s_k} \leqslant$$

$$\leqslant (4n)^{2bk}(8n)^{bk(k-1+2h)} 2^{2(n+(n-b)h)(s_1+\cdots+s_k)} p_1^{2b(k+h)} (p_1\cdots p_k)^{-2b} p_{k+1}^{-2bh}.$$

Рассмотрим какое-либо определенное произведение

$$|Z'_{1,s_1}|^2 |Z'_{2,s_2}|^2 \cdots |Z'_{k,s_k}|^2 |T_{t+1}|^{2bh}$$

и сначала рассмотрим какое-либо определенное Z'_{t, s_t}. Пусть $e^{2\pi i f(x_0)}$ какое-либо слагаемое суммы T_{k+1}. Переменное суммирования x каждого сомножителя $Z_{t, s_t, j}$ произведения Z'_{t, s_t} мы заменим переменным $v = x - x_0$. Тогда $Z_{t, s_t, j}$ представится суммою вида

$$\sum_v e^{2\pi i\left(X_0 + X_1 v + \cdots + X_{n+1} v^{n+1}\right)}; \quad X_r = \frac{F^{(r)}(x_0)}{r!}, \quad X_0 = F(x_0).$$

Пусть сначала $s_t < \eta_t$. Пусть $g_1, \ldots, g_n$ — расположенные в порядке возрастания номера тех сомножителей $Z_{t, s_t, j}$ произведения Z'_{t, s_t}, которые характеризуют это произведение как правильное. Переменные суммирования этих сомножителей обозначим соответственно символами $v_{t, s_t, 1}, \ldots, v_{t, s_t, n}$; при этом при $r = 1, \ldots, n+1$ положим

$$V_{t, s_t, r} = v^r_{t, s_t, 1} + \cdots + v^r_{t, s_t, n}.$$

Кроме того, символом $W_{t, s_t, r}$ обозначим сумму, аналогичную сумме $V_{t, s_t, r}$, но составленную из взятых со знаком плюс r-ых степеней переменных суммирования оставшихся сомножителей $Z_{t, s_t, j}$ произведения Z_{t, s_t} и взятых (независимо) со знаком минус r-ых степеней переменных суммирования всех без исключения b сомножителей $Z_{t, s_t, j}$ произведения Z_{t, s_t}. Полагая

$$U_{t, s_t, r} = V_{t, s_t, r} + W_{t, s_t, r},$$

будем иметь

$$|Z'_{t, s_t}|^2 = \sum_{(U_{t, s_t, 1}, \ldots, U_{t, s_t, n+1})} e^{2\pi i\left(X_1 U_{t, s_t, 1} + \cdots + X_{n+1} U_{t, s_t, n+1}\right)}.$$

Нетрудно сообразить, что все значения $U_{t, s_t, r}$ лежат в одном и том же интервале длиною $2bp_t^r$.

Из леммы 5 следует, что для числа E случаев, когда $V_{t, s_t, 1}, \ldots, V_{t, s_t, n}$ лежат в наперед заданных интервалах с длинами $Cp_t^{1-\nu}, \ldots, Cp_t^{n(1-\nu)}$, будем иметь (при $C \geqslant 2b$)

$$E < C^n 2^{s_t \frac{n(n-1)}{2}} p_t^{\frac{n-1}{2}}.$$

Поэтому для числа Φ_{t, s_t} случаев, когда суммы $U_{t, s_t, 1}, \ldots, U_{t, s_t, n}$ лежат в наперед заданных интервалах с длинами $Cp_t^{1-\nu}, \ldots, Cp_t^{n(1-\nu)}$, будем иметь

$$\Phi_{t, s_t} < C^n 2^{s_t \frac{n(n-1)}{2}} p_t^{\frac{n(n-1)}{2}} (R_{t, s_t} + 1)^{2b-n} <$$

$$< \left(1 + \frac{1}{R_{t, s_t}}\right)^{2b} C^n 2^{s_t\left(\frac{n(n+1)}{2} - 2b\right)} p_t^{2b - \frac{n+1}{2}}.$$

При $s_t = \eta_t$ число всех систем $(U_{t, \eta_t, 1}, \ldots, U_{t, \eta_t, n+1})$ будет

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{R_{t, \eta_t}}\right)^{2b} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^{\eta_t\left(\frac{n(n+1)}{2} - 2b\right)} p^{2b - \frac{n+1}{2}},$$

откуда, ввиду

$$R_{t,\,s_t} > p_k^{1-\nu} > (2n)^{4n}, \quad \left(1+\frac{1}{R_{t,\,s_t}}\right)^{2b} < \left(1+\frac{1}{(2n)^{4n}}\right)^{2b} < 2,$$

$$\min\left(2C^n,\ 2^{\frac{n^2+n}{2}+1}\right) < 2^{\frac{n^2-8n}{2}} C^n,$$

уже для всех случаев без исключения будем иметь

$$\Phi_{t,\,s_t} < C^n 2^{\frac{n^2-8n}{2}} 2^{s_t\left(\frac{n(n+1)}{2}-2b\right)} p_t^{2b-\frac{n+1}{2}}.$$

Далее, применим лемму 6. Тогда убедимся, что $|Z'_{1,s_1}|^2 \cdots |Z'_{k,s_k}|^2$ представляется суммою вида

$$\sum_{(x'_1,\,\ldots,\,x'_{n+1})} e^{2\pi i(X_1 x'_1+\cdots+X_{n+1}x'_{n+1})},$$

где суммирование распространяется на системы $(x'_1, \ldots, x'_{n+1})$, состоящие из целых чисел, причем число таких систем с условием

$$x'_1 = z_1, \ldots, x'_n = z_n$$

будет

$$< 2^k (2b)^{nk} 2^{\frac{n^2-8n}{2}k} 2^{\left(\frac{n(n+1)}{2}-2b\right)(s_1+\cdots+s_k)} (p_1 \ldots p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}}.$$

А $|Z'_{1,s_1}|^2 \cdots |Z_{k,s_k}|^2 |T_{k+1}|^{2bh}$ представится суммою вида

$$\sum_{(x_1,\,\ldots,\,x_{n+1})} e^{2\pi i(X_1 x_1+\cdots+X_{n+1}x_{n+1})},$$

где суммирование распространяется на системы $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, состоящие из целых чисел, причем ввиду

$$(p_{k+1}+1)^{2bh} = p_{k+1}^{2bh}\left(1+\frac{1}{p_{k+1}}\right)^{2bh} < 2 p_{k+1}^{2bh},$$

число таких систем с условием

$$x_1 = z_1, \ldots, x_n = z_n$$

будет

$$< 2^{k+1} (2b)^{nk} 2^{\frac{n^2-8n}{2}k} 2^{\left(\frac{n(n+1)}{k}-2b\right)(s_1+\cdots+s_k)} (p_1 \cdots p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}} p_{k+1}^{2bh} <$$
$$< b^{nk} 2^{\frac{n^2-4n}{2}k} 2^{\left(\frac{n(n+1)}{2}-2b\right)(s_1+\cdots+s_k)} (p_1 \cdots p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}} p_{k+1}^{2bh}.$$

ТЕОРЕМА. *Пусть m и p — целые положительные,*

$$S = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i m f(x)},$$

r — одно из чисел $n+1, \ldots, 2$,

$$\alpha_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 1 < q < p^r.$$

Тогда, полагая

$$\begin{array}{lll} 1. & q = p^{\tau}, & \text{если} \quad 1 < q \leqslant p, \\ 2. & \tau = 1, & \text{если} \quad p < q \leqslant p^{r-1}, \\ 3. & q = p^{r-\tau}, & \text{если} \quad p^{r-1} < q < p^{r} \end{array}$$

и вводя для краткости обозначения

$$l = \ln \frac{12n(n+1)}{\tau}, \qquad \rho = \frac{\tau}{3n^2 l},$$

будем иметь

$$|S| < (8n)^{\frac{1}{2}nl} m^{\frac{2\rho}{\tau}} p^{1-\rho}.$$

Доказательство. Пусть

$$Y = [p^{1-\rho}], \quad k = \left[\frac{\ln \frac{3n(n+1)}{\tau}}{-\ln(1-\nu)} + 1 \right],$$

так что $U = 3\frac{n+1}{\tau}$, и допустим сначала, что $p > (2n)^{Unk}$. Тогда p можно рассматривать как частный случай прежнего p_1. При $y = 0, 1, \ldots, Y-1$, полагая

$$T_0 = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i (mf(y+x) - mf(y))},$$

будем иметь

$$S = |T_0| + 2\theta_0 y.$$

Применяя формулу Тейлора, находим

$$mf(y+x) - mf(y) = Y_{n+1} x^{n+1} + \cdots + Y_1 x;$$

$$Y_j = \frac{mf^{(j)}(y)}{j!} = \binom{n+1}{j} ma_{n+1} y^{n+1-j} + \cdots + \binom{j+1}{j} ma_{j+1} y + ma_j =$$

$$= \binom{n+1}{n+1-j} ma_{n+1} y^{n+1-j} + \cdots + \binom{j+1}{1} ma_{j+1} y + ma_j.$$

Далее, положим

$$T_1 = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i (ma_{n+1} x^{n+1} + \alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, заданной неравенствами

$$Y_n - 0{,}5p^{-n-\rho} \leqslant \alpha_n \leqslant Y_n + 0{,}5p^{-n-\rho}, \ldots, Y_1 - 0{,}5p^{-1-\rho} \leqslant \alpha_1 \leqslant Y_1 + 0{,}5p^{-1-\rho},$$

то имеем

$$|T_0| = |T_1| + \theta' \pi n p^{1-\rho}, \quad |S| = |T_1| + \theta''(2 + \pi n) p^{1-\rho} = |T_1| + \theta''' 4np^{1-\rho},$$

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)-1} (|T_1|^{2b(k+h)} + (4np^{1-\rho})^{2b(k+h)}).$$

Умножая последнее неравенство почленно на

$$p^{\frac{n(n+1)}{2} + n\rho} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

и распространяя интегрирование на область (Ω_y), получим

$$|S|^{2b(k+h)} <$$
$$< 2^{2b(k+h)-1}\left(p^{\frac{n(n+1)}{2}+n\rho}\int_{(\Omega_y)}\cdots\int |T_1|^{2b(k+h)}d\alpha_n\cdots d\alpha_1 + (4np^{1-\rho})^{2b(k+h)}\right).$$

Такое неравенство имеет место для каждой области (Ω_y); поэтому

$$|S|^{2b(k+h-1)} < 2^{2b(k+h)-1}\left(p^{\frac{n(n+1)}{2}+n\rho}Y^{-1}\sum_{y=0}^{Y-1}\int_{(\Omega_y)}\cdots\int |T_1|^{2b(k+h)}d\alpha_n\cdots d\alpha_1 +\right.$$
$$\left.+ (4np^{1-\rho})^{2b(k+h)}\right) < 2^{2b(k+h)}\left(p^{\frac{n(n+1)}{2}-1+(n+1)\rho}G\int_0^1\cdots\int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)}d\alpha_n\cdots d\alpha_1 +\right.$$
$$\left. + (4np^{1-\rho})^{2b(k+h)}\right), \qquad (9)$$

где G обозначает максимум числа областей, содержащих точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ координаты которых сравнимы по модулю 1 с координатами какой-либо заданной точки $(\alpha_n', \ldots, \alpha_1')$.

Далее оценим G. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две области n-мерного пространства, содержащие точки, координаты которых сравнимы по модулю 1 с координатами заданной точки $(\alpha_n', \ldots, \alpha_1')$. Тогда имеем

$$Y_j(y) - Y(y_0) \equiv \theta_j 2p^{-j}, \quad j = n, \ldots, r-1,$$

или

$$\binom{n+1}{n+1-j} m a_{n+1}(y^{n+1-j} - y_0{}^{n+1-j}) + \cdots + \binom{j+1}{1} m a_{j+1}(y - y_0) \equiv \theta_j 2p^{-j},$$

откуда, полагая ради краткости $\theta_j 2p^{-i} = \lambda_j$, $jma_j(y - y_0) = A_j$,

$$\frac{y^j + y^{j-1}y_0 + \cdots + y_0^j}{j+1} = P_j \quad \text{(следовательно,} \quad P_j < p^j),$$

получим

$$A_{n+1}P_{n-j}\binom{n}{n-j} + A_n P_{n-j-1}\binom{n-1}{n-j-1} + \cdots + A_{j+2}P_1\binom{j+1}{1} + A_{j+1} \equiv \lambda_j.$$

Наконец, полагая $D_1 = 1\,!$, $D_2 = 1\,!\,2\,!$, $D_3 = 1\,!\,2\,!\,3\,!, \ldots$, находим

$$D_{n+1-j}\lambda_j \equiv D_{n+1-j}A_{n+1}P_{n-j}\binom{n}{n-j} + \cdots + D_{n+1-j}A_{j+2}P_1\binom{j+1}{1} +$$
$$+ D_{n+1-j}A_{j+1}.$$

В частности, отсюда находим

$$D_1\lambda_n \equiv D_1 A_{n+1},$$

$$D_2\lambda_{n-1} \equiv D_2 A_{n+1}P_1\binom{n}{1} + D_2 A_n,$$

$$D_3\lambda_{n-2} \equiv D_3A_{n+1}P_2\binom{n}{2} + D_3A_nP_1\binom{n-1}{1} + D_3A_{n-1},$$

$$D_4\lambda_{n-3} \equiv D_4A_{n+1}P_3\binom{n}{3} + D_4A_nP_2\binom{n-1}{2} + D_4A_{n-1}P_1\binom{n-2}{1} + D_4A_{n-2},$$

. . . .

$$D_{n-r+2}\lambda_{r-1} \equiv D_{n-r+2}A_{n+1}P_{n-r+1}\binom{n}{n-r+1} + \cdots + D_{n-r+2}A_{r+1}P_1\binom{r}{1} + \\ + D_{n-r+2}A_r.$$

Здесь коэффициенты при произведениях $D_1A_{n+1}, \ldots, D_{n-r+2}A_r$ суть целые числа. Поэтому эти произведения во всех сравнениях могут быть заменены их выражениями, взятыми соответственно из первого, второго, ..., наконец, из последнего сравнения. Полагая $2p^{-j} = L_j$, последовательно найдем

$$(D_1A_{n+1}) \leqslant D_1L_n,$$

$$(D_2A_n) \leqslant D_2L_{n-1}\left(1 + \binom{n}{1}\right) = D_2L_{n-1}T_2,$$

$$(D_3A_{n-1}) \leqslant D_3L_{n-2}\left(1 + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{1}T_2\right) = D_3L_{n-2}T_3,$$

$$(D_4A_{n-2}) \leqslant D_4L_{n-3}\left(1 + \binom{n}{3} + \binom{n-1}{2}T_2 + \binom{n-2}{1}T_3\right) = D_4L_{n-3}T_4,$$

. . . .

$$(D_{n-r+2}A_r) \leqslant D_{n-r+2}L_{r-1}\left(1 + \binom{n}{n-r+1} + \binom{n-1}{n-r}T_2 + \cdots + \\ + \binom{r}{1}T_{n-r+1}\right) = D_{n-r+2}L_{r-1}T_{n-r+2}.$$

Отсюда получим

$$T_2 = n + 1,$$

$$T_3 < \left(\frac{1}{2!} + 1\right)n^2 < 2n^2,$$

$$T_4 < \left(\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} + 2\right)n^3 < 4n^3,$$

$$T_5 < \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!} + \frac{2}{2!} + 4\right)n^4 < 8n^4,$$

. . . .

$$T_{n-r+2} < \left(\frac{1}{(n-r+1)!} + \frac{1}{(n-r)!} + \frac{2}{(n-r+1)!} + \cdots + \frac{2^{n-r-2}}{2!} + \\ + 2^{n-r-1}\right)n^{n-r+1} < 2^{n-r}n^{n-r+1} < 2^{-1}(2n)^{n-1}.$$

Из всего доказанного следует, что

$$(D_{n-r+2}rma_r(y-y_0)) < D_{n-r+2}(2n)^{n-1}p^{-r+1}.$$

Далее применим лемму 4. Число $y - y_0$ пробегает Y последовательных целых чисел. Поэтому

$$G < D_{n-r+2}m(3r + n^{-1}(2n)^nqp^{-r+1})[Yq^{-1} + 1].$$

Отсюда соответственно случаям 1, 2 и 3 теоремы находим

$$1.\quad G < D_{n-r+2} m (3(n+1) + n^{-1}(2n)^n)\, 2pq^{-1} < D_n m (2n)^n p^{1-\tau},$$

$$2.\quad G < D_{n-r+2} m (3(n+1) + n^{-1}(2n)^n) \qquad < D_n m (2n)^n p^{1-\tau},$$

$$3.\quad G < D_{n-r+2} m (3(n+1) + n^{-1}(2n)^n q p^{-r+1}) < D_n m (2n)^n p^{1-\tau},$$

откуда, замечая, что

$$D_n (2n)^n < (n^{n+1} e^{-n})^{n-1} (2n)^n < n^{n^2} e^{-n^2+n} (2n)^n < n^{n^2},$$

уже для всех трех случаев будем иметь

$$G < n^{n^2} m p^{1-\tau}.$$

В соединении с формулой (9) последний результат дает

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)} \left(p^{\frac{n(n+1)}{2} - \tau + (n+1)\rho} n^{n^2} m \int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + \right.$$
$$\left. + (4np^{1-\rho})^{2b(k+h)} \right).$$

Далее воспользуемся леммой 7. Имеем

$$|T_1|^{2b(k+h)} < \sum_{s_1=2}^{n_1} \cdots \sum_{s_k=2}^{n_k} \sum_0^B K(s_1, \ldots, s_k),$$

причем

$$K(s_1, \ldots, s_k) = \sum_{(x_1, \ldots, x_{n+1})} e^{2\pi i (X_1 x_1 + \cdots + X_{n+1} x_{n+1})},$$

$$X_1 = \binom{n+1}{1} m a_{n+1} x_0^n + \binom{n}{1} \alpha_n x_0^{n-1} + \cdots + \binom{2}{1} \alpha_2 x_0 + \alpha_1,$$

$$X_2 = \binom{n+1}{2} m a_{n+1} x_0^{n-1} + \binom{n}{2} \alpha_n x_0^{n-2} + \cdots + \alpha_2,$$

. . . .

$$X_n = \binom{n+1}{n} m a_{n+1} x_0 + \alpha_n,$$

$$X_{n+1} = m a_{n+1}.$$

Поэтому

$$X_1 x_1 + \cdots + X_{n+1} x_{n+1} = A_1 \alpha_1 + \cdots + A_n \alpha_n + A_{n+1} m a_{n+1},$$

где

$$A_1 = x_1,$$

$$A_2 = \binom{2}{1} x_0 x_1 + x_2,$$

. . . .

$$A_n = \binom{n}{1} x_0^{n-1} x_1 + \binom{n}{2} x_0^{n-2} x_2 + \cdots + x_n,$$

$$A_{n+1} = \binom{n+1}{1} x_0^n x_1 + \binom{n+1}{2} x_0^{n-1} x_2 + \cdots + \binom{n+1}{n} x_0 x_n + x_{n+1}.$$

Из всего изложенного следует

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 K(s_1, \ldots, s_k)\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_n =$$

$$= \sum_{(x_1, \ldots, x_{n+1})} \int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i (A_1\alpha_1 + \cdots + A_n\alpha_n + A_{n+1} m\alpha_{n+1})}\, d\alpha_1 \cdots d\alpha_n,$$

что равно числу систем $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с условием $A_1 = \cdots = A_n = 0$, т. е. равно числу систем $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с условием $x_1 = \cdots = x_n = 0$, последнее же число будет $\leqslant \psi$. Поэтому

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |T_1|^{2b(k+h)} d\alpha_1 \cdots d\alpha_n < \sum_{s_1=2}^{n_1} \cdots \sum_{s_k=2}^{n_k} B\psi <$$

$$< (4n)^{2bk} (8n)^{bk(k-1+2h)} b^{nk} 2^{\frac{n^2-4n}{2}k} p^{2b(k+h) - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\sigma},$$

$$|S|^{2b(k+h)} < 2^{2b(k+h)} \Big(p^{2b(k+h) - \tau + (n+1)\rho + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} m n^{n^2} (4n)^{2bk} (8n)^{bk(k-1+2h)} (2n)^{nk} \cdot$$

$$\cdot 2^{\frac{n^2-4n}{2}k} + (4np^{1-\rho})^{2b(k+h)} \Big),$$

$$|S| < p^{1-\delta} m^{\delta_1} 2^u n^v + 8np^{1-\rho};$$

$$\delta = \frac{\tau - (n+1)\rho - \frac{n(n+1)}{2}\sigma}{2b(k+h)} > \frac{\frac{5}{6}\tau - (n+1)\rho}{2b(k+h)} >$$

$$> \frac{\frac{5}{6}\tau\left(1 - \frac{\nu}{15}\right)}{\frac{5}{2}\left(n + \frac{2}{5}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\ln\frac{3n(n+1)}{\tau} + n + 3\right)} > \rho\left(1 + \frac{\nu}{30}\right),$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2b(k+h)} < \frac{2}{5\left(n - \frac{1}{5}\right)(n-1)\left(\ln\frac{12n(n+1)}{\tau} - 1{,}4\right)} < \frac{2\rho}{\tau}.$$

$$u = \frac{2b(k+h) + bk + 3bk(k+2h) + \frac{n^2-2n}{2}k}{2b(k+h)} <$$

$$< \frac{2b(k+h) + 3b(k+h)^2 - 3bh^2 + \frac{n^2}{2}k}{2b(k+h)} < \frac{3}{2}(k+h) + \frac{n}{4} + 1 <$$

$$< \frac{3}{2}\left(k + \frac{7}{6}n + \frac{8}{3}\right) < \frac{3}{2} n \ln\frac{12n(n+1)}{\tau},$$

$$v = \frac{n^2 + bk + bk(k+2h) + nk}{2b(k+h)} < \frac{k+h+1}{2} < \frac{n}{2} \ln \frac{12n(n+1)}{\tau} - 1.$$

Отсюда следует

$$|S| < \left((8n)^{\frac{1}{2} n \ln \frac{12n(n+1)}{\tau}} n^{-1} + 8n\right) m^{\frac{2\rho}{\tau}} p^{1-\rho} < (8n)^{\frac{1}{2} n \ln \frac{12n(n+1)}{\tau}} p^{1-\rho}.$$

При $p < (2n)^{\frac{3(n+1)}{\tau} nk}$ справедливость теоремы следует из тривиальных неравенств

$$|S| \leqslant p, \quad p^\rho < (2n)^{\frac{3(n+1)}{\tau} nk\rho} < (8n)^{\frac{1}{2} n \ln \frac{12n(n+1)}{\tau}}$$

Поступило
6. II. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, т. XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 215—238

Н. М. КОРОБОВ

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе устанавливается класс функций с равномерно распределенными дробными долями, растущих быстрее любого полинома, а также исследуются случаи равномерного распределения функций вида $\alpha q_1 q_2, \ldots, q_x$ и αq^x при целых $q, q_1, q_2, \ldots, q_x$.

Введение

Функция $f(x)$ называется *равномерно распределенной*, если для каждого интервала $(\alpha\beta) \subset (0\ 1)$ при $x = 1, 2, \ldots, P$ число $N_{\alpha\beta}$ выполнений неравенства

$$\alpha \leqslant \{f(x)\} < \beta$$

удовлетворяет соотношению

$$N_{\alpha\beta} = (\beta - \alpha) P + o(P).$$

Здесь $\{f(x)\}$ — дробная доля функции $f(x)$: $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$.)

Постановка вопроса о равномерно распределенных функциях и первые основные результаты принадлежат Вейлю [1]. Вейль доказал, что необходимым и достаточным условием равномерности распределения функции $f(x)$ является выполнение для всех целых $m \geqslant 1$ предельного равенства

$$\lim_{P\to\infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0. \tag{I}$$

Понятие равномерного распределения легко обобщается на случай многомерного пространства.

Система функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ называется *равномерно распределенной в s-мерном пространстве*, если для $x = 1, 2, \ldots, P$ число точек $(\{\varphi_1(x)\}, \ldots, \{\varphi_s(x)\})$, попавших в произвольную часть единичного s-мерного куба, асимптотически равно $v \cdot P$, где v — объем указанной части куба.

Справедлив также критерий, аналогичный (I):

Необходимым и достаточным условием равномерности распределения системы функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ в s-мерном пространстве является выполнение для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не всех равных нулю, равенства

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i (m_1\varphi_1(x) + \cdots + m_s\varphi_s(x))} = o(P). \tag{II}$$

С помощью критерия (I) Вейль доказал равномерность распределения полиномов произвольной степени $n \geqslant 1$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

имеющих хотя бы один иррациональный коэффициент (кроме a_0).

Другое, чисто арифметическое доказательство теоремы о дробных долях полинома было получено И. М. Виноградовым (²). Вопросы распределения дробных долей рассматривались также в ряде последующих работ И. М. Виноградова (³).

Дальнейшее развитие метод Вейля получил в работах Ван дер Корпута (⁴), который доказал равномерность распределения некоторых классов функций, растущих как полиномы.

Как для полиномов, так и для функций $f(x)$, рассмотренных Ван дер Корпутом, можно выбрать целые $m_1, \ldots, m_s$, не все равные нулю, так, что функция

$$F_s(x) = m_1 f(x+1) + \cdots + m_s f(x+s)$$

уже не будет равномерно распределена; для каждой из этих функций существует константа $\gamma > 0$ такая, что при возрастающих x будет:

$$f(x) = o(x^{\gamma}).$$

В первой главе этой работы строятся равномерно распределенные функции

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda},$$

рост каждой из которых удовлетворяет условию

$$f(x) = \Omega(x^{\gamma}) \quad (\gamma \text{ — произвольно большое}).$$

Эти функции отличаются от полиномов и функций, изученных Ван дер Корпутом, еще и тем, что при любом выборе целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, линейная комбинация

$$F_s(x) = m_1 f(x+1) + \cdots + m_s f(x+s) \quad (s \geqslant 1 \text{ произвольно})$$

также представляет собой равномерно распределенную функцию. Функции, обладающие этим свойством, назовем *вполне равномерно распределенными*.

В теореме 1 с помощью оценки тригонометрических сумм, полученной К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегалом (⁵) по методу Вейля, строится сравнительно узкий класс вполне равномерно распределенных функций $f(x)$, рост которых удовлетворяет условиям:

$$f(x) = o(x^{\lambda_1 \ln \ln x}), \quad f(x) = \Omega(x^{\lambda_2 \ln \ln x}) \quad (\lambda_1 > \lambda_2 > 0).$$

В теореме 2 применением новых, значительно более сильных оценок сумм Вейля, полученных И. М. Виноградовым (⁶), класс функций с вполне равномерно распределенными дробными долями расширяется до функций,

растущих быстрее чем $x^{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$ при любом $\varepsilon > 0$. (Результаты теоремы 1 являются следствием теоремы 2.)

Вторая глава посвящена вопросам равномерности распределения функций вида

$$f(x) = \alpha \cdot \psi(x)$$

(α иррационально; $\psi(x)$ — функция, принимающая целые значения).

Рассматриваются два случая:

1. $f(x) = \alpha \cdot q_1 \cdots q_x$, где целые q_x удовлетворяют условиям

$$q_x \geqslant 2 \ (x = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{x \to \infty} q_x = \infty.$$

2. $f(x) = \alpha q^x$ ($q \geqslant 2$, целое).

В теореме 3 доказывается, что необходимым и достаточным условием равномерности распределения функции $\alpha q_1 \cdots q_x$ является представимость α рядом

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q_k]}{q_1 \cdots q_k} \quad (\delta_0 = [\alpha]),$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$ — дробные доли какой-нибудь равномерно распределенной функции $\varphi(x)$.

В теореме 4 с помощью введенного выше понятия вполне равномерного распределения доказывается достаточное условие равномерности распределения функции αq^x, состоящее в представимости α рядом

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q]}{q^k},$$

где θ_k — дробные доли произвольной вполне равномерно распределенной функции.

Так, например, функции $\alpha_1 x!$ и $\alpha_2 \cdot 2^x$ будут равномерно распределены для α_1 и α_2, определенных рядами:

$$\alpha_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k^{1+\lambda}]}{k!} \quad (0 < \lambda < 1), \quad \alpha_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[2\{\varphi(k)\}]}{2^k}.$$

(Можно выбрать $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^4} x^k$ — функцию вполне равномерно распределенную, в силу теоремы 2.)

Функции вида $\alpha \cdot \psi(x)$ изучались Вейлем ([1]). Для случаев, разобранных во второй главе, из результатов Вейля следовала равномерность распределения почти для всех значений параметра α, однако не было известно ни одного примера α, при котором получалось бы равномерное распределение.

Теорема 5 дает другое решение вопроса о величинах α, для которых функции αq^x равномерно распределены. В отличие от аналитического метода теоремы 4 здесь доказательство элементарно: в нем не нужен критерий Вейля и, таким образом, не привлекается теория тригонометрических сумм.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность А. О. Гельфонду за внимание, проявленное к моей работе.

Глава I

Функции с вполне равномерным распределением дробных долей

§ 1. ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $f(x)$ определена всюду сходящимся рядом:*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \qquad |a_k| = e^{-\omega(k)}. \tag{1}$$

Если существуют константы $G>g>2$ такие, что для всех достаточно больших целых k будет

$$g\cdot\omega(k)<\omega(k+1)<G\cdot\omega(k), \tag{2}$$

то функция $f(x)$ вполне равномерно распределена.

Доказательство. а) Рассмотрим введенную в определении вполне равномерного распределения функцию

$$F_s(x)=\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu f(x+\nu).$$

Очевидно,

$$F_s(x)=\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\nu)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu f^{(k)}(\nu)\right)x^k.$$

Обозначим

$$A_k(s)=\frac{1}{k!}\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu f^{(k)}(\nu);$$

тогда

$$F_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k(s) x^k.$$

Преобразуем $A_k(s)$:

$$A_k(s)=\frac{1}{k!}\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{(k+k_1)!}{k_1!} a_{k+k_1}\nu^{k_1} = \sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1}\right)\frac{(k+k_1)!}{k!k_1!} a_{k+k_1}. \tag{3}$$

Среди сумм $\sum\limits_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1}$ $(k_1=0, 1, \ldots, s-1, s, \ldots)$ может встретиться не более чем $s-1$ подряд равных нулю. Действительно, иначе система s однородных уравнений

$$\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1}=0, \quad k_1=l, l+1, \ldots, l+s-1 \quad (l\geqslant 0),$$

допускала бы только нулевое решение $m_1=m_2=\ldots=m_s=0$, что противоречит определению величин $m_1, \ldots, m_s$.

Обозначим через t наименьшее k_1, для которого

$$\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1} \neq 0 \quad (0\leqslant t<s-1).$$

Покажем теперь, что

$$A_k(s) = c(s)\frac{(k+t)!}{k!}a_{k+t} + O(k^{t+1}a_{k+t+1}), \tag{4}$$

где $c(s) = \frac{1}{t!}\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^t$ и t не зависит от k.

Пусть при $k_1 = t_1$ и $k_1 = t_2$ $(t < t_1 < t_2 \leqslant t_1 + s)$ получаются два соседних, отличных от нуля члена суммы

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu \nu^{k_1}\right)\frac{(k+k_1)!}{k!k_1!}a_{k+k_1}.$$

Обозначим через N модуль отношения этих членов:

$$N = \left|\frac{\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu\cdot\nu^{t_2}\right)(k+t_2)!\,k!\,t_1!\,a_{k+t_2}}{\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu\cdot\nu^{t_1}\right)(k+t_1)!\,k!\,t_2!\,a_{k+t_1}}\right|.$$

Очевидно,

$$N < c_1(s)\,s^{t_1+s}(k+t_1+s)^s e^{-(\omega(k+t_1+1)-\omega(k+t_1))} <$$
$$< c_2(s)\,s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-(g-1)\omega(k+t_1)} < c_2(s)\,s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-c_1\cdot 2^{k+t_1}} \quad (c_1 > 0).$$

Отсюда следует, что при достаточно большом k будет $N < \frac{1}{2}$ и из (3) получим

$$\left|A_k(s) - \frac{1}{t!}\left(\sum_{\nu=1}^{s} m_\nu\cdot\nu^t\right)\frac{(k+t)!}{k!}a_{k+t}\right| < c_3(s)\,k^{t+1}\,|a_{k+t+1}|,$$

что и доказывает утверждение (4).

Обозначим

$$|A_k(s)| = e^{-\omega_1(k)}.$$

Из (4) следует:

$$\omega_1(k) = \omega(k+t) - \ln(k+1)\cdots(k+t) - \ln|c(s)| + o(1) =$$
$$= \omega(k+t) + O(\ln k).$$

Но t не зависит от k, следовательно,

$$\omega_1(k+1) = \omega(k+t+1) + O(\ln k)$$

и, в силу (2), получим, что существуют константы $G_1 > g_1 > 2$, для которых при всех достаточно больших k выполняется неравенство

$$g_1\omega_1(k) < \omega_1(k+1) < G_1\omega_1(k).$$

Из этого неравенства видно, что функция

$$F_s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(s)\,x^k$$

сама удовлетворяет условиям теоремы 1, чем доказательство вполне равномерной распределенности функции $f(x)$ сводится к доказательству

ее равномерной распределенности. (Действительно, если всякая функция, удовлетворяющая условиям теоремы 1, равномерно распределена, то равномерно распределена функция $F_s(x)$ и, согласно определению вполне равномерного распределения, функция $f(x)$ распределена вполне равномерно.)

b) Введем функцию $\psi(x)$, определив ее для $k \leqslant x < k+1$, $k = 1, 2, \ldots$, равенством

$$\psi(x) = \frac{\omega(k)}{k} + \left(\frac{\omega(k+1)}{k+1} - \frac{\omega(k)}{k}\right)(x-k).$$

Очевидно, $\psi(x)$ обладает следующими свойствами:

(*)
1. определена для всех $x \geqslant 1$ и при целых $x = k$ совпадает с $\frac{\omega(k)}{k}$;
2. непрерывна;
3. монотонно возрастает, так как
$$\frac{\omega(k+1)}{k+1} - \frac{\omega(k)}{k} > \omega(k)\left(\frac{g}{k+1} - \frac{1}{k}\right) > 0;$$
4. для всех достаточно больших x выполняется неравенство
$$g_2\psi(x) < \psi(x+1) < G\psi(x) \quad (g_2 > 2).$$

Действительно, проверим, например, левую часть этого неравенства. При $k \leqslant x < k+1$ будет

$$\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} = \frac{\frac{\omega(k+1)}{k+1} + \left(\frac{\omega(k+2)}{k+2} - \frac{\omega(k+1)}{k+1}\right)(x-k)}{\frac{\omega(k)}{k} + \left(\frac{\omega(k+1)}{k+1} - \frac{\omega(k)}{k}\right)(x-k)},$$

$$\min\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} \geqslant \min\left(\frac{\omega(k+1)\cdot k}{\omega(k)\cdot(k+1)}, \ \frac{\omega(k+2)\cdot(k+1)}{\omega(k+1)\cdot(k+2)}\right) > \frac{gk}{k+1} > g_2,$$

где $2 < g_2 < g$ и k достаточно большое.

Пусть $\varphi(x)$ — функция, обратная $\psi(x)$. Существование ее обеспечено условиями (*); из (*) следует также, что

$$\psi(x) > c_2\, g_2^{x} \quad (c_2 > 0)$$

и, значит, для достаточно больших x

$$\varphi(x) < \delta\cdot\ln x, \text{ где } \frac{1}{\ln g_2} < \delta < \frac{1}{\ln 2}. \tag{5}$$

Приступим к доказательству равномерности распределения функции $f(x)$. Согласно критерию Вейля (I), достаточно убедиться в выполнении предельного равенства

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0.$$

Обозначим

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}, \quad n = \left[\varphi\left(\frac{1}{2G}\ln P\right)\right] + 1,$$

$$\xi = \frac{3}{2}\,\frac{\omega(n)}{n\ln P}, \quad P_1 = [P^{\xi}], \quad \tau = \frac{\omega(n)}{\ln P_1}.$$

Очевидно, при $P\to\infty$ будет $n\to\infty$, причем, в силу (5), будет

$$n<\delta\ln\ln P<2\ln\ln P. \tag{6}$$

Далее,

$$\frac{\omega(n)}{n}=\psi(n)\leqslant\psi\left(\varphi\left(\frac{1}{2G}\ln P\right)+1\right)<G\psi\left(\varphi\left(\frac{1}{2G}\ln P\right)\right)=\frac{\ln P}{2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\omega(n)}{n}>\psi\left(\varphi\left(\frac{1}{2G}\ln P\right)\right)=\frac{\ln P}{2G}.$$

Следовательно, из определения ξ получаем

$$\frac{3}{4G}<\xi<\frac{3}{4},\quad P_1=[P^{\xi}]\to\infty \text{ при } P\to\infty. \tag{7}$$

Наконец,

$$\tau=\frac{\omega(n)}{\xi\ln P}+o(1)=\frac{2}{3}n+o(1). \tag{8}$$

Для оценки $|S|$ разобьем интервал суммирования, положив

$$P=T\cdot P_1+r,\quad 0\leqslant r<P_1,$$

$$|S|=\left|\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi imf(x)}+\sum_{\nu=1}^{T-1}\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi imf(\nu P_1+x)}+\sum_{x=1}^{r}e^{2\pi imf(TP_1+x)}\right|,$$

$$|S|\leqslant 2P_1+(T-1)\max_{0<\nu<T}\left|\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi im\,f(\nu P_1+x)}\right|. \tag{9}$$

Пусть максимум правой части достигается при $\nu=\nu_0$. Преобразуем $f(\nu_0P_1+x)=f(P_2+x)$, $P_1\leqslant P_2<P$:

$$f(P_2+x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x+P_2)^k+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(x+P_2)^k.$$

Обозначим через $R(x)$ сумму

$$R(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k+n}(x^{k+n}+c_{k+n}^1x^{k+n-1}P_2+\cdots+c_{k+n}^kx^nP_2^k).$$

Тогда

$$f(P_2+x)=Q(x)+R(x),$$

где $Q(x)$ — полином степени n относительно x со старшим коэффициентом

$$\alpha=a_n. \tag{10}$$

Оценим сумму $\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi im\,f(P_2+x)}$:

$$\left|\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi imf(P_2+x)}\right|\leqslant\left|\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi im\,Q(x)}\right|+\left|\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi im\,f(P_2+x)}-e^{2\pi im\,Q(x)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{x=1}^{P_1}e^{2\pi im\,Q(x)}\right|+\sum_{x=1}^{P_1}\left|e^{2\pi imR(x)}-1\right|,$$

и так как

$$|e^{2\pi i m R(x)}-1|=2|\sin \pi m R(x)|\leqslant 2\pi m|R(x)|,$$

то получим

$$\left|\sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m f(P_1+x)}\right|\leqslant |S_1|+2\pi m\sum_{x=1}^{P_1}|R(x)|,$$

где

$$S_1=\sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m Q(x)}.$$

Теперь неравенство (9) можно записать в виде

$$\frac{1}{P}|S|\leqslant\frac{2P_1}{P}+\frac{1}{P_1}|S_1|+2\pi m\max_{1\leqslant x\leqslant P_1}|R(x)|. \qquad (11)$$

Применим к S_1 оценку, полученную для сумм Вейля К. К. Марджанишвили и Б. И. Сегалом ([5]):

Если

$$S_1=\sum_{x=1}^{P_1} e^{2\pi i m Q(x)},\quad P_1\geqslant 3,$$

где

$$Q(x)=\alpha x^n+\alpha_1 x^{n-1}+\cdots+\alpha_n,\quad n\geqslant 3,$$

то для $\alpha=\frac{a}{q}+\frac{\lambda}{q^2}$, где a и q — целые, $q>0$, $(aq)=1$, $|\lambda|\leqslant\Lambda\geqslant 1$, справедливо:

$$|S_1|^{2^{n-1}}<8(4P_1)^{2^{n-1}}\mu^{\sigma}\left(\left(m\Lambda+\frac{q}{P_1}\right)\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P_1^{n-1}}\right)\right)^{1-\varepsilon}. \qquad (12)$$

(Здесь $\mu=(n-1)\ln P_1+(n-1)^l-1$; $\sigma=\frac{(n-1)^l-1}{l}$; $0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$, l — наименьшее целое $\geqslant\frac{1}{\varepsilon}$.)

Из определения τ, в силу (10). получим

$$|\alpha|=e^{-\omega(n)}=e^{-\tau\ln P_1}=\frac{1}{P_1^{\tau}},$$

$$|\alpha|=\frac{1}{[P_1^{\tau}]}+\frac{\lambda}{[P_1^{\tau}]^2},\ \text{где}\ |\lambda|=\frac{[P_1^{\tau}]\{P_1^{\tau}\}}{P_1^{\tau}}<1.$$

Отсюда следует, что в оценке (12) можно принять

$$q=[P_1^{\tau}],\quad \Lambda=1.$$

Выберем $\varepsilon=\frac{1}{3}$. Тогда $l=3$ и оценка (12) примет вид:

$$|S_1|<8^{\frac{1}{2^{n-1}}}\cdot 4P_1(2n^3\ln P_1)^{\frac{n^3}{3.2^{n-1}}}\left((m+P_1^{\tau-1})\left(2P_1^{-\tau}+P_1^{1-n}\right)\right)^{\frac{2}{3}\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Но, в силу (6), при достаточно больших P_1

$$(2n^3\ln P_1)^{\frac{n^3}{3.2^{n-1}}}<e^{\frac{\varepsilon_1\ln P_1}{2^n}}=P_1^{\frac{\varepsilon_1}{2^n}}$$

для всякого постоянного $\varepsilon_1 > 0$

$$(m + P_1^{\tau-1})(2P_1^{-\tau} + P_1^{1-n}) = 2mP_1^{-\tau} + mP_1^{1-n} + 2P_1^{-1} + P_1^{\tau-n} < 3P_1^{-1}$$

$\left(\text{так как, в силу (8), } \tau = \frac{2}{3}n + o(1)\right)$.

Теперь для S_1 получим

$$|S_1| < (24)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \cdot 4 \cdot P_1^{1-\frac{\frac{4}{3}-\varepsilon_1}{2^n}}$$

и окончательно при достаточно больших n

$$|S_1| < P_1^{1-\frac{1}{2^n}}. \qquad (13)$$

Перейдем к оценке $|R(x)|$ при $1 \leqslant x \leqslant P_1$:

$$|R(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\omega(k+n)} (x^{k+n} + c_{k+n}^1 x^{k+n-1} P_2 + \dots + c_{k+n}^k x^n P_2^k).$$

Но

$$x^{k+n} + c_{k+n}^1 x^{k+n-1} P_2 + \dots + c_{k+n}^k x^n P_2^k < (k+n)^k (P_1^{k+n} + P_1^{k+n-1} P_2 + \dots$$
$$\dots + P_1^n P_2^k) \leqslant (k+n)^k (k+1) P_1^n P_2^k < (k+n)^{k+1} P_1^n P^k,$$

так как $P_1 \leqslant P_2 < P$.

Таким образом, получаем

$$|R(x)| < P_1^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\omega(k+n)} (k+n)^{k+1} P^k. \qquad (14)$$

Обозначим через N_1 отношение соседних членов суммы в правой части (14):

$$N_1 < P\left(1 + \frac{1}{k+n}\right)^{k+1} (k+n+1) e^{-(\omega(k+n+1) - \omega(k+n))} <$$
$$< 3P(k+n+1) e^{-(g-1)\omega(k+n)} < 3P(k+n+1) e^{-c_1 2^k \cdot \omega(n)} <$$
$$< 6Pnke^{-c_1(2^k + \omega(n))} \quad (\text{постоянная } c_1 > 0).$$

Пользуясь определением ξ и неравенством (7), получим

$$\omega(n) > c_2 n \ln P \quad \left(c_2 = \frac{1}{2G}\right).$$

Таким образом,

$$N_1 < 12ke^{-c_1 2^k} \cdot P^{1-c_1 c_2 n} \ln\ln P < \frac{1}{2}$$

при достаточно большом n и любом $k \geqslant 1$. Но тогда из (14) следует

$$|R(x)| < 2P_1^n (n+1)^2 Pe^{-g\omega(n)}.$$

Пользуясь определением величин τ, P_1, n и ξ, получим

$$|R(x)| < 2P^{n\xi+1} (2\ln\ln P)^2 P^{-g\tau\xi} < P^{n\xi+1-2\tau\xi}. \qquad (15)$$

Теперь оценка основной суммы (11), в силу оценок (13) и (15) для $|S_1|$ и $|R(x)|$, справедливых при достаточно большом P, примет вид:

$$\frac{1}{P}|S|<2P^{-(1-\xi)}+P^{-\frac{\xi}{2^n}}+2\pi m P^{-(2\tau\xi-n\xi-1)}.$$

Но из (7) и (8) следует

$$1-\xi>\frac{1}{4},\quad 2\tau\xi-n\xi-1=\frac{1}{3}n\xi-1+o(1)>\frac{1}{5G}n.$$

Наконец,

$$P^{-\frac{\xi}{2^n}}<e^{-\frac{3\ln P}{4G\cdot e^{\delta\ln 2\ln\ln P}}}=e^{-\frac{3}{4G}(\ln P)^{1-\delta\ln 2}}$$

и, пользуясь (5), получим

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}|S|=0,$$

чем доказано равномерное и, в силу а), вполне равномерное распределение дробных долей функции $f(x)$.

Замечание. *Рост функций $f(x)$, рассмотренных в теореме 1, удовлетворяет следующим условиям:*

$$f(x)=o(x^{\lambda_1\ln\ln x})\qquad \text{для всякого } \lambda_1>\frac{1}{\ln g}, \tag{16}$$

$$f(x)=\Omega(x^{\lambda_2\ln\ln x})\qquad \text{для всякого } \lambda_2<\frac{1}{\ln G}. \tag{17}$$

Действительно, обозначим через N_2 отношение соседних членов ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k.$$

Очевидно,

$$|N_2|=e^{-(\omega(k+1)-\omega(k)-\ln x)}=e^{-(\Delta\omega(k)-\ln x)}.$$

При достаточно большом k

$$\Delta^2\omega(k)=\omega(k+2)-2\omega(k+1)+\omega(k)>\omega(k)>0;$$

$$\Delta\omega(k)>\omega(k)\to\infty \text{ при } k\to\infty.$$

Таким образом, $\Delta\omega(k)$ — монотонно возрастающая функция k.

Определим k_1 из условия

$$\Delta\omega(k_1)\leqslant\ln x<\Delta\omega(k_1+1); \tag{18}$$

тогда при достаточно большом x для $k\geqslant k_1+2$ будет

$$|N_2|\leqslant e^{-(\Delta\omega(k_1+2)-\ln x)}<e^{-(\Delta\omega(k_1+2)-\Delta\omega(k_1+1))}=e^{-\Delta^2\omega(k_1+1)}<\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{k_1+1}e^{-\omega(k)}x^k+$$

$$+\sum_{k=k_1+2}^{\infty}e^{-\omega(k)}x^k\leqslant(k_1+2)\max_{0\leqslant k\leqslant k_1+1}(e^{-\omega(k)}x^k)+c_3e^{-\omega(k_1+2)}x^{k_1+2}.$$

Из (18) получим теперь

$$\ln x > \omega(k_1) > c_4 g^{k_1} \quad (c_4 > 0),$$

$$k_1 < \frac{1}{\ln g}(\ln\ln x - \ln c_4)$$

и, следовательно,

$$|f(x)| < (k_1 + 2)\, x^{k_1+1} + c_3 x^{k_1+2} < c_5 x^{\frac{1}{\ln g} \ln\ln x + 2},$$

чем доказано утверждение (16).

Для доказательства утверждения (17) достаточно показать, что существует последовательность $x_\nu \to \infty$ при $\nu \to \infty$ такая, что для всех достаточно больших ν будет

$$|f(x_\nu)| \geqslant x_\nu^{\frac{1}{\ln G} \ln\ln x_\nu + O(1)}$$

(величины x_ν могут не быть целыми; ν — целое).

Выберем

$$x_\nu = e^{\frac{\omega(\nu+1) - \omega(\nu-1)}{2}};$$

тогда для $k \geqslant \nu$ при $\nu \to \infty$ будет

$$|N_2| = e^{-\left(\omega(k+1) - \omega(k) - \frac{\omega(\nu+1) - \omega(\nu-1)}{2}\right)} < e^{-\frac{1}{2}\Delta^2\omega(\nu-1)} < e^{-\frac{1}{2}\omega(\nu-1)} \to 0.$$

Аналогично, при $k \leqslant \nu - 1$ для модуля отношения $\frac{a_k x^k}{a_{k+1} x^{k+1}} = \frac{1}{N_2}$ получим

$$\left|\frac{1}{N_2}\right| \leqslant e^{\omega(\nu) - \omega(\nu-1) - \frac{\omega(\nu+1) - \omega(\nu-1)}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\Delta^2\omega(\nu-1)} \to 0.$$

Следовательно,

$$|f(x_\nu)| = \left|a_\nu x_\nu^\nu + \sum_{k=0}^{\nu-1} a_k x_\nu^k + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} a_k x_\nu^k\right| \geqslant |a_\nu x_\nu^\nu| - 2|a_{\nu-1} x_\nu^{\nu-1}| - 2|a_{\nu+1} x_\nu^{\nu+1}|,$$

$$|f(x_\nu)| > \frac{1}{2} e^{-\omega(\nu) + \nu \ln x_\nu} > \frac{1}{2} x_\nu^{\nu-2}$$

(так как $2\ln x_\nu - \omega(\nu) = \omega(\nu+1) - \omega(\nu-1) - \omega(\nu) > 0$). Но для достаточно больших ν

$$\ln x_\nu = \frac{\omega(\nu+1) - \omega(\nu-1)}{2} < \frac{\omega(\nu+1)}{2} < c_6 G^\nu \quad (c_6 > 0),$$

$$\nu > \frac{1}{\ln G}(\ln\ln x_\nu - \ln c_6)$$

и для $|f(x_\nu)|$ получаем оценку

$$|f(x_\nu)| > \frac{1}{2} x_\nu^{\frac{1}{\ln G} \ln\ln x_\nu + c_7},$$

доказывающую утверждение (17).

§ 2. ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция $f(x)$ определена рядом*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |a_k|=e^{-\omega(k)}.$$

Если для всех достаточно больших k выполняются условия

$$\left.\begin{aligned}&\omega(k)\geqslant k^{\lambda} \quad \text{при некотором постоянном } \lambda>3,\\ &\left(1+\frac{1}{k}\right)\omega(k)\leqslant\omega(k+1)\leqslant k\omega(k),\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

то функция $f(x)$ распределена равномерно.

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Пусть

$$n=[(2\ln P)^{\frac{1}{\lambda-1}}],$$

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad R(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k.$$

Тогда

$$f(x)=Q(x)+R(x),$$

$$|S|\leqslant\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\, Q(x)}\right|+\sum_{x=1}^{P}\left|e^{2\pi i m R(x)}-1\right|,$$

$$|S|\leqslant|S_1|+2\pi m P\max_{1\leqslant x\leqslant P}|R(x)|. \tag{20}$$

где

$$S_1=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m Q(x)}.$$

Оценим $|R(x)|$:

$$\max_{1\leqslant x\leqslant P}|R(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-\omega(k)}P^k. \tag{21}$$

Для отношения N соседних членов суммы в (21) получим

$$N=e^{-(\omega(k+1)-\omega(k))}P\leqslant e^{-\frac{\omega(k)}{k}}P\leqslant e^{-\frac{\omega(n+1)}{n+1}}P,$$

так как, в силу (19), $\frac{\omega(k+1)}{k+1}\geqslant\frac{\omega(k)}{k}$ и $k\geqslant n+1$. Но

$$\frac{\omega(n+1)}{n+1}\geqslant(n+1)^{\lambda-1}>2\ln P$$

и при $P>2$

$$N<Pe^{-2\ln P}=\frac{1}{P}<\frac{1}{2}.$$

Таким образом, при неограниченном возрастании P получим

$$\max_{1\leqslant x\leqslant P} |R(x)| < 2e^{-\omega(n+1)} P^{n+1} = 2e^{-(\omega(n+1)-(n+1)\ln P)} \to 0, \tag{22}$$

так как $\omega(n+1)-(n+1)\ln P > (n+1)\ln P$.

Для S_1 применим оценку сумм Вейля, полученную И. М. Виноградовым ([6]):

Если $Q(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ — полином степени $n \geqslant 11$, $a_r = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$, $(aq) = 1$, $|\theta| \leqslant 1$ и удовлетворяются условия

$$P^{\frac{1}{2}} \leqslant q \leqslant P^{r-1}, \quad 2 \leqslant r \leqslant n, \tag{23}$$

то

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m Q(x)}\right| < c(m) P^{1-\frac{1}{6(n-1)^2 \ln 10 n}}. \tag{24}$$

(Здесь объединены часть случая 1 и случай 2 цитируемой теоремы с заменой в ней $n+1$ на n.) При достаточно больших n правую часть последнего неравенства можно, очевидно, заменить на

$$c(m) P^{1-\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}}$$

для любого постоянного $\varepsilon > 0$.

Пусть r — наименьшее целое, удовлетворяющее условию

$$\omega(r) \geqslant \ln P.$$

При достаточно большом P будет $r \geqslant 2$. Далее, так как

$$\frac{\omega(n+1)}{n+1} > \ln P, \quad \frac{\omega(r)}{r} < \frac{\omega(r)}{r-1} \leqslant \omega(r-1) < \ln P,$$

то

$$\frac{\omega(r)}{r} < \frac{\omega(n+1)}{n+1}$$

и, следовательно, $r \leqslant n$, чем удовлетворено второе из условий (23).

Положим $q = [e^{\omega(r)}]$. Очевидно,

$$|a_r| = \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad |\theta| < 1,$$

$$q \leqslant e^{\omega(r)} < e^{(r-1)\ln P} = P^{r-1},$$
$$q > e^{\omega(r)} - 1 \geqslant e^{\ln P} - 1 > P^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, все условия применимости оценки (24) соблюдены и, выбирая $0 < \varepsilon < \lambda - 3$, получим для S_1

$$\frac{1}{P}|S_1| < c(m) P^{-\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}} \leqslant c(m) e^{-\frac{\ln P}{(2\ln P)^{\frac{2+\varepsilon}{\lambda-1}}}} \to 0 \tag{25}$$

при неограниченном возрастании P.

Из (20) получим

$$\frac{1}{P}|S| < \frac{1}{P}|S_1| + 2\pi m \max_{1<x<P} |R(x)|$$

и, в силу (22) и (25),

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi imf(x)}=0.$$

Следовательно, по критерию Вейля (I), функция $f(x)$ равномерно распределена.

Следствие. *Если существуют постоянные* $\lambda>3$, $\beta_1>1$ *и* $\beta_2<1$ *такие, что для всех достаточно больших* k *будет*

$$\omega(k)\geqslant k^{\lambda},\quad \left(1+\frac{\beta_1}{k}\right)\omega(k)\leqslant\omega(k+1)\leqslant\beta_2 k\omega(k),$$

то функция

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k\quad |a_k|=e^{-\omega(k)}$$

распределена вполне равномерно.

Согласно определению вполне равномерного распределения, достаточно убедиться, что функция

$$F_s(x)=m_1 f(x+1)+\cdots+m_s f(x+s)$$

распределена равномерно. Для этого покажем, что $F_s(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.

Действительно, как в теореме 1, получим

$$F_s(x)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k x^k,\quad |A_k|=e^{-\omega_1(k)},$$

где

$$A_k=c(s)\frac{(k+t)!}{k!}a_{k+t}+O(k^{t+1}a_{k+t+1})\tag{26}$$

(t не зависит от k, $0\leqslant t<s-1$).

Единственным отличием доказательства (26) от доказательства аналогичного соотношения (4) будет иной метод оценки N:

$$N<c_1(s)s^{t_1+s}(k+t_1+s)^s e^{-(\omega(k+t_1+1)-\omega(k+t_1))}<$$
$$<c_2(s)s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-\frac{\omega(k+t_1)}{k+t_1}}$$

и при достаточно большом k

$$N<c_2(s)s^{t_1}(k+t_1)^s e^{-(k+t_1)^2}<\frac{1}{2}.$$

Из (26) следует

$$\omega_1(k)=\omega(k+t)+O(\ln k).$$

При достаточно большом k получим

$$\omega_1(k)>(k+t)^{\lambda}+O(\ln k)>k^{\lambda_1},\quad 3<\lambda_1<\lambda,$$
$$\omega_1(k+1)\leqslant\beta_2(k+t)\,\omega(k+t)+O(\ln k)<k\omega_1(k),$$
$$\omega_1(k+1)\geqslant\left(1+\frac{\beta_1}{k+t}\right)\omega(k+t)+O(\ln k)>\left(1+\frac{1}{k}\right)\omega_1(k).$$

Таким образом, условия (19) выполнены, функция $F_s(x)$ распределена равномерно и дробные доли функции $f(x)$ распределены вполне равномерно.

Замечание. *Среди функций теоремы 2 есть растущие скорее, чем $x^{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}$ для всякого $\varepsilon > 0$, однако все они удовлетворяют условию*

$$f(x) = o(x^{\ln^{\frac{1}{2}} x}).$$

Действительно,

$$|f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\omega(k)} x^k.$$

Отношение соседних членов ряда в правой части этого неравенства

$$N = e^{-(\omega(k+1)-\omega(k))} x \leqslant e^{-\frac{\omega(k)}{k}+\ln x} < e^{-k^{\lambda-1}+\ln x} < \frac{1}{2}$$

при $k > k_1 = [\ln x)^{\frac{1}{\lambda-1}}]$. Таким образом,

$$|f(x)| < \sum_{k=0}^{k_1} e^{-k^\lambda} x^k + 2e^{-(k_1+1)^\lambda} x^{k_1+1} \leqslant (k_1+3) \max_k e^{-k^\lambda + k \ln x}$$

и при достаточно большом x

$$|f(x)| < e^{c(\lambda)(\ln x)^{1+\frac{1}{\lambda-1}}} = o(x^{\ln^{\frac{1}{2}} x}).$$

С другой стороны, выберем функцию

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k^\lambda} x^k, \qquad \lambda = 1 + \frac{2}{1-\varepsilon} \qquad (0 < \varepsilon < 1).$$

Рассмотрим член суммы, получающийся при

$$k = k_2 = \left[\left(\frac{1}{\lambda}\ln x\right)^{\frac{1}{\lambda-1}}\right].$$

Очевидно,

$$f(x) > e^{-k_2{}^\lambda + k_2 \ln x} > e^{c_1(\lambda)(\ln x)^{1+\frac{1}{\lambda-1}}} > x^{(\ln x)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}.$$

Глава II

Равномерность распределения функций вида $\alpha q_1, \ldots, q_x$ и αq^x

§ 1. Пусть целые $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ удовлетворяют условию

$$q_k \geqslant 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Легко видеть, что каждое действительное число α можно представить разложением:

$$\alpha = \delta_0 + \frac{\delta_1}{q_1} + \frac{\delta_2}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{\delta_k}{q_1 \cdots q_k} + \cdots, \tag{1}$$

где δ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — целые, для которых

$$0 \leqslant \delta_k \leqslant q_k - 1, \qquad \delta_0 = [\alpha].$$

Действительно, пусть α произвольно.

Обозначим

$$\alpha_1 = \{\alpha\}, \quad \alpha_k = \{\alpha q_1 \ldots q_{k-1}\} = \{\alpha_{k-1} q_{k-1}\} \quad (k = 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Выберем

$$\delta_k = [\alpha_k q_k] \quad (k = 1, 2, \ldots); \tag{3}$$

тогда

$$\begin{aligned} \alpha &= \delta_0 + \alpha_1, \\ \alpha_1 q_1 &= \delta_1 + \alpha_2, \\ \alpha_2 q_2 &= \delta_2 + \alpha_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k q_k &= \delta_k + \alpha_{k+1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\alpha = \delta_0 + \frac{\delta_1}{q_1} + \cdots + \frac{\delta_k}{q_1 \ldots q_k} + \frac{\alpha_{k+1}}{q_1 \ldots q_k}. \tag{4}$$

При неограниченном возрастании k $\frac{\alpha_{k+1}}{q_1 \ldots q_k} \to 0$ и из (4) получаем разложение (1).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если целые $q_k \geqslant 2$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $q_k \to \infty$ при $k \to \infty$, то необходимым и достаточным условием равномерности распределения функции*

$$f(x) = \alpha q_1 \ldots q_x$$

является представимость α в виде

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q_k]}{q_1 \ldots q_k}, \tag{5}$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — дробные доли какой-нибудь равномерно распределенной функции $\varphi(x)$.

Доказательство. Пусть α представимо в форме (5):

$$\alpha = \delta_0 + \frac{[\theta_1 q_1]}{q_1} + \frac{[\theta_2 q_2]}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{[\theta_k q_k]}{q_1 \ldots q_k} + \cdots.$$

Тогда

$$\alpha q_1 \cdots q_{k-1} = R_k + \frac{[\theta_k q_k]}{q_k} + \frac{1}{q_k}\left(\frac{[\theta_{k+1} q_{k+1}]}{q_{k+1}} + \cdots\right), \tag{6}$$

где R_k — целое.

Обозначим

$$\xi_k = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[\theta_{k+\nu} q_{k+\nu}]}{q_{k+1} \ldots q_{k+\nu}},$$

$$\xi_k < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q_{k+\nu} - 1}{q_{k+1} \ldots q_{k+\nu}} = 1.$$

Таким образом, $0 < \xi_k < 1$. Из (6) получим

$$\alpha q_1 \cdots q_{k-1} = R_k + \theta_k + \frac{\xi_k - \{\theta_k q_k\}}{q_k}. \tag{7}$$

Оценим сумму

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}.$$

Пользуясь определением функции $f(x)$, в силу (7), получим

$$\frac{1}{P}|S|=\frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\left(R_{x+1}+\{\varphi(x+1)\}+\frac{\xi(x)}{q_{x+1}}\right)}\right|,$$

где

$$|\xi(x)|=|\xi_{x+1}-\{\theta_{x+1}q_{x+1}\}|<1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{P}|S|=\frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\left(\varphi(x+1)+\frac{\xi(x)}{q_{x+1}}\right)}\right|\leqslant\frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\varphi(x+1)}\right|+$$

$$+\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}\left|e^{2\pi i m\frac{\xi(x)}{q_{x+1}}}-1\right|\leqslant\frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\varphi(x+1)}\right|+\frac{2\pi m}{P}\sum_{x=1}^{P}\frac{1}{q_{x+1}}.$$

Пользуясь условиями теоремы при любом $\varepsilon>0$ для всех достаточно больших P, получим

$$\frac{1}{P}|S|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2\pi m}{P}\left(\sum_{x=1}^{x_0}\frac{1}{q_{x+1}}+\sum_{x=x_0+1}^{P}\frac{1}{q_{x+1}}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon \qquad (8)$$

$\left(x_0=x_0(\varepsilon)\right.$ выбираем так, чтобы при $x>x_0$ было $\left.\frac{1}{q_{x+1}}<\frac{\varepsilon}{8\pi m}\right)$.

Из (8) следует

$$\lim_{P\to\infty}\frac{1}{P}\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)}\right|=0,$$

чем доказана достаточность условия (5).

Покажем необходимость этого условия. Пусть функция $f(x)=\alpha q_1\ldots q_x$ распределена равномерно. Согласно (1),

$$\alpha=\delta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta_k}{q_1\ldots q_k},$$

где, в силу (2) и (3),

$$\delta_k=[\alpha_k q_k],\qquad \alpha_k=\{\alpha q_1\ldots q_{k-1}\}.$$

Таким образом,

$$\alpha=\delta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\alpha_k q_k]}{q_1\ldots q_k}. \qquad (9)$$

В этом разложении $\alpha_k=\{f(k-1)\}$. Но функция $f(x-1)$ распределена равномерно; следовательно, разложение (9) является разложением типа (5) чем теорема 3 доказана полностью.

Замечание. *При построении чисел α, для которых функция $\alpha q_1\ldots q_x$ равномерно распределена, величины θ_k в разложении (5) можно заменять на θ_k+n_k, где n_k — целые, удовлетворяющие условию*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{n_k+1}{q_k}=0.$$

Действительно, при таких α попрежнему получим соотношение типа (7):

$$\alpha q_1 \cdots q_{k-1} = R'_k + \theta_k + \frac{r_k}{q_k},$$

где R'_k — целое, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{r_k}{q_k} = 0$.

Далее доказательство равномерности распределения $\alpha q_1 \ldots q_x$ пройдет как в теореме.

Пример 1. Пусть $0 < \lambda < 1$. Из результатов Ван дер Корпута [4] следует, что функция $\varphi(x) = x^\lambda$ распределена равномерно. Выберем $q_k = k + 1$ и, согласно замечанию, заменим $\theta_k = \{k^\lambda\}$ на $\theta_k + [k^\lambda] = k^\lambda$. Тогда для каждого

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k^{1+\lambda}]}{k!}$$

функция $\alpha x!$ будет равномерно распределена.

Пример 2. Выберем $q_k = 2^{2k-1}$, $\theta_k = \{\ln^\lambda k\}$. Для

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} [4^k \ln^\lambda k] \cdot 2^{-k^2}$$

функция $\alpha \cdot 2^{x^2}$ равномерно распределена при $\lambda > 1$ и распределена всюду плотно, но не равномерно для $0 < \lambda \leqslant 1$.

§ 2. Функции теоремы 3

$$f(x) = \alpha q_1 \ldots q_x$$

при $q_1 = q_2 = \ldots = q$ принимают вид

$$f(x) = \alpha q^x, \quad \alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k \cdot q]}{q^k}. \tag{10}$$

Как и раньше, из равномерности распределения функции αq^x следует представимость α в форме (10), где θ_k — дробные доли некоторой равномерно распределенной функции.

Доказательство обратного утверждения не может пройти, как в теореме 3, так как там существенно используется требование неограниченного возрастания величин q_k. Заменим требование равномерности распределения θ_k более сильным требованием вполне равномерной распределенности. Тогда имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. *Если целое* $q \geqslant 2$ *и*

$$\alpha = \delta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\theta_k q]}{q^k},$$

где $\theta_k = \{\varphi(k)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *дробные доли произвольной вполне равномерно распределенной функции* $\varphi(x)$, *то функция*

$$f(x) = \alpha q^x$$

распределена равномерно.

Доказательству предпошлем следующую лемму, получающуюся непосредственно из определения равномерного распределения.

ЛЕММА. *Пусть для всех целых* s *и* ν $(s \geqslant 1;\ 0 \leqslant \nu \leqslant q^s - 1)$ *при* $x=1, 2, \ldots, P$ *число* N_ν *выполнений неравенства*

$$\frac{\nu}{q^s} \leqslant \{f(x)\} < \frac{\nu+1}{q^s}$$

асимптотически равно $\frac{1}{q^s}P$:

$$N_\nu = \frac{1}{q^s}P + o(P).$$

Тогда функция $f(x)$ *равномерно распределена.*

Действительно, пусть $0 \leqslant \beta_1 < \beta_2 < 1$. Выберем s настолько большим, чтобы для $\nu_1 = [\beta_1 q^s]$ и $\nu_2 = [\beta_2 q^s]$ выполнялось неравенство $\nu_2 > \nu_1 + 1$. Тогда

$$\frac{\nu_1}{p^s} \leqslant \beta_1 < \frac{\nu_1+1}{q^s} < \frac{\nu_2}{q^s} \leqslant \beta_2 < \frac{\nu_2+1}{q^s}.$$

Отсюда для числа N дробных долей $\{f(x)\}$ $(x=1, 2, \ldots, P)$, попавших на интервал $(\beta_1\beta_2)$, получим

$$\sum_{\nu=\nu_1+1}^{\nu_2-1} N_\nu \leqslant N \leqslant \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} N_\nu. \tag{11}$$

Обозначим

$$\lambda = \varliminf_{P\to\infty} \frac{N}{P}, \quad \Lambda = \varlimsup_{P\to\infty} \frac{N}{P}.$$

Пользуясь условием леммы, получим из (11)

$$\frac{\nu_2-\nu_1-1}{q^s} \leqslant \lambda \leqslant \Lambda \leqslant \frac{\nu_2-\nu_1+1}{q^s}.$$

Но

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\nu_2-\nu_1-1}{q^s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\nu_2-\nu_1+1}{q^s} = \beta_2 - \beta_1.$$

Таким образом,

$$\lim_{P\to\infty} \frac{N}{P} = \beta_2 - \beta_1,$$

чем утверждение леммы доказано.

Перейдем к доказательству теоремы. Из определения вполне равномерного распределения следует, что для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, функция

$$F_s(x) = m_1\varphi(x+1) + \cdots + m_s\varphi(x+s)$$

равномерно распределена. Но тогда, по критерию Вейля для многомерного случая (II), система s функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$, где $\varphi_i(x) = \varphi(x+i)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, равномерно распределена в s-мерном пространстве.

Рассмотрим s-мерный единичный куб. Разобьем его ребра на q равных частей и соответственно весь куб на q^s малых кубиков с объемом $\frac{1}{q^s}$. Перенумеруем полученные кубики, считая номером число

$$\nu = \delta_1(\nu)\,q^{s-1} + \delta_2(\nu)\,q^{s-2} + \cdots + \delta_s(\nu), \tag{12}$$

где

$$\frac{\delta_1(\nu)}{q}, \frac{\delta_2(\nu)}{q}, \ldots, \frac{\delta_s(\nu)}{q}$$

— координаты ближайшей к началу координат вершины кубика. Очевидно, при этом ν примет каждое из целых значений от 0 до $q^s - 1$, причем запись (12) будет записью числа ν по системе счисления с основанием q.

Из равномерности распределения системы функций $\varphi(x+1), \varphi(x+2), \ldots, \varphi(x+s)$ следует, что для $x = 1, 2, \ldots, P$ число N_ν одновременного выполнения неравенств

$$\frac{\delta_i(\nu)}{q} \leqslant \{\varphi(x+i)\} < \frac{\delta_i(\nu)+1}{q} \quad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{13}$$

(равное числу точек $(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ $x_i = \{\varphi(x+i)\}$, попавших в кубик с номером ν) удовлетворяет соотношению

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P).$$

Так как $\{\varphi(x+i)\} = \theta_{x+i}$, то неравенства (13) выполняются для тех и только тех x, для которых

$$\delta_i(\nu) = [\theta_{x+i}q] \quad (i = 1, 2, \ldots, s). \tag{14}$$

В силу условия теоремы,

$$\{\alpha q^x\} = \frac{[\theta_{x+1}q]}{q} + \cdots + \frac{[\theta_{x+s}q]}{q^s} + \frac{1}{q^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{[\theta_{x+s+\nu}q]}{q^\nu},$$

$$\{\alpha q^x\} = \frac{[\theta_{x+1}q]\, q^{s-1} + [\theta_{x+2}q]\, q^{s-2} + \cdots + [\theta_{x+s}q]}{q^s} + \frac{\theta}{q^s} \quad (0 < \theta < 1). \tag{15}$$

Из соотношения (15) видно, что для $x = 1, 2, \ldots, P$ число выполнений неравенства

$$\frac{\nu}{q^s} \leqslant \{\alpha q^x\} < \frac{\nu+1}{q^s} \quad (\nu = \delta_1(\nu)\, q^{s-1} + \cdots + \delta_s(\nu))$$

совпадает с числом выполнений равенств (14) и, следовательно, совпадает с

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P).$$

Так как s и ν выбирались произвольно, то применима лемма. Согласно утверждению леммы, функция αq^x равномерно распределена.

§ 3. Теорема 4 дает аналитическое решение вопроса о построении чисел α, для которых функция αq^x распределена равномерно. Дадим элементарное решение того же вопроса.

Рассмотрим n-значные разложения чисел $0, 1, 2, \ldots, q^n - 1$ по системе счисления с основанием $q \geqslant 2$.

$$\begin{array}{lllll} 0 & = 0 & 0 \ \ldots & 0 & 0 \\ 1 & = 0 & 0 \ \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q & = 0 & 0 \ \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q^n - 1 & = q-1 & q-1 \ \ldots & q-1 & q-1 \end{array} \tag{16}$$

Целые числа δ_k, принадлежащие интервалу $0 \leqslant \delta_k \leqslant q-1$, будем называть *знаками*.

Системой $\rho_n(q)$ назовем систему из t знаков

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n}\cdots\delta_t \quad (t = q^n + n - 1), \tag{17}$$

обладающую тем свойством, что каждое из разложений (16) совпадает с некоторой группой $\delta_{k+1}\cdots\delta_{k+n}$ n ее подряд идущих знаков ($k=0, 1, \ldots, q^n - 1$). Таким образом, все q^n n-значных чисел $\delta_{k+1}\ldots\delta_{k+n}$ ($k = 0, 1, \ldots, q^n - 1$), получающихся из (17), должны быть различны.

Например, для $q = 2$ и $n = 3$ одна из возможных систем $\rho_3(2)$ будет иметь вид

$$1\overbrace{1\underbrace{1}_{}0}0\,0\,1\,0\,1\,1.$$

Действительно, трехзначные числа, получаемые из этой системы

$$111,\quad 110,\quad 100,\quad 000,\quad 001,\quad 010,\quad 101,\quad 011$$

совпадают с совокупностью трехзначных разложений чисел $0, 1, 2, \ldots 7$ по двоичной системе счисления:

$$\begin{aligned} 0 &= 000, & 4 &= 100,\\ 1 &= 001, & 5 &= 101,\\ 2 &= 010, & 6 &= 110,\\ 3 &= 011, & 7 &= 111. \end{aligned}$$

Возникает вопрос: для всяких ли n и q существуют системы $\rho_n(q)$ и как строить такие системы? Покажем, что для любых целых $n \geqslant 1$ и $q \geqslant 2$ следующий метод (метод А) приводит к построению некоторой системы $\rho_n(q)$.

Метод А. *Выбираем первые n знаков $\delta_1\ldots\delta_n$ равными $q-1$. Выписывание остальных знаков, начиная с $n+1$-го, производим по следующему общему правилу: к уже выписанным $k+n-1$ знакам*

$$\delta_1\delta_2\ldots\,\delta_{k+1}\ldots\,\delta_{k+n-1} \quad (k \geqslant 1) \tag{A}$$

приписываем справа знак δ^{k+n} так, чтобы получающееся при этом n-значное число $\delta_{k+1}\ldots\,\delta_{k+n-1}\delta_{k+n}$ встречалось в строке (А) *впервые и было наименьшим из не встречавшихся в* (А) *чисел вида* $\delta_{k+1}\ldots\,\delta_{k+n-1}\beta$ ($\beta = 0, 1, \ldots, q-1$). *Строку* (А) *считаем законченной, когда приписывание любого знака приводит к уже встречавшемуся n-значному числу.*

Пусть приписывание закончилось при $k = \tau$:

$$\delta_1\delta_2\ldots\,\delta_\tau\delta_{\tau+1}\ldots\,\delta_{\tau+n-1}. \tag{18}$$

Очевидно, система (18) не содержит одинаковых n-значных чисел и надо лишь показать, что в ней встретится любое из n-значных чисел (16).

Покажем прежде всего, что в (18) встретится любое число вида

$$\beta_1\delta_1\delta_2\ldots\,\delta_{n-1} \quad (\beta_1 = 0, 1, \ldots, q-1).$$

(Согласно методу А, здесь $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_{n-1} = q-1$.) Действительно, в (18) встречается любое число вида

$$\delta_{\tau+1}\ldots\,\delta_{\tau+n-1}\beta_1$$

(иначе процесс выписывания не был бы прекращен). Следовательно, $n-1$-значное число $\delta_{\tau+1}\ldots\delta_{\tau+n-1}$ встречается в строке (18) $q+1$ раз. При этом каждый раз слева к нему должны примыкать различные знаки, что возможно, лишь если один раз это число встречается в начале системы (18), т. е. совпадает с

$$\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}.$$

Итак, в (18) встречается любое число вида

$$\beta_1\delta_{\tau+1}\delta_{\tau+2}\ldots\delta_{\tau+n-1}=\beta_1\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-1}. \tag{19}$$

Применим индукцию. Допустим, что в (18) встречается любое число вида

$$\beta_k\beta_{k-1}\ldots\beta_1\delta_1\delta_2\ldots\delta_{n-k-1}\delta_{n-k}.$$

Из метода А (так как $\delta_{n-k}=q-1$) следует, что в (18) встречается также любое число вида

$$\beta_k\ldots\beta_1\delta_1\ldots\delta_{n-k-1}\beta_{k+1}\quad(\beta_{k+1}=0,1,\ldots,\ q-1).$$

Но тогда каждое $n-1$-значное число

$$\beta_k\ldots\beta_1\delta_1\ldots\delta_{n-k-1} \tag{20}$$

встречается в (18) q раз. Если при этом

$$\beta_k\ldots\beta_1\neq\delta_1\ldots\delta_k,$$

то (так как число (20) не может стоять в начале строки (18)) в (18) встретится любое число вида

$$\beta_{k+1}\,\beta_k\ldots\beta_1\delta_1\ldots\delta_{n-k-1}. \tag{21}$$

Если $\beta_k\ldots\beta_1=\delta_1\ldots\delta_k$, то все числа вида (21) попрежнему встретятся, так как в этом случае они совпадают с числами (19).

Таким образом, в строке (18) встречается любое n-значное число $\beta_n\beta_{n-1}\ldots\beta_1$ и, следовательно, эта строка совпадает с некоторой системой $\rho_n(q)$.

Применим теперь системы $\rho_n(q)$ к построению чисел α, для которых функция

$$f(x)=\alpha q^x$$

будет равномерно распределена.

Обозначим через $\rho_n'(q)$ системы, получающиеся из $\rho_n(q)$ отбрасыванием $n-1$ последних знаков.

Пусть, далее, $\varphi(\mu)>0$ — произвольная целочисленная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\mu\to\infty}\varphi(\mu)=\infty. \tag{22}$$

Определим α бесконечной дробью, записанной в системе счисления с основанием q:

$$\alpha=0,\ \underbrace{\rho_1'(q)\ldots\rho_1'(q)}_{\varphi(1)}\ \underbrace{\rho_2'(q)\ldots\rho_2'(q)}_{\varphi(2)}\ldots\underbrace{\rho_\mu'(q)\ldots\rho_\mu'(q)}_{\varphi(\mu)}\ \rho_{\mu+1}'(q)\ldots \tag{23}$$

(каждый знак каждого $\rho_\mu'(q)$ $(\mu=1,2,\ldots)$ принимается здесь как очередной знак разложения α).

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. *Для любого целого $q \geqslant 2$ и любого α, определенного согласно* (23), *функция*

$$f(x) = \alpha q^x$$

распределена равномерно.

Доказательство. Пусть x пробегает значения $1, 2, \ldots, P$. Подсчитаем число N_ν дробных долей функции αq^x, попадающих на интервал

$$\left(\frac{\nu}{q^s}, \quad \frac{\nu+1}{q^s}\right) \quad (0 \leqslant \nu \leqslant q^s - 1),$$

где $s \geqslant 1$ — произвольное фиксированное целое число.

На указанный интервал попадут, очевидно, те и только те дробные доли $\{\alpha q^x\}$, первые s знаков которых совпадают с s-значным разложением числа ν по системе счисления с основанием q. Для подсчета N_ν воспользуемся тем, что разложение $\{\alpha q^x\}$ в бесконечную q-ичную дробь получается из (23) перенесением запятой на x знаков вправо.

Обозначим

$$S_i = \sum_{\mu=1}^{i} \varphi(\mu)\, q^\mu$$

(S_i — число знаков в разложении (23) до первого из $\rho'_{i+1}(q)$).

Определим k из условия

$$S_k \leqslant P < S_{k+1}.$$

Тогда

$$P = S_k + (r + \theta)\, q^{k+1}, \quad 0 \leqslant r < \varphi(k+1), \quad 0 \leqslant \theta < 1.$$

Из определения $\rho'_n(q)$ следует, что s-значное разложение ν встретится на участке

$$\underbrace{\rho'_1(q) \ldots \rho'_1(q)}_{\varphi(1)} \ldots \underbrace{\rho'_s(q) \ldots \rho'_s(q)}_{\varphi(s)} \underbrace{\rho'_{s+1}(q) \ldots \rho'_{s+1}(q)}_{\varphi(s+1)} \ldots$$
$$\ldots \underbrace{\rho'_k(q) \ldots \rho'_k(q)}_{\varphi(k)} \underbrace{\rho'_{k+1}(q) \ldots \rho'_{k+1}(q)}_{r}$$

λ раз, где

$$\lambda = \varphi(s) + q\varphi(s+1) + \cdots + q^{k-s}\varphi(k) + rq^{k-s+1} + O(s).$$

Но тогда

$$N_\nu = \lambda + O(q^k) = \frac{1}{q^s}\,(S_k + rq^{k+1}) + O(q^k),$$

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + O(q^k).$$

Из определения S_k следует

$$P \geqslant S_k > \varphi(k)\, q^k.$$

Отсюда при $P \to \infty$ получим

$$\frac{q^k}{P} < \frac{1}{\varphi(k)} \to 0.$$

Таким образом,

$$N_\nu = \frac{1}{q^s} P + o(P)$$

и, по лемме (§ 2), функция αq^x равномерно распределена.

Поступило
25. II. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Weyl H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann., 77 (1916), 313—352.

[2] Виноградов И. М., О дробных частях целого многочлена, Изв. Ак. Наук СССР, т. 20, № 9 (1926), 585—600.

[3] Виноградов И. М., Аналитическое доказательство теоремы о распределении дробных частей целого многочлена, Изв. Ак. Наук СССР, т. 21 № 7—8 (1927), 567—578.

Применение конечных тригонометрических сумм к вопросу о распределении дробных долей целого многочлена, Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова, отд. математики, т. 4 (1933), 5—8.

Новый метод в аналитической теории чисел, Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 10, гл. 8 (1937), 102—105.

Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 23, главы 8 и 11 (1947), 77—79; 107—108.

[4] Van der Corput J. G., Diophantische Ungleichungen, Acta Math., 56 (1931), 373—456.

[5] Марджанишвили К. К. и Сегал Б. И., Об одной оценке сумм Вейля, Доклады Ак. Наук СССР, 26, № 8 (1940), 739—742.

[6] Виноградов И. М., Общие теоремы об оценках тригонометрических сумм, Доклады Ак. Наук СССР, 43, № 2 (1944), 51—52.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 239—260

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

СВЯЗЬ МЕЖДУ УНИТАРНЫМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯМИ КОМПЛЕКСНОЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ И ЕЕ УНИТАРНОЙ ПОДГРУППЫ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье дана реализация основных серий неприводимых унитарных представлений комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$ в пространстве функций, заданных на ее унитарной подгруппе $\mathfrak{U}$.

При помощи этой реализации решается вопрос о том, какие неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ и с какой кратностью содержатся в разложении на неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ данного неприводимого представления группы $\mathfrak{G}$, рассматриваемого как представление группы $\mathfrak{G}$. Кроме того, эта реализация используется для вычисления так называемых «сферических функций» представлений.

Рассмотрим неприводимое унитарное представление $g \to U_g$, $g \in \mathfrak{G}$, основной или дополнительной серии * комплексной унимодулярной группы $\mathfrak{G}$. Если это представление рассматривать как представление $u \to U_u$ подгруппы $\mathfrak{U}$ унитарных матриц u из $\mathfrak{G}$, то оно будет приводимым.

В настоящей работе мы изучаем, на какие неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$ разлагается представление U_u.

Среди представлений группы $\mathfrak{G}$ особую роль играют те представления, в которых содержится единичное представление подгруппы $\mathfrak{U}$. Такие представления полностью определяются так называемыми «сферическими функциями». В работе эти сферические функции вычисляются [см. формулу (21) § 4]. Отметим, что сферические функции удовлетворяют системе уравнений в частных производных, указанных одним из авторов в другом месте. Более подробное исследование законов умножения сферических функций и их связи с нормированными кольцами, аналогичное тому, которое для $n = 2$ (матрицы второго порядка) проведено в (4), будет дано в отдельной статье.

§ 1. Унитарная подгруппа группы $\mathfrak{G}$

Пусть $\mathfrak{G}$ — комплексная унимодулярная группа n-го порядка, т. е. группа всех комплексных матриц n-го порядка с детерминантом, равным единице.

---

* Описание этих серий представлений дано в (2) и (3); здесь будет дано другое описание основных серий, так что фактически будут только использованы результаты и обозначения главы I в (2) и §§ 1, 2 в (3).

Обозначим через $\mathfrak{U}$ совокупность всех унитарных матриц u группы $\mathfrak{G}$, а через Γ — совокупность всех диагональных матриц из $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{U}$ — максимальная компактная подгруппа группы $\mathfrak{G}$.

I. *Каждую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде $g = ku$, где** $k \in K$, $u \in \mathfrak{U}$.

Действительно, будем рассматривать матрицу g как матрицу линейного оператора (который мы тоже обозначим буквой g) в n-мерном пространстве $\mathfrak{R}_n$ по отношению к некоторому ортонормальному базису $e_1, \ldots, e_n$, полагая

$$ge_p = \sum_{q=1}^{n} g_{qp} e_q, \quad p = 1, \ldots, n.$$

Ортогонализация по Шмидту:

$$g^{-1}e_1 = k_{11}f_1, g^{-1}e_2 = k_{12}f_1 + k_{22}f_2, \ldots, g^{-1}e_n = k_{1n}f_1 + \cdots + k_{nn}f_n,$$
$$(f_p, f_q) = 0 \text{ при } p \neq q, \quad (f_p, f_p) = 1, \quad p, q = 1, \ldots, n$$

приводит к матрице k; будем ее также рассматривать как оператор, полагая

$$ke_p = \sum_{q=1}^{p} k_{qp} e_q.$$

Построим, далее, унитарный оператор u в $\mathfrak{R}_n$, полагая $ue_p = f_p$. Тогда

$$g^{-1}e_p = \sum_{q=1}^{p} k_{qp} f_q = u \sum_{q=1}^{p} k_{qp} e_q = uke_p,$$

следовательно, $g^{-1} = uk$. Это же равенство имеет место и для матриц g, k, u, где u — матрица оператора u в базисе e_k. Если матрицы k и u не унимодулярны, то

$$\det u \cdot \det k = \det g^{-1} = 1.$$

Поэтому, разделив все элементы матриц u и k на $(\det u)^{\frac{1}{n}}$ и $(\det k)^{\frac{1}{n}}$ соответственно, мы не нарушим равенства $g^{-1} = uk$ и придем уже к унимодулярным матрицам u и k. Из этого равенства следует, что $g = k^{-1}u^{-1}$. Так как $k^{-1} \in K$ и $u^{-1} \in \mathfrak{U}$ то тем самым предложение I доказано.

Если $g = k_1u_1$ и $g = k_2u_2$ — два таких разложения, то $k_1u_1 = k_2u_2$; следовательно, $k_1^{-1}k_2 = u_1u_2^{-1}$. Левая часть этого равенства принадлежит K, а правая — $\mathfrak{U}$, следовательно,

$$k_1^{-1}k_2 = u_1u_2^{-1} \in K \cap \mathfrak{U}.$$

С другой стороны, $K \cap \mathfrak{U} = \Gamma$. Действительно, если $u \in K \cap \mathfrak{U}$, то

$$u^* = u^{-1} \in K \cap K^* = K \cap H = D;$$

следовательно, $u \in D \cap \mathfrak{U} = \Gamma$. Поэтому равенство $g = ku$ определяет матрицу u с точностью до левого множителя $\gamma \in \Gamma$. Это означает, что:

---

* Всюду в этой статье мы пользуемся результатами и обозначениями гл. I в (2).

II. *В каждом правом классе смежности* $\tilde{z}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *по подгруппе* K *содержится один и только один правый класс смежности группы* $\mathfrak{U}$ *по подгруппе* Γ.

Будем обозначать через $\tilde{u}$ правые классы смежности группы $\mathfrak{U}$ по подгруппе Γ, а через $\tilde{\mathfrak{U}}$ — совокупность всех этих классов. В силу предложения II, мы можем отождествить каждый класс $\tilde{z}$ с содержащимся в нем классом $\tilde{u}$ и пространство $\tilde{Z}$ с пространством* $\tilde{U}$. Преобразование $\tilde{z}' = \tilde{z}\bar{g}$ можно тогда рассматривать как преобразование $\tilde{u}' = \tilde{u}\bar{g}$ соответствующих классов $\tilde{u}$.

Результаты этого параграфа остаются верными и тогда, когда K, D и Z — более общие подгруппы, рассмотренные в ([3]), соответствующие разложению $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ (чтобы подчеркнуть это, мы иногда будем писать $K = K_{n_1, \ldots, n_r}$, $D = D_{n_1, \ldots, n_r}$, $Z = Z_{n_1, \ldots, n_r}$. Действительно, так как всегда $K_{1,1,\ldots,1} \subset K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, то предложение I остается, конечно, в силе и для подгруппы $K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Остается только во всех рассуждениях заменить подгруппу Γ более общей: $\Gamma = \Gamma_{n_1, \ldots, n_r} = D_{n_1, \ldots, n_r} \cap \mathfrak{U}$.

§ 2. Интегральные соотношения

Найдем соотношения между интегралами по рассмотренным нами подгруппам. Прежде всего заметим, что в группах $\mathfrak{U}$ и Γ существуют двусторонне инвариантные меры $d\mu(u)$ и $d\mu(\gamma)$ соответственно. Поэтому [см., например, ([5])] в пространстве $\tilde{\mathfrak{U}}$ существует мера $d\mu(\tilde{u})$, инвариантная по отношению к преобразованию $\tilde{u} \to \tilde{u}\bar{u}_0$, причем при надлежащей нормировке этой меры

$$\int f(u)\, d\mu(u) = \int d\mu(\tilde{u}) \int f(\gamma u)\, d\mu(\gamma). \tag{1}$$

Если, в частности, функция $f(u)$ постоянна на каждом классе $\tilde{u}$, т. е. $f(\gamma u) = f(u)$, то эти функции можно рассматривать, как функции от класса $\tilde{u}$ и писать $f(\tilde{u})$. (В дальнейшем такая замена будет делаться без всяких оговорок.) Нормируя $d\mu(\gamma)$ так, что $\int d\mu(\gamma) = 1$, мы получим из (1):

$$\int f(u)\, d\mu(u) = \int f(\tilde{u})\, d\mu(\tilde{u}). \tag{2}$$

Пусть $x(g)$ — суммируемая функция на группе $\mathfrak{G}$; положим

$$f(g) = \int x(kg)\, \beta(kg)\, d\mu_r(k). \tag{3}$$

Тогда

$$f(k_0 g) = \int x(kk_0 g)\, \beta(kk_0 g)\, d\mu_r(k) = \int x(kg)\, \beta(kg)\, d\mu_r(k) = f(g),$$

* В этом переходе от $\tilde{z}$ к $\tilde{u}$ содержится групповой смысл подстановки, рассмотренной в п. 5 § 5 ([1]) для случая $n = 2$.

т. е. функция $f(g)$ постоянна вдоль каждого класса $\widetilde{z}$, и мы можем положить $f(g)=f(\widetilde{z})$ при $g\in\widetilde{z}$. Выбирая в качестве представителя g класса $\widetilde{z}$ элемент $z\in Z$, мы получаем:

$$f(\widetilde{z})=\int x(kz)\,\beta(kz)\,d\mu_r(k)=\int x(kz)\,\beta(k)\,d\mu_r(k)=\int x(kz)\,d\mu_e(k). \quad (4)$$

Отсюда, в силу формулы (3.5) в ([2]),

$$\int x(g)\,d\mu(g)=\int d\mu(z)\int x(kz)\,d\mu_e(k)=\int f(\widetilde{z})\,d\mu(\widetilde{z}), \quad (5)$$

где $d\mu(\widetilde{z})=d\mu(z)$.

Согласно результатам § 1, функцию $f(\widetilde{z})$ можно также рассматривать как функцию от $\widetilde{u}$ и писать $f(\widetilde{u})$; формулу (5) можно тогда переписать в виде

$$\int x(g)\,d\mu(g)=\int f(\widetilde{u})\,\omega(\widetilde{u})\,d\mu(\widetilde{u}), \quad (6)$$

где $\omega(\widetilde{u})$ — якобиан перехода от $d\mu(\widetilde{z})$ к $d\mu(\widetilde{u})$.

Выберем в качестве представителя класса $\widetilde{z}$ унитарную матрицу $u\in\widetilde{z}$, т. е. матрицу из класса $\widetilde{u}\subset\widetilde{z}$. Мы получим тогда из (3):

$$f(\widetilde{u})=\int x(ku)\,\beta(ku)\,d\mu_r(k)=\beta(u)\int x(ku)\,\beta(k)\,d\mu_r(k)=$$

$$=\beta(u)\int x(ku)\,d\mu_e(k). \quad (7)$$

Напомним [см. (1.7) в ([2])], что

$$\beta(k)=|k_{22}|^4\,|k_{33}|^8\cdots|k_{nn}|^{4n-4},$$

следовательно, $\beta(\gamma)=1$. В случае общей подгруппы $K=K_{n_1,\ldots,n_r}$ мы имеем [см. ([3])]:

$$\beta(k)=|\Lambda_1|^{-2n_2-2n_3-\cdots-2n_r}\,|\Lambda_2|^{2n_1-2n_3-\cdots-2n_r}\cdots|\Lambda_r|^{2n_1+2n_2+\cdots+2n_{r-1}},$$

где $\Lambda_p=\det k_{pp}$, $p=1,2,\ldots,r$. При $k=\gamma$, γ_{pp} — унитарные матрицы, $|\Lambda_p|=1$; следовательно, и в этом более общем случае $\beta(\gamma)=1$. Отсюда.

$$\beta(\gamma u)=\beta(\gamma)\,\beta(u)=\beta(u),$$

так что функцию $\beta(u)$ можно рассматривать как функцию от $\widetilde{u}$ и писать $\beta(\widetilde{u})$. Формула (7) перепишется тогда в виде

$$f(\widetilde{u})=\beta(\widetilde{u})\int x(ku)\,d\mu_e(k).$$

Подставляя это выражение в (6), получим:

$$\int x(g)\,d\mu(g)=\int f_1(\widetilde{u})\,\omega_1(\widetilde{u})\,d\mu(\widetilde{u}), \quad (8)$$

где

$$\omega_1(\widetilde{u})=\omega(\widetilde{u})\,\beta(\widetilde{u}),\quad f_1(\widetilde{u})=\int x(ku)\,d\mu_e(k). \quad (9)$$

Для нахождения функции $\omega_1(\widetilde{u})$ заметим, что в силу инвариантности меры $d\mu(g)$,

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int x(gu_0)\,d\mu(g). \tag{10}$$

С другой стороны, если подставить в формулу (9) функцию $x(gu_0)$ вместо $x(g)$, то $f_1(\widetilde{u})$ перейдет в

$$\int x(kuu_0)\,d\mu_e(k) = f_1(\widetilde{u}\widetilde{u}_0),$$

следовательно, интеграл в правой части (8) перейдет в

$$\int f_1(\widetilde{u}\,\widetilde{u}_0)\omega_1(\widetilde{u})\,d\mu(\widetilde{u}) = \int f_1(\widetilde{u})\,\omega_1(\widetilde{u}\,\widetilde{u}_0^{-1})\,d\mu(\widetilde{u})$$

(в силу инвариантности меры $d\mu(\widetilde{u})$). Поэтому равенство (10) принимает вид

$$\int f_1(\widetilde{u})\,\omega_1(\widetilde{u})\,d\mu(\widetilde{u}) = \int f_1(\widetilde{u})\,\omega_1(\widetilde{u}\,\widetilde{u}_0^{-1})\,d\mu(\widetilde{u}),$$

что возможно только тогда, когда $\omega_1(\widetilde{u}) = \omega_1(\widetilde{u}\,\widetilde{u}_0^{-1})$.

В силу произвола $u_0 \in \mathfrak{U}$, отсюда следует, что $\omega_1(\widetilde{u}) = \text{const}$; положим $\omega_1(\widetilde{u}) = c$. Тогда из равенств (8) и (9) последует, что

$$\int x(g)\,d\mu(g) = c\int d\mu(\widetilde{u})\int x(ku)\,d\mu_e(k). \tag{11}$$

В силу (2), это равенство можно переписать в виде:

$$\int x(g)\,d\mu(g) = c\int d\mu(u)\int x(ku)\,d\mu_e(k). \tag{12}$$

Найдем, как преобразуется мера $d\mu(\widetilde{u})$ при преобразовании $\widetilde{u} \to \widetilde{u}\widetilde{g}_0$. Для этого воспользуемся равенством

$$\int x(g)\,d\mu(g) = \int x(gg_0)\,d\mu(g). \tag{13}$$

При переходе от $x(g)$ к $x(gg_0)$ функция $f_1(\widetilde{u})$ в (9) переходит в $\int x(kug_0)\,d\mu_e(k)$. Положим $ug_0 = k_1u_1$; тогда

$$\int x(kug_0)\,d\mu_e(k) = \int x(kk_1u)\,\beta(k)\,d\mu_r(k) =$$

$$= \int x(ku_1)\,\beta(k_1^{-1})\,\beta(k)\,d\mu_r(k) = \beta^{-1}(k_1)\int x(ku_1)\,d\mu_e(k). \tag{14}$$

С другой стороны, если $u \in \widetilde{u}$, то $u_1 \in \widetilde{ug_0}$. Кроме того,

$$\beta(ug_0) = \beta(k_1)\,\beta(u_1) = \beta(k_1)\,\beta(\widetilde{ug_0}).$$

Поэтому равенство (14) принимает вид

$$\int x(kug_0)\,d\mu_e(k) = \frac{\beta(\widetilde{ug_0})}{\beta(ug_0)}\,f_1(\widetilde{ug_0}).$$

Следовательно, в силу (11), равенство (13) может быть записано в форме:

$$\int f_1(\widetilde{u})\, d\mu(\widetilde{u}) = \int f_1(\widetilde{u}\,\overline{g}_0)\, \frac{\beta(\widetilde{u}\,\overline{g}_0)}{\beta(u g_0)}\, d\mu(\widetilde{u}). \tag{15}$$

В силу произвола функции $f_1(\widetilde{u})$, это равенство эквивалентно равенству

$$\frac{d\mu(\widetilde{u}\,\overline{g}_0)}{d\mu(\widetilde{u})} = \frac{\beta(\widetilde{u}\,\overline{g}_0)}{\beta(u g_0)}. \tag{16}$$

§ 3. Основные серии неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$

Основные серии представлений группы $\mathfrak{G}$ были ранее описаны авторами (2) и (3). Здесь дается другое описание этих серий.

Обозначим через $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$ совокупность всех измеримых функций $f(u)$, удовлетворяющих условиям

$$f(\gamma u) = f(u) \tag{1}$$

для почти всех пар (u, γ), $\gamma \in \Gamma = D_{n_1,\ldots,n_r} \cap \mathfrak{U}$ и

$$\int |f(u)|^2\, d\mu(u) < +\infty. \tag{2}$$

Из условия (2) следует, что $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$ можно рассматривать как гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f_1,\ f_2) = \int f_1(u)\, \overline{f_2(u)}\, d\mu(u). \tag{3}$$

Условие (1) означает, что $f(u)$ постоянна на каждом классе $\widetilde{u}$, следовательно, ее можно также рассматривать как фуккцию от $\widetilde{u}$ и писать $f(\widetilde{u})$.

В силу (2) § 2, $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$ превращается тогда в совокупность всех функций $f(\widetilde{u})$, удовлетворяющих условию

$$\int |f(\widetilde{u})|^2\, d\mu(\widetilde{u}) < +\infty,$$

а выражение (3) для скалярного произведения принимает вид

$$(f_1,\ f_2) = \int f_1(\widetilde{u})\, \overline{f_2(\widetilde{u})}\, d\mu(\widetilde{u}).$$

Будем искать представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ в виде

$$U_g f(u) = \alpha(u,\ g) f(u\overline{g}), \quad f \in \mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}, \tag{4}$$

где $\alpha(u,\ g)$ — функция от u и g, удовлетворяющая условию

$$\alpha(\gamma u,\ g) = \alpha(u,\ g),$$

а $u\overline{g}$ обозначает любого представителя класса $\widetilde{u}\,\overline{g}$. В силу условия (1), $f(u\overline{g})$ не зависит от выбора этого представителя. Из равенства $U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g}$ следует, что

$$\alpha(u,\ g_1)\, \alpha(u\overline{g}_1,\ g_2) = \alpha(u,\ g_1 g_2). \tag{6}$$

Положим $\alpha(e,\ g) = \alpha(g)$, где e — единица группы $\mathfrak{G}$. Полагая в (6) $u = e$, получим

$$\alpha(g_1)\, \alpha(e\overline{g}_1,\ g_2) = \alpha(g_1 g_2). \tag{7}$$

Положим здесь $g_1 = u$; класс $\overline{eu}$ содержит представителя u; поэтому из (7) следует, что

$$\alpha(u, g) = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)}. \tag{8}$$

Положим, далее, в (7) $g_1 = k$; так как $\overline{ek}$ есть класс, содержащий e, то мы можем положить $\overline{ek} = e$ и равенство (7) принимает вид

$$\alpha(k)\alpha(g) = \alpha(kg). \tag{9}$$

В частности,

$$\alpha(k_1 k_2) = \alpha(k_1)\alpha(k_2). \tag{10}$$

Формула (4) для представления U_g принимает при этом вид

$$U_g f(u) = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)} f(\overline{ug}). \tag{11}$$

Так как это представление унитарно, то должно быть

$$\int |f(\widetilde{u})|^2 d\mu(\widetilde{u}) = \int \left|\frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)}\right|^2 |f(\widetilde{u}\overline{g})|^2 d\mu(\widetilde{u}).$$

С другой стороны, в силу (15) § 2,

$$\int |f(\widetilde{u})|^2 d\mu(\widetilde{u}) = \int \frac{\beta(\widetilde{u}\overline{g})}{\beta(ug)} |f(\widetilde{u}\overline{g})|^2 d\mu(\widetilde{u}).$$

Сравнивая правые части двух последних равенств, мы получаем, что

$$\left|\frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)}\right|^2 = \frac{\beta(\widetilde{u}\overline{g})}{\beta(ug)}. \tag{12}$$

Пронормируем функцию $\alpha(g)$ так, что $\alpha(e) = 1$; тогда, полагая в (12) $u = e$ и $g = k$, получим, что

$$|\alpha(k)|^2 = \beta^{-1}(k);$$

следовательно,

$$|\alpha(k)| = \beta^{-\frac{1}{2}}(k). \tag{13}$$

Далее, положим в (12) $u = e$ и $g = u_0$; тогда $\widetilde{u}\overline{g} = \widetilde{eu_0} = \widetilde{u}_0$ и равенство (12) дает:

$$|\alpha(u_0)|^2 = \frac{\beta(\widetilde{u}_0)}{\beta(u_0)} = 1.$$

Таким образом,

$$|\alpha(u)| = 1. \tag{14}$$

Из соотношения (10) следует, что* $\alpha(\zeta) = 1$. Поэтому, при $k = \delta\zeta$

$$\alpha(k) = \alpha(\delta\zeta) = \alpha(\delta). \tag{15}$$

* Для простоты приведем доказательство этого утверждения в случае $r = n$. $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$. В более общем случае рассуждения совершенно аналогичны; Пусть сначала $n = 2$. Положим

$$\zeta = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} \xi^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \xi^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad \zeta_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Положим $\chi(\delta)=\beta^{\frac{1}{2}}(\delta)\alpha(\delta)$. В силу (13), $|\chi(\delta)|=1$, и, кроме того, $\chi(\delta_1\delta_2)=\chi(\delta_1)\chi(\delta_2)$. Следовательно, $\chi(\delta)$ — характер группы D. Поэтому в случае $r=n$; $n_1=n_2=\cdots=n_r=1$ он имеет вид

$$\chi(\delta)=|\lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\lambda_2^{-m_2}|\lambda_3|^{m_3+i\rho_3}\lambda_3^{-m_3}\dots|\lambda_n|^{m_n+i\rho_n}\lambda_n^{-m_n} \tag{16}$$

($m_2, m_3, \dots, m_n$ — целые числа $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ — действительные числа). Следовательно,

$$\alpha(\delta)=\chi(\delta)\beta^{-\frac{1}{2}}(\delta)=$$
$$=|\lambda_2|^{m_2+i\rho_2-2}\lambda_2^{-m_2}|\lambda_3|^{m_3+i\rho_3-4}\lambda_3^{-m_3}\dots|\lambda_n|^{m_n+i\rho_n-2n+2}\lambda_n^{-m_n}. \tag{17}$$

В общем случае произвольных $n_1, \dots, n_r$ мы имеем

$$\chi(\delta)=|\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2}\Lambda_2^{-m_2}|\Lambda_3|^{m_3+i\rho_3}\Lambda_3^{-m_3}\dots|\Lambda_r|^{m_r+i\rho_r}\Lambda_r^{-m_r}, \tag{16'}$$

следовательно,

$$\alpha(\delta)=|\Lambda_2|^{m_2+i\rho_2-(n_1+n_2)}\Lambda_2^{-m_2}|\Lambda_3|^{m_3+i\rho_3-(n_1+2n_2+n_3)}\Lambda_3^{-m_3}\dots$$
$$\dots|\Lambda_r|^{m_r+i\rho_r-(n_1+2n_2+\dots+2n_{r-1}+n_r)}\Lambda_r^{-m_r}. \tag{17'}$$

Совокупность всех представлений U_g, соответствующих всевозможным характерам $\chi(\delta)$, называется *основной серией* представлений группы $\mathfrak{G}$. Если $r=n$, $n_1=n_2=\cdots=n_r=1$, то основная серия называется *невырожденной*; во всех остальных случаях она называется *вырожденной*.

Отметим, что при данном представлении U_g группы $\mathfrak{G}$ имеется еще произвол в выборе функции $\alpha(u)$. Действительно, положим

$$f_1(\tilde{u})=\omega(\tilde{u})f(\tilde{u}),$$

где $|\omega(\tilde{u})|=1$. Переход от $f(\tilde{u})$ к $f_1(\tilde{u})$ есть унитарное отображение $\mathfrak{H}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ на самого себя. При этом отображении оператор U_g принимает вид

Тогда $\delta^{-1}\zeta\delta=\zeta_0$; следовательно,

$$\alpha(\zeta_0)=\alpha^{-1}(\delta)\alpha(\zeta)\alpha(\delta)=\alpha(\zeta), \quad \alpha(\zeta)=\text{const}.$$

Положим $\alpha(\zeta)=c$. Тогда $c=\alpha(\zeta^2)=c^2$. Отсюда $c=0$ или $c=1$. В силу (14), первая возможность отпадает; следовательно, $\alpha(\zeta)=c=1$ и наше утверждение доказано для $n=2$. Пусть оно уже доказано для групп порядка $n-1$. Докажем его для групп n-го порядка. Положим

$$\zeta'=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&\zeta_{23}&\dots&\zeta_{2n}\\0&0&1&\dots&\zeta_{3n}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix},\quad \zeta''=\begin{pmatrix}1&\zeta_{12}&\zeta_{13}&\dots&\zeta_{1n}\\0&1&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{pmatrix},\quad \delta=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&\dots&0\\0&\lambda_2&0&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&\lambda_n\end{pmatrix},$$

где $\frac{\lambda_p}{\lambda_1}=\zeta_{1;p}$, $p=1,\dots,n$.

Всякую матрицу ζ можно представить в виде: $\zeta=\zeta'\zeta''$. Следовательно, $\alpha(\zeta)=\alpha(\zeta')\alpha(\zeta'')$. Но $\alpha(\zeta')$ есть значение функции α на группе Z $(n-1)$-го порядка. По нашему индуктивному предположению $\alpha(\zeta')=1$. Рассмотрим поэтому $\alpha(\zeta'')$. Легко проверить, что $\delta\zeta''\delta^{-1}=\mathring{\zeta}''$, где все $\mathring{\zeta}''_{1,p}=1$. Отсюда, как и выше, заключаем, что $\alpha(\zeta'')=1$.

$$U_g f_1(\widetilde{u}) = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)} \frac{\omega(\widetilde{u})}{\omega(\widetilde{u}\,\overline{g})} f_1(\widetilde{u}\,\overline{g}),$$

или, заменяя $\omega(\widetilde{u})$ функцией $\omega(u)$, постоянной на каждом классе $\widetilde{u}$,

$$U_g f_1(u) = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)} \frac{\omega(u)}{\omega(u\overline{g})} f_1(u\overline{g}).$$

Таким образом, новая функция $\alpha_1(u, g)$ имеет вид

$$\alpha_1(u, g) = \frac{\alpha(ug)\,\omega(u)}{\alpha(u)\,\omega(u\overline{g})}.$$

Отсюда

$$\alpha_1(u) = \alpha(e, u) = \frac{\alpha(u)}{\omega(u)} = \frac{\alpha(u)}{\omega(\widetilde{u})}.$$

Другими словами, *функция $\alpha(u)$ определена данным представлением с точностью до множителя $\omega(u)$, по модулю равного единице и постоянного на каждом классе $\widetilde{u}$.*

Для нахождения $\alpha(g)$ остается указать правило вычисления элементов λ_p матрицы δ в разложении $g = ku = \zeta\delta u$. Мы имеем:

$$gg^* = \zeta\delta uu^*\delta^*\zeta^* = \zeta\delta\delta^*\zeta^*.$$

Так как $\zeta^* \in Z$, то, согласно формуле (2.13) в ([2]), отсюда следует, что в случае $r = n$, $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$

$$|\lambda_p|^2 = \frac{\Delta_p}{\Delta_{p+1}}, \quad p = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

где Δ_p — минор матрицы gg^*, составленный из ее последних $n - p + 1$ строк и столбцов, и $\Delta_{n+1} = 1$.

Аналогичные формулы имеют место и в случае произвольных $n_1, n_2, \ldots, n_r$ [см. ([3]), формула (5)].

Отметим, что в силу равенства

$$g = \zeta\delta u = \zeta\delta\gamma\cdot\gamma^{-1}u,$$

числа λ_p вообще определены только с точностью до своих аргументов.

§ 4. Сферические функции

Поставим следующий вопрос:

При каких условиях в пространстве представления $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$ существует вектор $f_0(\widetilde{u})$, инвариантный по отношению ко всем операторам U_u, соответствующим элементам u унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$?

Согласно формуле (11) § 3 для представления, искомый вектор $f_0(u)$ должен удовлетворять условию

$$\frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u)} f_0(uu_0) = f_0(u)$$

при каждом $u_0 \in \mathfrak{U}$ для почти всех $u \in \mathfrak{U}$. Отсюда следует, что

$$\alpha(uu_0)\,f_0(uu_0) = \alpha(u)\,f_0(u)$$

для почти всех пар (u, u_0), а поэтому и для почти всех пар (uu_0, u_0).

Это означает, что

$$\alpha(u) f_0(u) = \text{const}$$

для почти всех $u \in \mathfrak{G}$. Так как $f_0(\gamma u) = f_0(u)$, то это возможно тогда и только тогда, когда также $\alpha(\gamma u) = \alpha(u)$, т. е. когда $\alpha(\gamma) = 1$. С другой стороны, $\beta(\gamma) = 1$; следовательно, это эквивалентно условию $\chi(\gamma) = 1$. Из формул (16) и (16′) § 3 следует, что условие $\chi(\gamma) = 1$ эквивалентно равенствам $m_2 = m_3 = \ldots = m_r = 0$. При выполнении этого условия $f_0(u) = C\alpha^{-1}(u)$, т. е. с точностью до постоянного множителя существует только один такой вектор. Таким образом, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы в пространстве представления существовал вектор, инвариантный по отношению ко всем операторам представления, соответствующим унитарной подгруппе, необходимо и достаточно, чтобы* $\chi(\gamma) = 1$, *т. е., чтобы* $m_2 = m_3 = \ldots = m_r = 0$.

При выполнении этого условия существует с точностью до постоянного множителя только один такой вектор.

Так как при $\alpha(\gamma) = 1$ функция $\alpha(u)$ постоянна на каждом классе $\widetilde{u}$, то мы можем положить $\alpha(u) = \alpha(\widetilde{u})$. С другой стороны, функция $\alpha(u)$ определена данным представлением с точностью до множителя $\omega(\widetilde{u})$, по модулю равного единице. Полагая $\omega(\widetilde{u}) = \alpha(\widetilde{u})$, мы можем, таким образом, добиться того, что $\alpha(\widetilde{u}) \equiv 1$. Тогда $f_0(\widetilde{u}) = C$. Нормируя меру $d\mu(\widetilde{u})$ так, что $\int d\mu(\widetilde{u}) = 1$ и полагая $f_0(\widetilde{u}) \equiv 1$, мы получим нормированный вектор f_0. Положим для этого вектора

$$\varphi(g) = (U_g f_0, f_0); \tag{1}$$

функция $\varphi(g)$ называется *сферической функцией, соответствующей данному представлению* U_g. Она является элементарной положительно определенной функцией и удовлетворяет условию

$$\varphi(ug) = \varphi(gu) = \varphi(g).$$

Первое утверждение следует из того, что U_g — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ [см. ([5])], второе же — из того, что, по определению вектора f_0, $U_u f_0 = f_0$. Поэтому

$$\varphi(gu) = (U_g U_u f_0, f_0) = (U_g f_0, f_0) = \varphi(g),$$
$$\varphi(ug) = (U_u U_g f_0, f_0) = (U_g f_0, U_u^{-1} f_0) = (U_g f_0, f_0) = \varphi(g).$$

Всякую матрицу $g \in \mathfrak{G}$ можно представить в виде $g = au$, где a — положительно определенная эрмитова, а u — унитарная матрица. Далее, матрицу a можно представить в виде $a = u_1 \delta u_1^{-1}$, где u_1 — унитарная, а δ — диагональная матрица с положительными диагональными элементами. Таким образом, $g = u_1 \delta u_2$. Отсюда $\varphi(g) = \varphi(\delta)$, следовательно, достаточно вычислить $\varphi(\delta)$. Отметим, что $\varphi(\delta)$ есть симметрическая функция от диагональных элементов λ_p, $p = 1, \ldots, n$, матрицы δ, ибо всякая подстановка этих элементов достигается унитарным преобразованием вида $\delta' = u^{-1}\delta u$.

Так как $f_0(u) \equiv 1$, то, согласно формуле (17) § 3, $U_\delta f_0 = \alpha(u\delta)$; следовательно,

$$\varphi(\delta) = (U_\delta f_0, f_0) = \int \alpha(u\delta)\, d\mu(u). \tag{2}$$

С другой стороны, при $r = n$, $n_1 = \ldots = n_r = 1$ формула (17) § 3 при $m_2 = m_3 = \ldots = m_n = 0$ и формула (18) § 3 дают:

$$\alpha(u\delta) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3}\right)^{i\frac{\rho_2}{2}-1} \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_4}\right)^{i\frac{\rho_3}{2}-2} \ldots \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\right)^{i\frac{\rho_{n-1}}{2}-n+2} \Delta_n^{i\frac{\rho_n}{2}-n+1} =$$

$$= \Delta_2^{i\frac{\rho_2}{2}-1} \Delta_3^{i\frac{\rho_3-\rho_2}{2}-1} \ldots \Delta_n^{i\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{2}-1}, \tag{3}$$

где Δ_p, $p = 2, \ldots, n$ — минор матрицы $a = (u\delta)(u\delta)^* = u\delta^2 u^*$, составленный из ее последних $n-p+1$ строк и столбцов. Матрицы a, u, δ^2 можно рассматривать как матрицы операторов a, u, δ^2 в n-мерном пространстве $\mathfrak{R}_n$ по отношению к некоторому фиксированному ортонормальному базису $f_1, f_2, \ldots, f_n$ и писать

$$a_{pq} = (af_q, f_p) = (u\delta^2 u^* f_q, f_p) = (\delta^2 u^* f_q, u^* f_p).$$

Положим

$$u^* f_n = e_1,\ u^* f_{n-1} = e_2, \ldots, u^* f_1 = e_n, \tag{4}$$

$$i\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{2} - 1 = \sigma_1, \quad i\frac{\rho_{n-1}-\rho_{n-2}}{2} - 1 = \sigma_2, \ldots, \ i\frac{\rho_2}{2} - 1 = \sigma_{n-1};\ \delta^2 = a. \tag{5}$$

Тогда векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют ортонормальный базис в $\mathfrak{R}_n$ и когда u пробегает все элементы группы $\mathfrak{U}$, то $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ пробегает все такие базисы с точностью до множителя в e_1, по модулю равного единице. При этом

$$\Delta_n = (ae_1, e_1), \quad \Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, \Delta_2 = \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) & \ldots (ae_1, e_{n-1}) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) & \ldots (ae_2, e_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \ldots (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix},$$

так что, в силу (3), формула (2) для $\varphi(\delta)$ перепишется в виде:

$$\varphi(\delta) = \int (ae_1, e_1)^{\sigma_1} \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) \end{vmatrix}^{\sigma_2} \ldots$$

$$\ldots \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_1) & \ldots (ae_1, e_{n-1}) \\ (ae_2, e_1) & (ae_2, e_2) & \ldots (ae_2, e_{n-1}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \ldots (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix}^{\sigma_{n-1}} d\mu(e), \tag{6}$$

где $d\mu(e)$ — мера на множестве всех перечисленных выше ортонормальных систем $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, инвариантная при их унитарных преобразованиях и пронормированная так, что $\int d\mu(e) = 1$. Наша задача сводится к вычислению этого интеграла. Вычисление мы будем проводить индуктивно. Пусть сначала $n = 2$. Тогда

$$(ae_1, e_1) = b_{22} = \mu_1 |u_{21}|^2 + \mu_2 |u_{22}|^2, \quad |u_{21}|^2 + |u_{22}|^2 = 1,$$

где $\mu_1 = \lambda_1^2$, $\mu_2 = \lambda_2^2$ — собственные значения оператора a. Далее, выберем в качестве параметров в группе $\mathfrak{U}$

$$t = |u_{22}|^2, \quad \theta_1 = \arg u_{21}, \quad \theta_2 = \arg u_{22}.$$

Тогда инвариантная мера в $\mathfrak{U}$ задается формулой: *

$$d\mu(u) = \frac{1}{(2\pi)^2} dt d\theta_1 d\theta_2$$

(6) принимает вид;

$$\varphi(\delta) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^1 [\mu_1(1-t) + \mu_2 t]^{\sigma_1} dt \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \frac{1}{(\sigma_1+1)(\mu_2-\mu_1)}(\mu_2^{\sigma_1+1} - \mu_1^{\sigma_1+1}),$$

т. е.

$$\varphi(\delta) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1^{\sigma_1+1} & \mu_2^{\sigma_1+1} \end{vmatrix}}{(\sigma_1+1)(\mu_2-\mu_1)}. \tag{7}$$

Предположим теперь, что для группы порядка $n-1$ уже доказана формула

$$\varphi(\delta) = [(n-2)!\,(n-3)!\ldots 1!]\cdot$$

$$\cdot\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1^{\sigma_{n-2}+1} & \mu_2^{\sigma_{n-2}+1} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_{n-2}+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_1^{\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-3} & \mu_2^{\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-3} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-3} \\ \mu_1^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \mu_2^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \ldots & \mu_{n-1}^{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} \end{vmatrix}}{\prod\limits_{l=1}^{n-2}\prod\limits_{k=1}^{l}(\sigma_k+\cdots+\sigma_l+l-k+1)\prod\limits_{n-1\geqslant p>q\geqslant 1}(\mu_p-\mu_q)}, \tag{8}$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ — собственные значения оператора a; докажем, что эта формула будет также верна и для группы порядка n. Так как при $n=2$ эта формула доказана, то она тем самым будет доказана для всякого n.

Для доказательства разобьем интегрирование в (6) на интеграл по всем системам $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ при фиксированном e_n, а затем — на интеграл по всем e_n. Но при фиксированном e_n различные системы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ получаются друг из друга унитарным преобразованием в $\mathfrak{R}_{n-1}$, которое не изменяет последнего определителя в формуле (6). Следовательно, эту формулу можно переписать в виде

---

* Действительно выражение $\frac{1}{2}\,dt\,d\theta_1\,d\theta_2$ представляет собой элемент поверхности сферы, описанной концом единичного вектора (u_{21}, u_{22}); следовательно, оно инвариантно при унитарных преобразованиях, представляющих вращение этой сферы.

$$\varphi(\delta) = \int \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & (ae_1, e_2) & \ldots (ae_1, e_{n-1}) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ (ae_{n-1}, e_1) & (ae_{n-1}, e_2) & \ldots (ae_{n-1}, e_{n-1}) \end{vmatrix}^{\sigma_{n-1}} d\mu(e_n) \cdot$$

$$\cdot \int (ae_1, e_1)^{\sigma_1} \ldots \begin{vmatrix} (ae_1, e_1) & \ldots (ae_1, e_{n-2}) \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ (ae_{n-2}, e_1) & \ldots (ae_{n-2}, e_{n-2}) \end{vmatrix}^{\sigma_{n-2}} d\mu(e_1, \ldots, e_{n-1}), \qquad (9)$$

где $d\mu(e_n)$ — элемент поверхности сферы, описанной концом единичного вектора e_n в пространстве $\mathfrak{R}_n$, пронормированный так, что $\int d\mu(e_n) = 1$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство всех векторов в $\mathfrak{R}_n$, ортогональных к e_n, а P — оператор проектирования на это подпространство. Внутренний интеграл в (9) есть функция φ, составленная для оператора PaP в $(n-1)$-мерном пространстве $\mathfrak{M}$. Следовательно, согласно нашему индуктивному предположению, этот интеграл выражается по формуле (8), где $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ — собственные значения оператора PaP. Найдем уравнение для этих собственных значений.

Если μ — одно из этих собственных значений, а f — соответствующий собственный вектор, то должно быть $Paf = \mu f$, т. е.

$$af = \mu f + \xi e_n. \qquad (10)$$

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — базис во всем пространстве $\mathfrak{R}_n$, в котором оператор a диагонален, и пусть

$$af_k = \widetilde{\lambda}_k f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $u_1, u_2, \ldots, u_n$ проекции векторов f и e_n в этом базисе. Тогда, проектируя равенство (10) на вектор f_k, получим

$$\widetilde{\lambda}_k \xi_k = \mu \xi_k + \xi u_k.$$

Отсюда

$$\xi_k = \xi \frac{u_k}{\widetilde{\lambda}_k - \mu}.$$

С другой стороны, $(f, e_n) = 0$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \overline{u}_k = 0.$$

Подставляя вместо ξ_k его выражение, получим искомое уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|^2}{\widetilde{\lambda}_k - \mu} = 0 \qquad (11)$$

для определения собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$.

Положим $t_k = |u_k|^2$, $\theta_k = \arg u_k$. Тогда в интеграле (9)

$$d\mu(e_n) = \frac{(n-1)!}{(2\pi)^n} dt_1 \, dt_2 \ldots dt_{n-1} \, d\theta_1 \, d\theta_2 \ldots d\theta_n.$$

Перейдем от переменных интегрирования $t_1, \ldots, t_{n-1}$ к переменным $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$. Для этого нужно найти область изменения этих по-

следних переменных и вычислить якобиан перехода от $t_1, \ldots, t_{n-1}$ к $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$.

Расположим числа $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_n$ в порядке их возрастания; пусть

$$\widetilde{\lambda}_1 < \widetilde{\lambda}_2 < \ldots < \widetilde{\lambda}_n.$$

В силу (11), числа $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ суть корни уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{\widetilde{\lambda}_k - \mu} = 0, \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \quad t_k > 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\lambda} < \mu_1 < \widetilde{\lambda}_2 < \mu_2 < \widetilde{\lambda}_3 < \ldots < \widetilde{\lambda}_{n-1} < \mu_{n-1} < \widetilde{\lambda}_n; \tag{13}$$

эти неравенства определяют границы для переменных μ_k. Докажем, что, обратно, по заданным числам μ_k, удовлетворяющим неравенствам (13), единственным образом определяются числа, удовлетворяющие условиям (12); тем самым будет доказано, что каждое из переменных μ_k полностью заполняет свой интервал $(\lambda_k, \lambda_{k+1})$. Числа t_k определяются из уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t}{\widetilde{\lambda}_k - \mu_i} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} t_k = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Положим $\nu_i = \frac{1}{\mu_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\nu_n = 0$; тогда уравнения (14) перепишутся в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k}{1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k} = \begin{cases} 0, & \text{при } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 1, & \text{при } i = n. \end{cases} \tag{15}$$

Согласно лемме Коши [см., например, ([6]), стр. 276], для определителя этой системы имеем

$$\det \left\| \frac{1}{1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k} \right\|_{i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n} = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant k < i \leqslant n} (\nu_i - \nu_k) \prod\limits_{1 \leqslant k < i \leqslant n} (\widetilde{\lambda}_i - \widetilde{\lambda}_k)}{\prod\limits_{i,k=1}^{n} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k)}. \tag{16}$$

Отсюда

$$t_p = (-1)^{n+p} \det \left\| \frac{1}{1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k} \right\|_{\substack{i=1,\, 2,\, \ldots,\, n-1 \\ k=1,\, \ldots,\, p-1,\, p+1,\, \ldots,\, n}} : \det \left\| \frac{1}{1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k} \right\|_{i,\, k=1,\, 2,\, \ldots,\, n} =$$

$$= (-1)^{n+p} \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i_2 < i_1 \leqslant n-1} (\nu_{i_1} - \nu_{i_2}) \prod\limits_{\substack{1 \leqslant k_2 < k_1 \leqslant n \\ k_1,\, k_2 \neq p}} (\widetilde{\lambda}_{k_1} - \widetilde{\lambda}_{k_2})}{\prod\limits_{i=1}^{n-1} \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k)} :$$

$$: \frac{\prod\limits_{1 \leqslant i < i_1 \leqslant n} (\nu_{i_1} - \nu_{i_2}) \prod\limits_{1 \leqslant k_2 < k_1 \leqslant n} (\widetilde{\lambda}_{k_1} - \widetilde{\lambda}_{k_2})}{\prod\limits_{i,k=1}^{n} (1 - \nu_i \widetilde{\lambda}_k)} =$$

$$= (-1)^{n+p} \frac{\prod_{k=1}^{n} (1-\nu_n\tilde{\lambda}_k) \prod_{i=1}^{n} (1-\nu_i\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{k=1}^{n-1} (\nu_n-\nu_k) \prod_{k=1}^{p-1} (\tilde{\lambda}_p-\tilde{\lambda}_k) \prod_{k=p+1}^{n} (\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_p)}.$$

Так как, по условию, $\nu_n = 0$, то это последнее равенство принимает вид

$$t_p = (-1)^{p+1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1-\nu_i\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{k=1}^{n-1} \nu_k \prod_{k=1}^{p-1} (\tilde{\lambda}_p-\tilde{\lambda}_k) \prod_{k=p+1}^{n} (\lambda_k-\lambda_p)} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (1-\nu_i\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{k=1}^{n-1} \nu_k \prod_{k\neq p} (\tilde{\lambda}_k-\tilde{\lambda}_p)},$$

или, так как $\nu_k = \frac{1}{\mu_k}$, $k = 1, \ldots, n-1$,

$$t_p = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (\mu_i-\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{i\neq p} (\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_p)}. \tag{17}$$

Из неравенств (13) следует, что знак числителя и знаменателя дроби (17) совпадает со знаком $(-1)^{p-1}$; следовательно, эта дробь >0. Таким образом, полученные числа t_p удовлетворяют всем поставленным требованиям и наше утверждение доказано.

Найдем теперь якобиан $\frac{D(t_1, \ldots, t_{n-1})}{D(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})}$. Из формулы (17) имеем

$$\frac{\partial t_p}{\partial \mu_i} = \frac{\prod_{j=1,\, j\neq i}^{n-1} (\mu_j-\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{j\neq p} (\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_p)} = \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (\mu_j-\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{i\neq p} (\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_p)} \cdot \frac{1}{\mu_i-\tilde{\lambda}_p};$$

следовательно,

$$\frac{D(t_1, \ldots, t_{n-1})}{D(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})} = \frac{\prod_{j,\, p=1}^{n-1} (\mu_j-\tilde{\lambda}_p)}{\prod_{\substack{i,\, p=1 \\ i\neq p}}^{n-1} (\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_p)} \cdot \det \left\| \frac{1}{\mu_i-\tilde{\lambda}_p} \right\|_{i,\, p=1,\ldots,\, n-1} =$$

$$= \prod_{1\leqslant k<i\leqslant n-1} (\mu_i-\mu_k) : \prod_{1\leqslant i<p\leqslant n} (\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_p).$$

В силу неравенста (13), отсюда следует, что модуль этого определителя равен

$$\prod_{1\leqslant k<i\leqslant n-1} (\mu_i-\mu_k) : \prod_{1\leqslant p<i\leqslant n} (\tilde{\lambda}_i-\tilde{\lambda}_p).$$

Наконец, заметим, что определитель $(n-1)$-го порядка перед $d\mu(e_n)$ в (9), будучи определителем матрицы оператора PaP в пространстве $\mathfrak{M}$,

равен произведению $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$ всех его собственных значений. Таким образом, в силу индуктивного предположения (8), мы получаем, что

$$\varphi(\delta) = \frac{(n-1)!}{\prod\limits_{1 \leqslant i < p \leqslant n} (\tilde{\lambda}_p - \tilde{\lambda}_i) \prod\limits_{l=1}^{n-2} \prod\limits_{k=1}^{l} (\sigma_k + \cdots + \sigma_l + l - k + 1)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\tilde{\lambda}_{n-1}}^{\tilde{\lambda}_n} \int\limits_{\tilde{\lambda}_{n-2}}^{\tilde{\lambda}_{n-1}} \cdots \int\limits_{\tilde{\lambda}_1}^{\tilde{\lambda}_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \mu_1^{\sigma_{n-2}+1} & \mu_2^{\sigma_{n-2}+1} & \ldots \mu_{n-1}^{\sigma_{n-2}+1} \\ \mu_1^{\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}+2} & \mu_2^{\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}+2} & \ldots \mu_{n-1}^{\sigma_{n-3}+\sigma_{n-2}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mu_1^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \mu_2^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} & \ldots \mu_{n-1}^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-2}+n-2} \end{vmatrix} \cdot$$

$$\cdot \mu_1^{\sigma_{n-1}} \mu_2^{\sigma_{n-1}} \ldots \mu_{n-1}^{\sigma_{n-1}} d\mu_1 \, d\mu_2 \ldots d\mu_{n-1}. \tag{19}$$

Внося множители $\mu_1^{\sigma_{n-1}+1}$, $\mu_2^{\sigma_{n-1}+1}$, ... соответственно в первый, второй и т. д. столбцы этого определителя и производя интегрирование, получим, что интеграл в (19) равен

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\sigma_k + \cdots + \sigma_{n-1} + n - k)} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-1}+1} - \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-1}+1} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_{n-1}+1} - \tilde{\lambda}_{n-1}^{\sigma_{n-1}+1} \\ \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} - \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} - \tilde{\lambda}_{n-1}^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} \\ \ldots & \ldots \\ \tilde{\lambda}_2^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} - \tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} & \ldots \lambda_n^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} - \tilde{\lambda}_{n-1}^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (\sigma_k + \cdots + \sigma_{n-1} + n - k)} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-1}+1} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-1}+1} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_{n-1}+1} \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} & \ldots \tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} \end{vmatrix}.$$

Подставляя это выражение в (19), мы получим, что

$$\varphi(\delta) = \frac{(n-1)!\,(n-2)! \ldots 1!}{\prod\limits_{1 \leqslant i < p \leqslant n} (\tilde{\lambda}_p - \tilde{\lambda}_i) \prod\limits_{l=1}^{n-1} \prod\limits_{k=1}^{l} (\sigma_k + \cdots + \sigma_l + l - k + 1)} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-1}+1} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-1}+1} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_{n-1}+1} \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_{n-2}+\sigma_{n-1}+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tilde{\lambda}_1^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} & \tilde{\lambda}_2^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} & \ldots \tilde{\lambda}_n^{\sigma_1+\cdots+\sigma_{n-1}+n-1} \end{vmatrix}, \tag{20}$$

а это выражение получается из формулы (8), если туда подставить n вместо $n-1$. Тем самым формула (20) доказана для всякого n.

Подставим в эту формулу вместо $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ их выражения из (5), а вместо $\widetilde{\lambda}_i$ их выражения $\widetilde{\lambda}_i = \lambda_i^2$ через диагональные элементы λ_i матрицы δ. Мы придем тогда к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 2. *Если U_g — неприводимое представление основной невырожденной серии группы $\mathfrak{G}$, отвечающее характеру*

$$\chi(\delta) = |\lambda_2|^{i\rho_2} |\lambda_3|^{i\rho_3} \ldots |\lambda_n|^{i\rho_n},$$

то соответствующая сферическая функция определяется формулой

$$\varphi(\delta) = \left(\frac{2}{i}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{1!\,2!\ldots(n-1)!}{\prod\limits_{1 \leq p < q \leq n} (\rho_q - \rho_p)\,(\lambda_q^2 - \lambda_p^2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1^{i\rho_2} & \lambda_2^{i\rho_2} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_2} \\ \lambda_1^{i\rho_3} & \lambda_2^{i\rho_3} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_3} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \lambda_1^{i\rho_n} & \lambda_2^{i\rho_n} & \ldots & \lambda_n^{i\rho_n} \end{vmatrix}. \quad (21)$$

$$(\rho_1 = 0)$$

Отметим, что эта же формула при подстановке соответствующих значений чисел ρ_p остается верной и для представлений дополнительных и вырожденных серий (определение этих серий см. в ([3])). Чтобы избежать новых вычислений, мы приведем в другом месте доказательство этого утверждения, основанное на рассмотрении максимальных идеалов некоторого коммутативного кольца. (Для случая $n = 2$ это доказательство приведено в ([4])).

§ 5. Разложение по представлениям унитарной подгруппы

Пусть

$$U_g f(u) = \frac{\alpha(ug)}{\alpha(u)} f(\overline{ug}) \quad (1)$$

— представление, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Если элемент g пробегает подгруппу $\mathfrak{U}$ группы $\mathfrak{G}$, то мы получаем представление U_u группы $\mathfrak{U}$. Следовательно, его можно разложить на неприводимые представления группы $\mathfrak{U}$, каждое из которых конечномерно в силу компактности этой группы.

Выясним, *какие неприводимые представления группы* $\mathfrak{U}$ *и с какой кратностью содержатся в представлении* U_u?

Частный случай для единичного представления группы $\mathfrak{U}$ был рассмотрен в теореме 1 § 3.

Итак, пусть $u \to c(u)$ — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{U}$ степени m (так что $c(u) = \| c_{pq}(u) \|_{p,\, q=1, \ldots, m}$ — конечная унитарная матрица) и пусть это представление содержится в нашем представ-

лении U_u. Это означает, что в пространстве $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$ представления U_u существует инвариантное подпространство $\mathfrak{M}$ размерности m с базисом $f_1(u), \ldots, f_m(u)$ таким, что всякий оператор U_{u_0}, $u_0 \in \mathfrak{U}$, рассматриваемый как оператор в $\mathfrak{M}$, имеет в этом базисе матрицу $c(u_0)$. В силу (1), последнее утверждение эквивалентно равенствам

$$\frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u)} f_q(uu_0) = \sum_{p=1}^{m} c_{pq}(u_0) f_p(u), \quad q = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Будем рассматривать систему $\{f_1(u), \ldots, f_m(u)\}$ как вектор-функцию $f(u)$ со значениями из m-мерного пространства. Тогда условия (2) перепишутся в виде

$$\frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u)} f(uu_0) = c'(u_0) f(u), \tag{3}$$

где $c'(u)$ — транспонированная матрица.

Это равенство имеет место для почти всех пар (u, u_0), следовательно, при почти каждом u для почти всех u_0. Фиксируя одно из таких значений u, мы получим, что для почти всех u_0

$$f(uu_0) = \frac{\alpha(u)}{\alpha(uu_0)} c'(u_0) f(u). \tag{4}$$

Так как первая часть этого равенства есть непрерывная функция от u_0 (напомним, что $|\alpha(u)| = 1$), то изменением функции $f(u)$ на множестве меры нуль можно добиться того, чтобы функция $f(u)$ была непрерывной.

Положим в (3) $u = e$ и $u_0 = \gamma$; мы получим

$$\alpha(\gamma) f(\gamma) = c'(\gamma) f(e). \tag{5}$$

Так как функция $f(u)$ удовлетворяет условию $f(\gamma u) = f(u)$, то $f(\gamma) = f(e)$; далее, $\beta(\gamma) = 1$. Следовательно, $\alpha(\gamma) = \chi(\gamma)$. Поэтому равенство (5) принимает вид:

$$c'(\gamma) f(e) = \chi(\gamma) f(e).$$

Будем обозначать через $\overline{f(u)}$ вектор с компонентами $\{\overline{f_1(u)}, \ldots, \overline{f_m(u)}\}$, комплексно сопряженными компонентам вектора $f(u)$. Переходя в (6) к комплексно сопряженным числам, получим, что

$$\overline{c'(\gamma)}\, \overline{f(e)} = \overline{\chi(\gamma)} \cdot \overline{f(e)},$$

т. е.

$$c^*(\gamma) \overline{f(e)} = \overline{\chi(\gamma)}\, \overline{f(e)}.$$

Применяя к обеим частям этого равенства матрицу $c(\gamma)$, мы получим, что

$$\overline{f(e)} = \overline{\chi(\gamma)}\, c(\gamma) \overline{f(e)};$$

следовательно,

$$c(\gamma) \overline{f(e)} = \chi(\gamma) \overline{f(e)}, \tag{6}$$

причем $\overline{f(e)} \neq 0$. Действительно, полагая в (3) $u_0 = u^{-1}$, находим, что

$$c'(u^{-1}) f(u) = \frac{1}{\alpha(u)} f(e),$$

т. е.

$$f(u) = \frac{1}{\alpha(u)} c'(u) f(e).$$

Если поэтому $f(e) = 0$, то также $f(u) \equiv 0$, что невозможно.

Вектор $f_0 \neq 0$ из пространства представления $c(u)$ называется *весовым вектором* этого представления, если $c(\gamma) f_0 = \lambda(\gamma) f_0$ для всех $\gamma \in \Gamma_{1, 1, \ldots, 1}$. Наши рассуждения показывают, что *вектор* $\overline{f(e)}$ *есть весовой вектор представления* $c(u)$ с весом $\chi(\gamma)$.

Обратно, пусть в пространстве представления $c(u)$ существует весовой вектор f_0 с весом $\chi(\gamma)$. Отсюда следует, что

$$c'(\gamma) \overline{f}_0 = \chi(\gamma) \overline{f}_0, \quad \gamma \in \Gamma_{1, 1, \ldots, 1}. \tag{8}$$

Положим

$$f(u) = \frac{1}{\alpha(u)} c'(u) \overline{f}_0. \tag{9}$$

Функция $f(u)$ непрерывна и постоянна на каждом классе $\widetilde{u}$. Действительно,

$$f(\gamma u) = \frac{1}{\alpha(\gamma u)} c'(\gamma u) \overline{f}_0 = \frac{1}{\alpha(\gamma)\alpha(u)} c'(u) c'(\gamma) \overline{f}_0 =$$

$$= \frac{1}{\chi(\gamma)\alpha(u)} c'(u) [\chi(\gamma) \overline{f}_0] = \frac{1}{\alpha(u)} c'(u) \overline{f}_0 = f(u).$$

Далее,

$$c'(u_0) f(u) = \frac{1}{\alpha(u)} c'(u_0)\, c'(u)\, \overline{f}_0 = \frac{1}{\alpha(u)} c'(uu_0) \overline{f}_0 = \frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u)} f(uu_0),$$

т. е. функция $f(u)$ удовлетворяет соотношению (3). Следовательно, подпространство в $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$, натянутое на функции $f_1(u), \ldots, f_m(u)$, является инвариантным подпространством, в котором представления U_u и $c(u)$ совпадают.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Пусть U_g — представление основной невырожденной серии группы $\mathfrak{G}$, соответствующее характеру $\chi(\delta)$. Для того чтобы полученное из него представление U_u унитарной подгруппы $\mathfrak{U}$ содержало данное неприводимое представление $c(u)$ этой подгруппы, необходимо и достаточно, чтобы в пространстве представления $c(u)$ содержался весовой вектор f_0 веса $\chi(\gamma)$.*

Выясним, сколько раз данное неприводимое представление $c(u)$ содержится в представлении U_u основной невырожденной серии. Пусть $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(r)}$ — линейно независимые инвариантные подпространства в $\mathfrak{H}_{\widetilde{\mathfrak{U}}}$, в каждом из которых представление U_u эквивалентно

представлению $c(u)$; пусть $f^{(1)}(u), f^{(2)}(u), \ldots, f^{(r)}(u)$ — соответствующие вектор-функции, так что

$$\frac{\alpha(uu_0)}{\alpha(u)} f^{(p)}(uu_0) = c'(u) f^{(p)}(u), \quad p = 1, 2, \ldots, r. \tag{10}$$

Положим $f_0^{(p)} = \overline{f^{(p)}(e)}$, $p = 1, \ldots, r$; в силу доказанного выше, $f_0^{(p)}$ — весовые векторы представления $c(u)$ с одним и тем же весом $\chi(\gamma)$. Эти векторы линейно независимы. Действительно, пусть

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_p f_0^{(p)} = 0,$$

следовательно, также

$$\sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p \overline{f}_0^{(p)} = 0.$$

Из формулы (9) следует тогда, что

$$\sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p f^{(p)}(u) = \sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p \frac{1}{\alpha(u)} c'(u) \overline{f}_0^{(p)} = \frac{1}{\alpha(u)} c'(u) \sum_{p=1}^{r} \overline{\lambda}_p \overline{f}_0^{(p)} = 0.$$

Так как пространства $\mathfrak{M}^{(1)}, \mathfrak{M}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(r)}$ линейно независимы, то отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$. Следовательно, векторы $f_0^{(p)}$ линейно независимы.

Таким образом, *число подпространств* $\mathfrak{M}^{(p)}$ *не превышает числа линейно независимых векторов с данным весом* $\chi(\gamma)$.

Обратно, пусть $f_0^{(1)}, \ldots, f_0^{(r)}$ — полная линейно независимая система весовых векторов с весом $\chi(\gamma)$. Пользуясь формулой (9), положим

$$f^{(p)}(u) = \frac{1}{\alpha(u)} c'(u) f_0^{(p)}. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^{(p)}$ подпространство, натянутое на функции $f_1^{(p)}(u), \ldots, f_m^{(p)}(u)$. Докажем, что подпространства $\mathfrak{M}^{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots, r$, линейно независимы. Пусть

$$\sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{r} \lambda_{pq} f_q^{(p)}(u) \equiv 0; \tag{12}$$

требуется доказать, что все $\lambda_{pq} = 0$. Формула (11) означает:

$$f_q^{(p)}(u) = \frac{1}{\alpha(u)} \sum_{j=1}^{m} c_{jq}(u) \overline{f}_{0,j}^{(p)}, \quad p = 1, \ldots, r; q = 1, \ldots, m. \tag{13}$$

Подставляя эти выражения в (12), получим, что

$$\sum_{p=1}^{r} \sum_{q=1}^{m} \lambda_{pq} \frac{1}{\alpha(u)} \sum_{j=1}^{m} c_{jq}(u) \overline{f}_{0,j}^{(p)} \equiv 0;$$

следовательно,

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{p=1}^{r} \lambda_{pq} \overline{f}_{0,j}^{(p)} \right) c_{jq}(u) \equiv 0.$$

Так как представление $c(u)$, по условию, неприводимо, то функции $c_{jq}(u)$ линейно независимы. Поэтому из последнего равенства следует, что

$$\sum_{p=1}^{r} \lambda_{pq} \overline{f}_{0,j}^{(p)} = 0;$$

так как векторы $\overline{f}^{(p)}$ линейно независимы, то это возможно только тогда, когда все $\lambda_{pq} = 0$. Тем самым доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. *Данное неприводимое представление $c(u)$ группы $\mathfrak{U}$ встречается в представлении U_u, соответствующем характеру χ, столько раз, сколько в пространстве представления $c(u)$ имеется линейно независимых весовых векторов f_0 с весом $\chi(\gamma)$.*

Мы формулировали теоремы 3 и 4 для представлений основной невырожденной серии. Посмотрим, какие изменения следует внести для представлений вырожденной серии.

Вектор f_0 из пространства представления $c(u)$ мы будем называть *весовым относительно группы* $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, если $c(\gamma) f_0 = \lambda(\gamma) f_0$ для всех $\gamma \in \Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$. Таким образом, весовой вектор относительно $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ есть весовой вектор в прежнем смысле этого слова и сверх того он является инвариантным относительно тех матриц из $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$, у которых диагональные «ящики» имеют детерминант $= 1$.

Из рассуждений на стр. 257 следует, что теоремы 3 и 4 остаются в силе и для представлений вырожденной серии, если под f_0 понимать весовые векторы относительно $\Gamma_{n_1, n_2, \ldots, n_r}$.

Заметим, что доказательства теорем 3 и 4 остаются в силе и для дополнительных серий.

Пусть теперь $c_0(u)$ — неприводимое представление группы $\mathfrak{U}$, для которого весовой вектор с весом $\chi(\gamma)$ есть вектор старшего веса. В неприводимом представлении может быть только один линейно независимый вектор старшего веса; следовательно, в силу теоремы 4, представление $c_0(u)$ содержится только один раз в разложении представления U_u. Поэтому во всех остальных представлениях $c(u)$, содержащихся в представлении U_u, вектор f_0 с весом $\chi(\gamma)$ не есть вектор старшего веса, т. е. вес всякого другого такого представления $c(u)$ выше $\chi(\gamma)$.

Таким образом, *среди неприводимых представлений $c(u)$ группы $\mathfrak{U}$, на которые разлагается представление U_u основной невырожденной серии, имеется одно и только одно представление с наинизшим старшим весом и этот вес есть $\chi(\gamma)$.*

Поступило
4. X. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем. 11 (1947), 411—504.

[2] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления полупростых групп Ли. I., Матем. сборник, 21 (63) : 3 (1947), 405—434.

[3] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Дополнительные и вырожденные серии представлений комплексной унимодулярной группы, Доклады Ак. Наук СССР, т. 58, № 8 (1947), 1577—1580.

[4] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Нормированные кольца с инволюцией и их представления, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 12 (1948), 445—480.

[5] Гельфанд И. М. и Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сборник, 13 (55) : 2—3 (1943), 301—316.

[6] Вейль Г., Классические группы, Москва, 1947.

[7] Weil A., L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Actualités Scientifiques et Industrielles, No 869, Paris, 1940.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 261—274

С. В. ФОМИН

О МЕРАХ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРОЙ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Целью настоящей работы является, в основном, перенесение главнейших результатов, полученных Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым (¹) для компактных динамических систем, на случай более общих групп преобразований пространства. Этой задаче посвящен § 2. Предварительно в § 1 устанавливаются некоторые связи между инвариантными мерами и унитарными представлениями некоторой группы.

§ 1

1.1. Скрещенное произведение.* Пусть G — произвольная группа и S — некоторая группа автоморфизмов группы G. Построим следующим образом новую группу, которую мы будем называть *скрещенным произведением* групп G и S и обозначать символом $[G, S]$. Элементами группы $P=[G, S]$ являются формальные произведения («двухбуквенные слова») вида gs. Произведение двух элементов $p_1=g_1s_1$ и $p_2=g_2s_2$ из P определяется так:

$$p_1p_2=(g_1s_1)(g_2s_2)=g_1s_1(g_2)\,s_1s_2,$$

т. е. это есть произведение элемента $g_1s_1(g_2)$ из G на элемент s_1s_2 из S. Легко видеть, что $[G, S]$ действительно есть группа; при этом $[G, S]$, вообще говоря, некоммутативна, даже в том случае, когда и G и S коммутативны.

Для дальнейшего будет существенен следующий частный случай указанной конструкции: G есть мультипликативная группа непрерывных комплексных функций $\varphi(x)$, равных по модулю единице, на некотором компакте R, а S — некоторая группа взаимно однозначных и непрерывных отображений компакта R на себя. Ясно, что каждый элемент $s\in R$ можно рассматривать как автоморфизм группы $G=\{\varphi(x)\}$, если положить $s\varphi=\varphi(sx)$.

1.2. Пусть R — компакт и S — некоторая непрерывная группа взаимно однозначных отображений компакта R на себя. Иначе говоря, пусть для любых $s\in R$ и $x\in R$ определена функция $y=sx$, непрерывная по совокупности переменных s и x, и удовлетворяющая условиям:

1. $ex=x$ (e — единица группы S);
2. $s_1(s_2x)=(s_1s_2)\,x$.

---

* Понятие скрещенного произведения было введено Э. Нетер. Конструкция, используемая здесь, принадлежит И. М. Гельфанду.

В случае, когда S — прямая (или совокупность всех целых чисел), мы получаем обычное определение динамической системы с непрерывным (или дискретным) временем и компактным фазовым пространством.

Пусть μ — некоторая конечная мера на R. (В дальнейшем мы будем, не оговаривая этого особо, рассматривать только конечные меры. Каждую конечную меру можно, очевидно, не нарушая общности, считать нормированной, т. е. удовлетворяющей условию $\mu(R) = 1$.) Мера μ называется *инвариантной относительно группы* S, если для любого измеримого множества $A \subset R$ и любого $s \in R$ множество sA также измеримо и $\mu(sA) = \mu(A)$.

ТЕОРЕМА 1. *Каждой мере в R, инвариантной относительно группы S, соответствует некоторое унитарное представление группы $P = [G, S]$.*

Доказательство. Пусть μ — мера в R, инвариантная относительно S. Обозначим через H_μ пространство суммируемых в квадрате по μ функций на R. Каждому элементу $p = \varphi(x)s$ из P соответствует оператор $A_{\mu,p}$, определяемый формулой:

$$A_{\mu,p}(h) = \varphi(x)h(sx).$$

Покажем, что это соответствие есть действительно представление, т. е. что произведению элементов из P отвечает произведение соответствующих операторов. Пусть

$$p_1 = \varphi_1(x)s_1, \quad p_2 = \varphi_2(x)s_2, \quad p = p_1p_2 = \varphi_1(x)\varphi_2(s_1x)s_1s_2.$$

Тогда

$$A_{\mu,p_1}(A_{\mu,p_2}h) = A_{\mu,p_1}(\varphi_2(x)h(s_2x)) =$$
$$= \varphi_1(x)\varphi_2(s_1x)h(s_1s_2x) = A_{\mu,p}(h).$$

Проверим теперь, что это представление действительно является унитарным, т. е. что $A_{\mu,p}^{-1} = A_{\mu,p}^{*}$.

Если $p = \varphi(x)s$, то $p^{-1} = \overline{\varphi(s^{-1}x)}\,s^{-1}$. Действительно,

$$\varphi(x)s\overline{\varphi(s^{-1}x)}s^{-1} = \varphi(x)\overline{\varphi(x)}ss^{-1} = 1\cdot e.$$

Далее,

$$(A_{\mu,p}h, f) = \int_R \varphi(x)h(sx)\overline{f(x)}\,d\mu(x) =$$

$$= \int_R h(x)\overline{\overline{\varphi(s^{-1}x)}f(s^{-1}x)}\,d\mu(s^{-1}x).$$

Так как мера μ инвариантна, то $d\mu(s^{-1}x)$ можно заменить через $d\mu(x)$ и, следовательно, последнее выражение равно

$$\int_R h(x)\overline{\overline{\varphi(s^{-1}x)}f(s^{-1}x)}\,d\mu(x) = (h, A_{\mu,p^{-1}}f) = (h, A_{\mu,p}^{-1}f).$$

Таким образом, для любых $h, f \in H_\mu$

$$(A_{\mu,p}h, f) = (h, A_{\mu,p}^{-1}f),$$

что и означает $A_{\mu,p}^{*} = A_{\mu,p}^{-1}$. Следовательно, построенное представление унитарно.

1.3. Напомним некоторые необходимые для дальнейшего понятия. Пусть на R задана группа преобразований S и мера μ, инвариантная относительно S. Обозначим через M совокупность всех нормированных мер на R, инвариантных относительно группы S. Мы будем говорить, что мера $\mu \in M$ *неразложима*, если ее нельзя представить в виде

$$\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2,$$

где $\mu_1 \neq \mu_2$, а α и β — положительные числа такие, что $\alpha + \beta = 1$.

Множество $A \subset R$ называется *инвариантным*, если для любого $s \in S$

$$sA = A.$$

Для нас более существенным будет следующее понятие:

Множество $A \subset R$ называется *инвариантным по мере* μ, если для любого $s \in S$

$$\mu[(sA \cup A) \setminus (sA \cap A)] = 0.$$

Мера μ называется *транзитивной*, если все R нельзя разбить на два инвариантных множества, каждое положительной меры μ.

Мы скажем, что мера μ *транзитивна в сильном смысле*, если все R нельзя разбить на два множества положительной меры μ, инвариантных по мере μ.

Логическая связь между понятиями транзитивности, транзитивности в сильном смысле и неразложимости выражается, очевидно, следующей схемой:

неразложимость → { транзитивность в сильном смысле } → транзитивность.

Из результатов Крылова — Боголюбова ([1]) вытекает, что в случае обычной динамической системы из транзитивности следует неразложимость, т. е. что все эти три понятия эквивалентны. В общем же случае, это неверно, как показывает указанный мне А. Н. Колмогоровым пример, приведенный в § 2. Однако, как мы покажем ниже, всякая мера, транзитивная в сильном смысле, неразложима.

1.4. Продолжим изучение соответствия между инвариантными мерами на R и унитарными представлениями группы $[G, S]$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть μ — инвариантная относительно S мера на R. Соответствующее ей унитарное представление $A_{\mu, p}$ группы $\mathfrak{P} = [G, S]$ неприводимо в том и только в том случае, когда мера μ транзитивна в сильном смысле.*

Доказательство. Неприводимость представления означает, что всякий линейный оператор, перестановочный со всеми операторами $A_{\mu, p}$, есть умножение на число. Пусть B — оператор в H_μ, перестановочный со всеми $A_{\mu, p}$. Среди операторов $A_{\mu, p}$ содержатся, в частности, все операторы, представляющие собой умножение на функцию, равную по модулю единице. Таким образом, оператор B должен быть перестановочен с любым оператором, представляющим собой умножение на произвольную ограниченную измеримую функцию. В этом случае оператор B сам представляет собой умножение на некоторую функцию. Действительно, обозначим через $\psi(x)$ функцию, в которую оператор B переводит функцию, тождественно равную на R единице. Тогда

$$B\varphi(x) = B[\varphi(x)\cdot 1] = \varphi(x) B(1) = \varphi(x)\psi(x),$$

т. е. оператор B представляет собой умножение на функцию $\psi(x)$. Далее, среди операторов $A_{\mu, p}$ имеются операторы вида $1 \cdot s$. Такой оператор переводит функцию $\varphi(x)$ в функцию $\varphi(sx)$. Следовательно,

$$(1 \cdot s \cdot B) 1 = \psi(sx), \quad B(1 \cdot s) \cdot 1 = B(1) = \psi(x).$$

Таким образом, $\psi(sx) = \psi(x)$ (почти всюду, по μ) для любого s, т. е. $\psi(x)$ — инвариантная функция. Обратно, как легко непосредственно проверить, умножение на инвариантную функцию есть оператор в H_μ, перестановочный со всеми $A_{\mu, p}$. (Инвариантность понимается, конечно, по мере μ.)

Если мера μ транзитивна в сильном смысле, то всякая инвариантная функция почти всюду равна постоянной, следовательно, соответствующее представление неприводимо. Обратно, если представление $A_{\mu, p}$ неприводимо, то единственными инвариантными функциями на R являются константы (почти всюду, по μ), т. е. мера μ транзитивна в сильном смысле. Теорема доказана.

1.5. Покажем, что *всякая мера, транзитивная в сильном смысле, является неразложимой*. Для этого мы воспользуемся соответствием между унитарными представлениями некоторой группы и положительно определенными функциями на этой группе, установленным И. М. Гельфандом и Д. А. Райковым (2). Пусть U_g — унитарное представление некоторой группы G и ξ — произвольный отличный от нуля элемент соответствующего гильбертова пространства. Тогда скалярное произведение $(U_g\xi, \xi)$ есть положительно определенная функция на G. Если $\varphi_1(g)$ и $\varphi_2(g)$ — положительно определенные функции, то $\varphi_2(g)$ называется *подчиненной* $\varphi_1(g)$ ($\varphi_2(g) \ll \varphi_1(g)$), если функция $\varphi_1(g) - \varphi_2(g)$ положительно определена.

Далее, $\varphi(g)$ называется *элементарной* положительно определенной функцией, если из условия $\psi(g) \ll \varphi(g)$ следует $\psi(g) = \alpha\varphi(g)$.

Все положительно определенные функции на группе G, удовлетворяющие условию $\varphi(e) = 1$, образуют, как легко видеть, выпуклое множество, а элементарные функции являются крайними точками* этого множества. Как показали И. М. Гельфанд и Д. А. Райков [см. (2), теорема 2], *положительно определенные функции, порождаемые неприводимыми унитарными представлениями, являются элементарными*.

Эти результаты дают возможность каждой инвариантной относительно S мере на R поставить в соответствие положительно определенную функцию на $[G, S]$. При этом, очевидно, если

$$\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2,$$

то соответствующие положительно определенные функции $\varphi(p)$, $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ (при надлежащем выборе производящего элемента ξ) связаны аналогичным соотношением:

$$\varphi(p) = \alpha\varphi_1(p) + \beta\varphi_2(p)$$

и если $\mu_1 \neq \mu_2$, то $\varphi_1(p) \neq \varphi_2(p)$.

---

* Говорят, что x есть крайняя точка множества M, если она не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего M.

Пусть мера μ транзитивна в сильном смысле. По доказанному, ей соответствует неприводимое унитарное представление и, следовательно, элементарная положительно определенная функция. Но если мера μ разложима, то соответствующая ей положительно определенная функция, очевидно, не будет элементарной. Итак, наше утверждение доказано.

1.6. Выше мы ограничились рассмотрением непрерывных преобразований компакта, так как только этот случай понадобится нам в § 2. Однако *топологические* условия, налагаемые нами на пространство R и на группы S, не являются естественными, например, понятие транзитивности в сильном смысле принадлежит, конечно, чисто метрической, а не топологической теории. В связи с этим нам кажется интересным и важным поставить следующий вопрос:

Дано некоторое множество R и некоторая группа S взаимно однозначных отображений R на себя (для простоты можно ограничиться сперва случаем циклической группы, т. е. обычной динамической системы с дискретным временем). Изучить совокупность всех мер, которые можно ввести в R, инвариантных относительно группы S. При этом, конечно, на рассматриваемые меры нужно наложить определенные ограничения, повидимому следующего характера: в R фиксируется некоторый класс K множеств, имеющий счетный базис, и рассматриваются только те меры, в каждой из которых все множества из K измеримы. Таким путем можно, вероятно, получить в чисто метрической форме все основные результаты, найденные Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым для инвариантных мер в компактных динамических системах.

§ 2

2.1. Н. Н. Боголюбовым и Н. М. Крыловым ([1]) для динамических систем с компактным фазовым пространством были установлены следующие теоремы:

I. *Во всякой компактной динамической системе существует хотя бы одна (конечная) инвариантная мера.*

II. *Совокупность всех инвариантных мер на данной динамической системе является выпуклым замыканием множества транзитивных мер.*

III. *Для каждой транзитивной инвариантной меры μ существует такое инвариантное множество $\mathcal{E}_\mu$ (эргодическое множество), что*

$$\mu(\mathcal{E}_\mu) = 1 \text{ и } \mu'(\mathcal{E}_\mu) = 0$$

для всякой транзитивной инвариантной меры μ', отличной от μ. Отсюда, в частности, следует что *всякая инвариантная мера неразложима.*

Улам (Ulam) и Окстоби (Oxtoby) ([3]) обобщили теорему I на случай некомпактной динамической системы на полном метрическом пространстве со 2-й аксиомой счетности.

Остальные результаты Боголюбова и Крылова были обобщены на некомпактные динамические системы в ([4]).

Здесь мы, ограничиваясь для простоты случаем компактного пространства, рассмотрим возможности обобщения перечисленных результатов

в другом направлении, а именно, на группы преобразований более или менее произвольные, а не только однопараметрические. Мы увидим, что в этом направлении указанные результаты допускают довольно далеко идущие обобщения.

2.2. Заметим, прежде всего, что теорема II справедлива вообще для любой группы S. Действительно, всякая мера на R есть линейный функционал в пространстве C_R непрерывных функций на R. Легко видеть, что меры на R, инвариантные относительно данной группы S и удовлетворяющие условию $\mu(R)=1$, образуют в пространстве, сопряженном к C_R, ограниченное выпуклое множество, замкнутое в смысле слабой топологии. Неразложимые инвариантные меры являются крайними точками этого множества; обратно, всякая крайняя точка этого множества представляет собой неразложимую меру. Согласно известной теореме М. Крейна и Д. Мильмана ([5]), ограниченное выпуклое множество в сопряженном пространстве, замкнутое в слабой топологии, совпадает с выпуклым замыканием совокупности своих крайних точек. Следовательно, теорема II справедлива для любой группы преобразований.

2.3. Существование инвариантных мер. Легко видеть, что не для любой группы преобразований, заданной на каком-либо компактном метрическом пространстве, существует инвариантная мера. В самом деле, пусть R — проективная прямая с компактной топологией и S — совокупность всех ее проективных преобразований. На R не существует никакой меры, инвариантной относительно всех преобразований из S. Действительно, единственная мера, инвариантная относительно всех преобразований подобия, — это мера, сосредоточенная в точках 0 и ∞. Но так как эти точки могут быть переведены соответствующими проективными преобразованиями в любые другие, то и такая мера не была бы инвариантна.

Укажем на некоторые классы групп, для которых инвариантные меры существуют. Начнем с простейшего случая компактной группы. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если S — компактная группа преобразований пространства R, то в R существует конечная мера, инвариантная относительно S.*

Доказательство. Пусть x — произвольная точка из R, F — «проходящая через x траектория», т. е. минимальное инвариантное множество, содержащее точку x, и пусть T — стационарная подгруппа группы S, т. е. совокупность элементов из S, преобразующих точку x в себя. Тогда F можно рассматривать как совокупность классов смежности S/T. Так как группа S компактна, то в S существует конечная инвариантная мера m (мера Хаара). Эта мера естественным образом переносится на F. Теорема доказана.

Эта теорема может быть усилена следующим образом:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть S — группа преобразований компакта R. Пусть T — нормальный делитель группы S такой, что фактор-группа S/T компактна. Если в R существует мера, инвариантная относительно T, то в R существует также и мера, инвариантная относительно всей группы S.*

Доказательство. Пусть $\bar{\mu}$ — конечная мера на R, инвариантная относительно T. Пусть, далее, m — мера Хаара на S/T. Положим

$$\mu(A) = \int\limits_{S/T} \bar{\mu}(\gamma A)\, dm(\gamma).$$

(Здесь $\bar{\mu}(\gamma A)$ означает $\bar{\mu}(SA)$ с произвольным s из класса смежности γ. Так как $\bar{\mu}$ инвариантна относительно T, то $\bar{\mu}(sA)$ имеет одно и то же значение для всех $s \in \gamma$.) Легко видеть, что μ есть конечная мера, инвариантная относительно любого преобразования $s \in S$. Действительно, в силу инвариантности меры m,

$$\mu(sA) = \int\limits_{S/T} \bar{\mu}[\gamma(sA)]\, dm(\gamma) = \int\limits_{S/T} \bar{\mu}[\gamma s A]\, dm(\gamma) = \int\limits_{S/T} \bar{\mu}(\gamma s A)\, dm(\gamma s) = \mu(A).$$

Очевидно, что в теоремах 3 и 4 компактность пространства R никак не использовалась.

Замечание. Теорема 4 означает, в частности, что если в фазовом пространстве некоторой динамической системы существует мера, инвариантная относительно преобразований S_{kt_0}, соответствующих промежуткам времени, кратным некоторому t_0, то в этой динамической системе существует также и мера, инвариантная относительно всех S_t.

Компактные группы мало интересны, так как они не содержат важнейшего частного случая — динамических систем. Этот случай охватывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть S — коммутативная группа преобразований компакта R. Тогда на R существует конечная мера, инвариантная относительно S.*

Докажем предварительно следующую лемму, которая представляет и некоторый самостоятельный интерес.

ЛЕММА. *Если S — произвольная группа гомеоморфных отображений компакта R на себя, то в S можно выбрать такую счетную подгруппу T, что всякая мера μ на R, инвариантная относительно T, инвариантна и относительно всей группы.*

Или (эквивалентная формулировка): *всякая непрерывная функция на R, инвариантная относительно T, инвариантна и относительно всей группы S.*

Доказательство леммы. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — счетное всюду плотное множество в пространстве C_R всех непрерывных функций на R.* Пусть Φ_{f_i} — множество всех функций вида $f_i(sx)$ (здесь f_i фиксировано, а s пробегает всю группу S). Выберем для каждого i счетную систему элементов s_k^i так, чтобы функции $f_i(s_1^i x), \ldots, f_i(s_i^i x), \ldots$ образовывали в Φ_{f_i} счетное всюду плотное множество. Пусть T — группа, порожденная всеми элементами s_k^i $(i, k = 1, 2, \ldots)$. Так как множество элементов s_k^i счетно, то и сама группа T счетна. Покажем теперь, что всякая мера μ, инвариантная относительно T, инварианта и относительно S.

---

* Как известно, пространство непрерывных функций на компакте сепарабельно; См., например, (1).

Для доказательства инвариантности меры μ достаточно показать, что для любой непрерывной функции $f(x)$ на R и любого $s \in S$

$$\int\limits_R f(sx)\, d\mu(x) = \int\limits_R f(x)\, d\mu(x).$$

Пусть $f(x) \in C_R$ и $s \in S$ заданы. Пусть ε — произвольное положительное число. Выберем функцию $f_n(x)$ (из фиксированного счетного всюду плотного множества в C_R) так, чтобы

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Далее, выберем элемент $t \in T$ так, чтобы

$$|f_n(tx) - f_n(sx)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $x \in R$ (такое t существует в силу способа построения группы T). Тогда, принимая во внимание, что

$$\int\limits_R f_n(tx)\, d\mu(x) = \int\limits_R f_n(x)\, d\mu(x),$$

получаем

$$\left|\int\limits_R f(sx)\, d\mu(x) - \int\limits_R f(x)\, d\mu(x)\right| \leqslant \left|\int\limits_R f(sx)\, d\mu(x) - \int\limits_R f_n(sx)\, d\mu(x)\right| +$$
$$+ \left|\int\limits_R f_n(sx)\, d\mu(x) - \int\limits_R f_n(tx)\, d\mu(x)\right| + \left|\int\limits_R f_n(x)\, d\mu(x) - \int\limits_R f(x)\, d\mu(x)\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \tag{1}$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то равенство (1), а следовательно, и утверждение леммы, доказаны.

Доказательство теоремы 5. В силу доказанной леммы, мы можем предположить, что группа S — счетная. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — ее элементы. Построим, как это делается, например, в работе Крылова — Боголюбова [см. ([1])], нормированную меру μ_1, инвариантную относительно преобразования s_1. Далее, положим для любого измеримого $A \subset R$ и любого натурального n

$$\mu_1^{(n)}(A) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \mu_1(s_2^i A).$$

Каждая мера $\mu_1^{(n)}$ есть нормированная мера, инвариантная относительно s_1. Действительно, так как $s_1 s_2^i = s_2^i s_1$, то

$$\mu_1^{(n)}(s_1 A) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \mu_1(s_2^i s_1 A) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=n}^{n} \mu_1(s_1 s_2^i A) = \mu_1^{(n)}(A).$$

Из мер $\mu_1^{(n)}$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть μ_2 — соответствующая предельная мера. Легко видеть, что $\mu_2(R) = 1$ и что мера μ_2 инвариантна как относительно s_1, так и относительно s_2.

Аналогично строится мера μ_3, инвариантная относительно элементов s_1, s_2 и s_3, и т. д. Мы получаем последовательность нормированных мер

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, причем мера μ_n инвариантна относительно элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$ из S. Из этой последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность. Пусть μ — соответствующая предельная мера. Легко видеть, что μ инвариантна относительно всех элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, т. е. относительно всей группы S. Действительно, это непосредственно вытекает из того, что слабый предел последовательности мер, инвариантных относительно некоторого преобразования, также есть мера, инвариантная относительно этого преобразования. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если S — группа преобразований компакта R, содержащая коммутативный нормальный делитель T такой, что фактор-группа S/T компактна, то существует по крайней мере одна нормированная мера на R, инвариантная относительно S.*

Отсюда, например, вытекает существование меры на плоскости, инвариантной относительно группы движения плоскости.

Следствие 2. *Пусть группа S преобразований компакта R разрешима. Тогда существует на R мера, инвариантная относительно S.*

Доказательство. Так как всякая подгруппа разрешимой группы сама разрешима, то мы можем воспользоваться леммой и предполагать, что группа S счетная. Пусть

$$S = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_r = E$$

— убывающий ряд коммутантов группы S. Предположим, что мы уже построили меру μ_k, инвариантную относительно всех элементов из K_m $(m < r)$. Построим меру μ_{k-1}, инвариантную относительно всех элементов из K_{m-1}. Пусть k — произвольный элемент из K_{m-1}, не принадлежащий K_m. Положим

$$\mu_k^{(n)}(A) = \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} \mu_k(k^i A).$$

Легко видеть, что $\mu_m^{(n)}$ есть нормированная мера, инвариантная относительно всех преобразований из K_m. Действительно, если $k' \in K_m$, то

$$\mu_m^{(n)}(k'A) = \frac{1}{2n+1} \sum \mu_m(k^i k' A) = \frac{1}{2n+1} \sum \mu_m(q k' k^i A),$$

где q — коммутатор элементов k^i и k'. Так как $q \in K_m$, а μ_m инвариантна относительно элементов из K_m, то последнее выражение равно $\mu_m^{(n)}(A)$. Дальше, как и в теореме 3, получаем меру, инвариантную относительно группы, порожденной K_m и элементами k. Продолжая аналогичный процесс до тех пор, пока не будет исчерпана вся группа K_{m-1}, получим меру μ_{m-1}, инвариантную относительно K_{m-1}. Повторив это построение конечное число раз, придем к мере, инвариантной относительно всей группы S.

Замечание 1. Несколько видоизменив приведенное доказательство, можно показать, что теорема 5 справедлива и в том случае, когда R — произвольный бикомпакт.

Из теоремы 4 и 5 непосредственно получается

Замечание 2. Теорема 3 представляет собою обобщение на случай произвольной коммутативной группы преобразований теоремы Крылова-

Боголюбова о существовании инвариантной меры для компактной динамической системы (т. е. для однопараметрической группы преобразований компакта). Как это показано в недавних работах В. В. Немыцкого, на случай локально компактных коммутативных групп преобразований («общие динамические системы», по терминологии В. В. Немыцкого) могут быть перенесены, в основном, все факты и понятия топологической теории динамических систем. Это можно сделать и для всей теории инвариантной меры. В частности, теорему Биркгофа, которая играет существенную роль в теории Крылова — Боголюбова, обобщил на n-параметрические группы преобразований Pitt ([6]); тем же самым способом она может быть перенесена на любые локально компактные коммутативные группы преобразований.

2.4. Существование эргодических множеств. Как уже было сказано выше, в случае динамической системы (т. е. однопараметрической группы преобразований) для каждой неразложимой меры μ_0 существует соответствующее ей эргодическое множество $\mathcal{E}_{\mu_0}$, т. е. множество, удовлетворяющее условиям:

1. $\mu_0(\mathcal{E}_{\mu_0}) = 1$;
2. $\mu(\mathcal{E}_{\mu_0}) = 0$ для любой неразложимой меры $\mu \neq \mu_0$;
3. $\mathcal{E}_{\mu_0}$ инвариантно.

Следующий пример, указанный мне А. Н. Колмогоровым, показывает, что для произвольной группы преобразований компакта этот результат может быть и не верен.

Пусть R — канторово совершенное множество. Каждая точка $x \in R$ есть бесконечая (в обе стороны) последовательность нулей и единиц:

$$x = \ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$$

$$a_i = \begin{cases} 0; \\ 1; \end{cases} \quad -\infty < i < \infty.$$

Группа S есть совокупность всех перестановок множества целых чисел. Иначе говоря, каждый элемент $s \in S$ переводит ряд чисел

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

опять таки в совокупность всех целых чисел, но уже расположенных в ином порядке. Преобразование s, примененное к точке $x \in R$, означает, что компоненты a_i точки x переставляются в порядке, указываемом преобразованием s. Легко проверить, что каждое из преобразований $s \in S$ непрерывно.

Как вытекает из результатов Бруно де Финетти ([7]), неразложимые меры на R, инвариантные относительно указанной группы преобразований, исчерпываются следующими: R есть произведение счетного числа пар $\{0, 1\}$ изолированных точек. Припишем точке 1 «вес» p, а точке 0 — вес $1 - p$. Это будет мера в пространстве, состоящем из двух точек.

В пространстве R определим меру как произведение мер, заданных в каждом сомножителе. Каждое число p, $0 \leqslant p \leqslant 1$, определяет в R свою меру μ_p. Каждая из этих мер неразложима и никаких других нормированных неразложимых мер, инвариантных относительно S, в R нет.

Будем рассматривать такие меры, для которых $0 < p < 1$. Легко видеть, что в каждой из таких мер множество $R' \subset R$, состоящее из точек x,

среди компонент которых имеется бесконечное число нулей и бесконечное число единиц, имеет меру 1.

В то же время в R' нет никакого собственно подмножества, инвариантного относительно S, так как любая последовательность нулей и единиц, в которой как нули, так и единицы встречаются бесконечно много раз, может быть переведена в любую другую последовательность того же вида соответствующим преобразованием $s \in S$. Следовательно, в R невозможно для каждой неразложимой меры найти соответствующее ей инвариантное эргодическое множество. Тем не менее в этом примере можно все R разбить на попарно непересекающиеся измеримые множества E_p и каждой мере μ_p поставить в соответствие одно такое множество так, чтобы

$$\mu_p(E_p) = 1, \quad \mu_q(E_p) = 0, \text{ если } q \neq p.$$

Соответствующие множества уже не будут инвариантны. Однако из условия $\mu_p(E_p) = 1$ (т. е. $\mu_p(R \setminus E_p) = 0$) будет следовать их инвариантность *относительно меры* μ (см. § 1). Для этого достаточно в качестве E_p выбрать совокупность всех тех последовательностей $x \in R$, в которых единицы расположены с плотностью p.

Действительно, рассмотрим в S циклическую подгруппу, порожденную преобразованием сдвига, т. е. преобразованием s, переводящим n-ю координату в $n+1$-ю $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Мы получим на R динамическую систему (с дискретным временем), μ_p — инвариантная мера для этой динамической системы. Пусть $\varphi_0(x)$ — функция на R, равная значению нулевой координаты для точки x. Легко видеть, что $\varphi_0(x)$ непрерывна. Очевидно,

$$\int\limits_R \varphi_0(x)\, d\mu_p(x) = p.$$

Далее, пусть

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \sum \varphi_0(s^k x) = \varphi_0^*(x). \tag{2}$$

Так как μ_p транзитивна, то, по теореме Биркгофа, $\varphi_0^*(x) = p$ для почти всех (в смысле меры μ_p) $x \in R$. Но (2) и есть как раз плотность расположения единиц в последовательности x. Условие $\varphi_0^*(x) = p$ равносильно $x \in E_p$. Таким образом, мы получаем

$$\mu_p(E_p) = 1.$$

Рассмотренный пример приводит к мысли поставить следующий вопрос: можно ли *для каждой неразложимой нормированной меры* μ, *инвариантной относительно некоторой группы непрерывных преобразований, заданной на компакте* R, *найти такое множество* E_μ, *что:*

1. $\mu(E_\mu) = 1$,

2. $\mu'(E_\mu) = 0$ *для всякой неразложимой меры* $\mu' \neq \mu$? (Из условия 1 автоматически следует инвариантность множества E_μ относительно меры μ.)

Нам удалось в общем случае доказать лишь несколько более слабое утверждение, а именно:

ТЕОРЕМА 6. *Пусть μ_1 и μ_2 — неразложимые меры на компакте R, инвариантные относительно заданной группы преобразований S. Тогда R можно представить в виде суммы двух непересекающихся множеств Ω_1 и Ω_2 таких, что*

$$\mu_1(\Omega_1)=1, \quad \mu_2(\Omega_1)=0,$$
$$\mu_1(\Omega_2)=0, \quad \mu_2(\Omega_2)=1.$$

Доказательство. Пусть $\alpha>0$, $\beta>0$ и $\alpha+\beta=1$. Рассмотрим в R меру $\mu=\alpha\mu_1+\beta\mu_2$. Так как эта мера разложима, то (см. 1. 5) она не может быть транзитивна в сильном смысле. Таким образом, R можно разбить на два множества Ω_1 и Ω_2, инвариантных по мере μ и таких, что $\mu(\Omega_1)>0$, $\mu(\Omega_2)>0$. Очевидно, что если множества Ω_1 и Ω_2 инвариантны по μ, то они инвариантны также по μ_1 и по μ_2. Итак,

$$\mu(\Omega_1)=\alpha\mu_1(\Omega_1)+\beta\mu_2(\Omega_1)>0,$$
$$\mu(\Omega_2)=\alpha\mu_1(\Omega_2)+\beta\mu_2(\Omega_2)>0.$$

Так как мера μ_1 неразложима, то она транзитивна в сильном смысле. Следовательно, или $\mu_1(\Omega_1)=1$, а $\mu_1(\Omega_2)=0$, или наоборот, $\mu_1(\Omega_1)=0$, а $\mu_1(\Omega_2)=1$.

Положим для определенности $\mu_1(\Omega_1)=1$. Тогда $\mu_2(\Omega_2)\neq 0$, так как иначе $\mu(\Omega_2)=0$; значит, в силу неразложимости меры μ_2,

$$\mu_2(\Omega_1)=0, \quad \mu_2(\Omega_2)=1,$$

что и требовалось.

Ясно, что эта теорема остается в силе для любого конечного или счетного числа неразложимых мер.

В заключение мы сделаем, в связи с теорией инвариантных мер, несколько замечаний о выпуклых множествах в линейных пространствах.

2.5. Выпуклые множества в пространстве, сопряженном к C. Пусть M — выпуклое множество в пространстве, сопряженном к сепарабельному, замкнутое в слабой топологии; $\hat{M}$ — совокупность крайних точек множества M.

Замкнутое выпуклое множество $N\subset M$ называется *регулярной частью* множества M, если всякая крайняя точка множества N является одновременно и крайней точкой множества M, т. е. если $\hat{N}\subset\hat{M}$.

Пример. M — многогранник. Его грани, ребра и вершины суть его регулярные части.

Введем понятие *носителя* точки $p\in M$ в замкнутом выпуклом множестве M.

Пусть p — произвольная точка из M. Обозначим через $M(p)$ пересечение M и всех опорных плоскостей множества M, содержащих точку p. (Если через p нельзя провести ни одной опорной плоскости, то $M(p)$ полагаем равным M.)

ТЕОРЕМА 7. *Для любой точки p ее носитель $M(p)$ есть регулярная часть множества M.*

Доказательство. Прежде всего ясно, что $M(p)$ как пересечение замкнутых выпуклых множеств есть замкнутое выпуклое множество.

Далее, пусть q — произвольная крайняя точка множества $M(p)$. Покажем что она является крайней и для M. Предположим противное. Пусть $q' q''$ — отрезок, целиком принадлежащий множеству M и содержащий q в качестве внутренней точки. Так как q' не принадлежит $M(p)$, то существует такая опорная плоскость P, проходящая через p, которая не содержит точку q'. Но тогда P не содержит и q'', и точки q' и q'' лежат по разные стороны от P, что невозможно. Тоерема доказана.

Замечание. Можно дать еще одно определение носителя точки p в выпуклом множестве M. Именно, рассмотрим совокупность всех отрезков, целиком принадлежащих M и содержащих p в качестве внутренней точки. Объединение всех таких отрезков обозначим через $M^*(p)$. Множество $M^*(p)$, вообще говоря, не замкнуто (см. пример ниже). Его замыкание $\overline{M^*(p)}$ можно было бы назвать носителем точки p в M во втором смысле. Для конечномерного пространства $\overline{M^*(p)}$ (и даже просто $M^*(p)$) совпадает с $M(p)$. Верно ли это в общем случае, нам неизвестно.

Пример. Пусть R — компакт, $F \subset R$ — замкнутое множество и M — совокупность всех мер в R таких, что $\mu(F) = 1$, $\mu(R \setminus F) = 0$. Легко видеть, что M слабо замкнуто. Крайними точками множества M являются меры, каждая из которых целиком сосредоточена в одной точке. Пусть μ — произвольная мера из M такая, что мера каждой отдельной точки множества F равна нулю. Тогда множество $M^*(\mu)$ не замкнуто и не имеет ни одной крайней точки.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ есть совокупность нормированных мер в R. Тогда $\mathfrak{M}$ есть слабо замкнутое выпуклое ограниченное подмножество пространства, сопряженного к C_R и, следовательно, к $\mathfrak{M}$, и к его слабо замкнутым выпуклым подмножествам применимы как теорема Крейна — Мильмана о крайних точках, так и сделанные выше замечания о выпуклых множествах.

Пусть $\hat{\mathfrak{M}}$ — совокупность крайних точек множества $\mathfrak{M}$. Между точками пространства R и элементами множества $\hat{\mathfrak{M}}$ естественно устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Действительно неразложимыми являются те и только те меры в R, каждая из которых сосредоточена целиком в одной точке множества $\mathfrak{M}$. Таким образом, каждой мере $m \in \hat{\mathfrak{M}}$ ставится в соответствие точка $r \in R$, в которой эта мера сосредоточена. Если множество $\hat{\mathfrak{M}}$ рассматривать в слабой топологии пространства $\overline{C}_R$, а пространство R — в заданной в нем топологии, то имеет место следующая

ТЕОРЕМА 8. *R гомеоморфно $\hat{\mathfrak{M}}$.*

Доказательство. Отображение R на $\hat{\mathfrak{M}}$ непрерывно. Действительно, пусть $m_0 \in \hat{\mathfrak{M}}$ и пусть $U(m_0)$ — некоторая окрестность точки m_0. Эта окрестность определяется числом $\varepsilon > 0$ и функциями $f_1, f_2, \ldots, f_n$ из C_R и состоит из тех $m \in \hat{\mathfrak{M}}$, которые удовлетворяют условию:

$$|(m_0 f_i) - (m f_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Но $m_0 f_i$ есть не что иное, как значение функции f_i в точке x_0, соответствующей m_0, а $m f_i$ — значение f_i в точке x, соответствующей m.

Следовательно, неравенство (3) можно записать в виде

$$| f_i(x_0) - f_i(x) | < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Так как функции f_i непрерывны, то существует такое $\delta > 0$, что неравенства (4) выполняются при $\rho(x_0, x) < \delta$. Итак, образ δ-окрестности точки x_0 содержится в $U(m_0)$, что и означает непрерывность рассматриваемого отображения. Мы доказали, что отображение R на $\hat{\mathfrak{M}}$ взаимно однозначно и непрерывно; так как R — компакт, то отсюда следует непрерывность обратного отображения. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, в частности, что $\hat{\mathfrak{M}}$ замкнуто. Вообще говоря, множество крайних точек некоторого замкнутого выпуклого множества даже в трехмерном пространстве не обязательно замкнуто.

Пусть μ — произвольная нормированная мера на R, т. е. произвольная точка из $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{M}(\mu)$ — носитель точки μ в $\mathfrak{M}$. Совокупность крайних точек множества $\mathfrak{M}(\mu)$ есть некоторое подмножество множества $\hat{\mathfrak{M}}$; его гомеоморфный образ в R обозначим через Λ_μ. Легко видеть, что Λ_μ замкнуто. Действительно, гомеоморфное Λ_μ множество $\widehat{\mathfrak{M}(\mu)}$ (совокупность крайних точек множества $\mathfrak{M}(\mu)$) есть пересечение двух компактов $\mathfrak{M}(\mu)$ и $\hat{\mathfrak{M}}$, следовательно, само является компактом. А гомеоморфный образ компакта замкнут в любом пространстве.

Нетрудно показать, что Λ_μ является *минимальным замкнутым множеством в R, удовлетворяющим условию* $\mu(\Lambda_\mu) = 1$.

Было бы интересно решить следующий вопрос: пусть μ — некоторая инвариантная мера в динамической системе с компактным фазовым пространством R и пусть $\mathcal{E}_\mu$ — соответствующее ей, согласно теории Боголюбова — Крылова, эргодическое множество. Тогда, очевидно $\mathcal{E}_\mu \subseteq \Lambda_\mu$. Как можно охарактеризовать геомерически те точки из Λ_μ, которые образуют множество $\mathcal{E}_\mu$?

Поступило
30. IX. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kryloff N. et Bogolioubolf., La théorie générale de la mesure et son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non-linéaire, Ann. of Math. 38 : 1 (1937), 65—113.

[2] Гельфанд И. М. и Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сборник 13 (55) : 2—3 (1943), 301—316.

[3] Oxtoby I. C. and Ulam S. M., On the existence of a measure invariant under a transformation, Ann. of Math. 40 : 3 (1939), 560—566.

[4] Фомин С. В., О конечных инвариантых мерах в динамических системах, Матем. сборник 12 (54) : 1 (1943), 99—108.

[5] Krein M. and Milman D., On extreme points of regular convex sets, Studia Mathem. IX (I) (1940), 133—138.

[6] Pitt H. R., Some generalisations of the ergodic theorem, Proc. Cambr. Philos. Soc. 38 (1942), 325—343.

[7] Bruno de Finetti, Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, Memorie della R. Accademia nazionale dei Lincei, IV (1930), 86—133.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 275—282

Е. С. ЛЯПИН

ПРОСТЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В статье исследуется с различных точек зрения вопрос о простоте коммутативных ассоциативных систем.

Введение

Хорошо известна большая роль простых групп и значение вопроса о простоте в теории групп. Поэтому естественно поставить аналогичные вопросы и в теории ассоциативных систем — молодой алгебраической теории, представляющей собой широкое обобщение теории групп. Однако не вполне очевидно, что должно явиться аналогом простой группы, какую систему целесообразно назвать простой. Естественным обобщением нормального делителя группы является нормальная подсистема. Понятие и некоторые свойства нормальных подсистем были даны мною раньше в работах (1), (2). Понимая под простой системой систему, не имеющую нетривиальных нормальных подсистем, Н. И. Сиверцева (3) исследовала вопрос о простоте системы особенных матриц. С той же точки зрения рассматривал системы подстановок Н. Н. Воробьев (4). Rees (5), исследуя так называемые идеалы ассоциативных систем, называет простой систему, не имеющую нетривиальных идеалов.

В настоящей статье я исследую вопрос о простоте коммутативных ассоциативных систем с обеих вышеуказанных точек зрения. Помимо того, я подхожу к понятию простоты еще с одной точки зрения, которая сейчас представляется мне наиболее естественной. Дело в том, что значение понятия нормального делителя в теории групп объясняется тем, что с помощью различных нормальных делителей описываются все гомоморфизмы группы. В частности, простую группу, т. е. группу, не имеющую нетривиальных нормальных делителей, можно также определить как группу, не имеющую нетривиальных гомоморфизмов. Именно это свойство, как мне кажется, наиболее целесообразно взять за определение простой системы. Поэтому вопрос о простоте ассоциативных коммутативных систем рассматривается в настоящей статье также и с этой точки зрения. Здесь приходится существенно пользоваться понятием нормального комплекса, которое было рассмотрено мною в работе (2). Следует отметить, что в согласии с целью настоящей статьи я ограничиваюсь рассмотрением нормальных подсистем, идеалов и нормальных комплексов лишь для коммутативных ассоциативных систем. Этим и объясняется некоторое отличие в определении этих понятий от того, что имело место в работах (1), (2). То, что

мы здесь имеем дело действительно лишь с частным случаем относительно ([2]), устанавливается без труда. При использовании результатов работы ([2]), доказательства их, естественно, не воспроизводятся, хотя формулировки приведены полностью, так что смысл содержания настоящей работы вполне ясен и без прочтения статьи ([2]).

Примечание 1. Ввиду того, что область исследования настоящей статьи ограничивается исключительно коммутативными ассоциативными системами, мы будем последние для краткости называть просто системами.

Примечание 2. В статье будет использовано следующее обозначение. Если из справедливости утверждения α следует справедливость утверждения β, то мы будем писать $\alpha \to \beta$. Обозначение $\alpha \longleftrightarrow \beta$ равносильно одновременному выполнению $\alpha \to \beta$ и $\beta \to \alpha$.

§ 1. Простейшие исходные понятия

1.1. Определение. *Системой* называется непустое множество элементов с установленным в нем законом умножения, согласно которому каждым двум элементам системы (различным или равным между собою) A и B соответствует третий элемент—их произведение, который обозначается через AB или через BA, причем имеет место свойство ассоциативности:

$$(AB)C = A(BC).$$

Мощность множества всех элементов системы называется ее *порядком*.

1.2. Наравне с произведением элементов мы будем рассматривать произведение множеств элементов, понимая под $\mathfrak{N}\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ суть некоторые множества элементов системы, совокупность всех элементов вида NM, где $N \in \mathfrak{N}$ и $M \in \mathfrak{M}$.

Подмножество $\mathfrak{B}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *подсистемой*, если $\mathfrak{B}\mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}$.

1.3. Если в системе $\mathfrak{A}$ есть элемент E, для которого при любом $X \in \mathfrak{A}$ имеет место $XE = X$, то E называется *единицей системы*.

1.4. Если в системе $\mathfrak{A}$ есть элемент O, для которого при любом $X \in A$ имеет место $XO = O$, то O называется *нулем системы*.

Очевидно, система может иметь не более одной единицы и не более одного нуля.

1.5. Если система имеет нуль O и для некоторого ее элемента X имеет место $X^n = O$ $(n > 0)$, то элемент X называется *нульстепенным*.

1.6. Определение. Отображение φ системы $\mathfrak{A}$ на систему $\mathfrak{B}$ называется *гомоморфизмом* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{B}$, если для любых $X, Y \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$\varphi(XY) = (\varphi X)(\varphi Y).$$

Если отображение φ является взаимно однозначным, то φ называется *изоморфизмом*.

Изоморфные между собой системы равномощны и имеют, по существу, одинаковые законы умножения, поэтому мы обычно не будем различать их между собой, принимая за одну и ту же систему.

1.7. Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{K}$ элементов системы $\mathfrak{A}$ называется *нормальным комплексом системы*, если для любых $A \in \mathfrak{A}$ и $K, K' \in \mathfrak{K}$ имеет место:

$$AK \in \mathfrak{K} \rightarrow AK' \in \mathfrak{K}.$$

1.8. Среди различных нормальных комплексов особую роль играют так называемые нормальные подсистемы и идеалы.

Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{N}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *нормальной подсистемой*, если оно замкнуто относительно умножения и деления (в тех случаях, когда последнее возможно). Иными словами, $\mathfrak{N}$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$, если:

1) $N, N' \in \mathfrak{N} \rightarrow (NN') \in \mathfrak{N}$,

2) $(N \in \mathfrak{N},\ X \in \mathfrak{A},\ NX \in \mathfrak{N}) \rightarrow X \in \mathfrak{N}$.

1.9. Определение. Непустое подмножество $\mathfrak{P}$ системы $\mathfrak{A}$ называется *идеалом*, если $\mathfrak{A}\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$.

1.10. Значение понятий 1.7, 1.8, 1.9 объясняется их связью со свойствами гомоморфизмов систем, о которых мы скажем в § 3. Сейчас мы остановимся лишь на нескольких простейших свойствах нормальных комплексов, нормальных подсистем и идеалов, справедливость которых доказана в ([2]), да и непосредственно доказывается без всякого труда.

1.10.1. Нормальная подсистема и идеал являются нормальными комплексами.

1.10.2. Сама система является одновременно своим нормальным комплексом, нормальной подсистемой и идеалом.

1.10.3. Всякий отдельный элемент является нормальным комплексом системы.

1.10.4. Если система имеет единицу, то единица является нормальной подсистемой.

1.10.5. Если система имеет нуль, то нуль является идеалом системы.

1.10.6. Нормальная подсистема, отличная от самой системы, никогда не является ее идеалом.

1.10.7. Если нормальный комплекс содержит нуль системы, то он является идеалом.

1.11. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная система. Рассмотрим множество $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup E$, где E — новый элемент. В $\mathfrak{A}'$ определяем действие, которое совпадает с действием в $\mathfrak{A}$ для элементов из $\mathfrak{A}$, а для E имеет место:

$$EA = A, \quad E^2 = E \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Очевидно, $\mathfrak{A}'$ есть система, которую будем называть *системой $\mathfrak{A}$ с внешне присоединенной единицей E* (очевидно, E есть единица системы $\mathfrak{A}'$).

1.12. Рассмотрим также множество $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} \cup O$, где O — новый элемент. Аналогично 1.11, определяем в $\mathfrak{A}''$ действие, совпадающее с действием в $\mathfrak{A}$ для элементов из $\mathfrak{A}$, причем для O имеет место

$$OA = O, \quad O^2 = O \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Систему $\mathfrak{A}''$ будем называть *системой* $\mathfrak{A}$ *с внешне присоединенным нулем* O (очевидно, O есть нуль системы $\mathfrak{A}''$).

1.13. В дальнейшем нам понадобится перечень всех систем первого и второго порядков. Первого порядка, очевидно, существует лишь одна система, которую будем называть *единичной системой* или *единичной группой*. Второго порядка существуют три системы:

1.13.1. Циклическая группа второго порядка.

1.13.2. Система $\mathfrak{V}$, состоящая из элементов V и O с правилом умножения:

$$V^2 = V, \quad OV = O, \quad O^2 = O.$$

Очевидно, $\mathfrak{V}$ можно рассматривать как единичную систему с внешне присоединенным нулем, а также как единичную систему с внешне присоединенной единицей.

1.13.3. Система $\mathfrak{W}$, состоящая из элементов W и O, с правилом умножения:

$$W^2 = O, \quad WO = O, \quad O^2 = O.$$

Легко показать, что все три системы не изоморфны между собой и что не существует иных систем второго порядка.

1.14. Рассмотрим нормальные комплексы систем второго порядка. Циклическая группа второго порядка, как и всякая группа простого порядка, не имеет нетривиальных нормальных комплексов, кроме единицы, являющейся, согласно 1.10.4, ее нормальной подсистемой.

Нормальные комплексы системы $\mathfrak{V}$ (1.13.2) и $\mathfrak{W}$ (1.13.3) также тривиальны (т. е. принадлежат типам 1.10.2 и 1.10.3). Отметим, однако, что $\mathfrak{V}$ имеет одну нетривиальную (т. е. отличную от самой системы) нормальную подсистему, состоящую из одного элемента V, и один нетривиальный идеал, состоящий из нуля O.

Система $\mathfrak{W}$ не имеет нетривиальных нормальных подсистем и обладает одним нетривиальным идеалом, состоящим из нуля O.

§ 2. Существование в системах нетривиальных нормальных комплексов, нормальных подсистем и идеалов

2.1. В 1.10.2 и 1.10.3 мы уже указывали на некоторые тривиальные нормальные комплексы, которые имеются во всякой системе. Естественно поставить вопрос: для каких систем эти тривиальные нормальные комплексы являются единственными нормальными комплексами? Цель этого параграфа — ответить на этот вопрос, так же как и на аналогичные вопросы о системах, имеющих лишь тривиальные нормальные подсистемы. Естественно, мы считаем известными ответы на эти вопросы для абелевых групп.

2.2. ТЕОРЕМА. *Группы суть единственные системы, не имеющие идеалов, отличных от самой системы.*

Группы с внешне присоединенным нулем (1.12), *единичная система и система* $\mathfrak{W}$ (1.13.3) *суть единственные системы с нулем, не имеющие идеалов, отличных от нуля и от самой системы.*

Доказательство. — 1°. Пусть $\mathfrak{A}$ — система, не имеющая идеалов, отличных от $\mathfrak{A}$. Пусть X и Y — два произвольных элемента системы $\mathfrak{A}$.

Множество $X\mathfrak{A}$, как легко видеть, является идеалом системы $\mathfrak{A}$. Следовательно, должно иметь место $X\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$. Но отсюда следует, что при некотором $Z \in \mathfrak{A}$ имеет место $XZ = Y$. Разрешимость же этого уравнения относительно Z при любых X и Y и означает, по определению, что $\mathfrak{A}$ есть группа.

2°. Пусть $\mathfrak{A}$ есть неединичная система с нулем O, не имеющая других идеалов, кроме $\mathfrak{A}$ и O. Сопоставим каждому элементу $X \in \mathfrak{A}$ множество элементов $\mathfrak{M}_X$, состоящее из всех таких элементов $M \in \mathfrak{A}$, для которых справедливо $MX = O$. Очевидно, $\mathfrak{M}_X$ содержит O и является идеалом системы $\mathfrak{A}$. Поэтому, согласно предположению, возможно одно из двух: или $\mathfrak{M}_X = O$ или $\mathfrak{M}_X = \mathfrak{A}$.

Предположим, что для некоторого $X \neq O$ имеет место $\mathfrak{M}_X = \mathfrak{A}$. Тогда для всякого $A \in \mathfrak{A}$ имеем $AX = O$ (поскольку $A \in \mathfrak{M}_X$), откуда следует, что совокупность двух элементов X и O образует идеал системы $\mathfrak{A}$. Этот идеал, будучи отличен от нуля, должен совпадать с $\mathfrak{A}$. Следовательно, в этом случае порядок $\mathfrak{A}$ равен двум и $\mathfrak{A}$, согласно 1.13, изоморфна системе $\mathfrak{W}$ (1.13.3).

Теперь предположим, что все $\mathfrak{M}_X$ состоят лишь из O. В этом случае, очевидно произведение двух любых ненулевых элементов системы $\mathfrak{A}$ отлично от нуля. Следовательно, множество всех ненулевых элементов, которое обозначим через $\mathfrak{B}$, является подсистемой системы $\mathfrak{A}$. Систему $\mathfrak{A}$ тогда можно рассматривать как систему $\mathfrak{B}$ с внешне присоединенным нулем O. Докажем, что $\mathfrak{B}$ есть группа. Пусть $\mathfrak{P}$ — некоторый идеал $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{P} \cup O$, очевидно, является идеалом системы $\mathfrak{A}$ и, следовательно, $\mathfrak{P} \cup O = \mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{P} = \mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{B}$ есть система с единственным идеалом $\mathfrak{B}$, то она, согласно 1°, является группой.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\mathfrak{A}$ есть группа $\mathfrak{B}$ с внешне присоединенным нулем O. Пусть $\mathfrak{P}$ — идеал $\mathfrak{A}$, отличный от нуля, $P \in \mathfrak{P}$, $P \neq O$ и B — произвольный элемент из $\mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ есть группа, то для $P \in \mathfrak{B}$ найдется элемент $X \in \mathfrak{B}$ такой, что $XP = B$. Но $XP \in X\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}$. Следовательно, $B \in \mathfrak{P}$. Так как $O \in \mathfrak{P}$, то отсюда вытекает, что $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$.

2.3. ТЕОРЕМА. *Циклические группы, порядок которых есть простое число или единица, и системы второго порядка* $\mathfrak{B}$ (1.13.2) *и* $\mathfrak{W}$ (1.13.3) *суть единственные системы, которые не имеют других нормальных комплексов, кроме самой системы и отдельных элементов.*

Доказательство. Справедливость утверждения для упомянутых групп известна. Что касается систем $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{W}$, то, поскольку их порядок равен двум, они вообще не имеют подмножеств, отличных от самих себя и содержащих более одного элемента.

Покажем, что не существует других систем, удовлетворяющих требуемому свойству. Прежде всего напомним (1.13), что все системы порядка один и два находятся в числе указанных в теореме. Пусть $\mathfrak{A}$ есть система порядка, больше двух, обладающая рассматриваемым свойством. Если $\mathfrak{A}$ не имеет нуля, то, не обладая идеалами, отличными от $\mathfrak{A}$, она, согласно (2.3), является группой. Если $\mathfrak{A}$ имеет нуль, то, не обладая идеалами, отличными от O и от $\mathfrak{A}$, она, согласно (2.2), является группой $\mathfrak{B}$ с внешне присоединенным нулем. В этом случае $\mathfrak{B}$ является нормальным комплеском $\mathfrak{A}$, ибо $AB \in \mathfrak{B} \to A \neq O \to A \in \mathfrak{B} \to AB' \in \mathfrak{B}$ $(A \in \mathfrak{A};\ B,\ B' \in \mathfrak{B})$.

Поскольку порядок $\mathfrak{A}$ больше единицы, получается, что $\mathfrak{A}$ обладает нормальным комплексом $\mathfrak{B}$, содержащим более одного элемента и отличным от $\mathfrak{A}$, что противоречит предположению.

2.4. ТЕОРЕМА. *Для того чтобы система не имела нормальных подсистем, отличных от самой системы, необходимо и достаточно, чтобы она имела нуль и чтобы все ее элементы были нульстепенны.*

Для того чтобы система с единицей, не являющаяся группой, не имела нормальных подсистем, отличных от единицы и от самой системы, необходимо и достаточно, чтобы она имела нуль и чтобы все ее неединичные элементы были нульстепенны.*

Доказательство. — 1°. Пусть $\mathfrak{N}$ есть нормальная подсистема системы $\mathfrak{A}$, обладающей нулем O, все элементы которой нульстепенны. Пусть X — некоторый элемент из $\mathfrak{N}$. Поскольку $\mathfrak{N}$ является подсистемой, все степени X принадлежат $\mathfrak{N}$. Так как X нульстепенен, то $\mathfrak{N}$ содержит O. Следовательно, $\mathfrak{N}$ является идеалом (1.10.7). Но, как мы знаем (1.10.6), единственной нормальной подсистемой, являющейся одновременно идеалом, является сама система.

2°. Пусть система $\mathfrak{A}$ не имеет нормальных подсистем, кроме самой $\mathfrak{A}$. Возьмем произвольный элемент $A \in \mathfrak{A}$. Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{B}$ таких элементов X, для каждого из которых найдутся такие натуральные числа k, l, что $XA^{2k} = A^{2l}$. Множество $\mathfrak{B}$ не пусто, так как оно содержит, например A^2. Покажем, что $\mathfrak{B}$ есть нормальная подсистема. Действительно,

$$1.\ (B_1,\ B_2 \in \mathfrak{B}) \to (B_1A^{2k_1} = A^{2l_1},\ B_2A^{2k_2} = A^{2l_2}) \to$$
$$\to B_1B_2A^{2(k_1+k_2)} = A^{2(l_1+l_2)} \to (B_1B_2) \in \mathfrak{B},$$

$$2.\ (B_1,\ B_2 \in \mathfrak{B},\ B_1X = B_2) \to (B_1A^{2k_1} = A^{2l_1},\ B_2A^{2k_2} = A^{2l_2},\ B_1X = B_2) \to$$
$$\to XA^{2(l_1+k_2)} = XA^{2l_1}A^{2k_2} = XB_1A^{2k_1}A^{2k_2} = B_2A^{2k_2}A^{2k_1} =$$
$$= A^{2(l_2+k_1)} \to X \in \mathfrak{B}.$$

Так как $\mathfrak{A}$ не имеет нормальных подсистем, кроме себя самой, то $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Отсюда, в частности, следует, что $AA^{2k} = A^{2l}$. Обозначим через n наименьшее из чисел $2k+1$ и $2l$, а через m — разность между наибольшим и наименьшим числом. Тогда можно записать: $A^nA^m = A^n$.

Введем в рассмотрение множество $\mathfrak{C}$ всех таких элементов $X \in \mathfrak{A}$, что $XA^n = A^n$. Это множество не пусто, так как оно содержит A^m. Покажем, что $\mathfrak{C}$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$. Действительно:

$$1.\ X_1, X_2 \in \mathfrak{C} \to X_1A^n = X_2A^n = A^n \to X_1X_2A^n = A^n \to (X_1X_2) \in \mathfrak{C},$$

$$2.\ (X_1,\ X_2 \in \mathfrak{C};\ X_1Y = X_2) \to YA^n = YX_1A^n = X_2A^n = A^n \to Y \in \mathfrak{C}.$$

Следовательно, $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$. Но тогда для всякого элемента $Z \in \mathfrak{A}$ должно иметь место $ZA^n = A^n$, а это означает, что A^n есть нуль системы $\mathfrak{A}$ и что A есть нульстепенный элемент.

---

* При проведении доказательства настоящей теоремы я воспользовался ценными замечаниями, сделанными А. Г. Курошем и Е. Л. Полоцким.

3°. Пусть $\mathfrak{A}$ есть система, обладающая единицей E и нулем O, все неединичные элементы которой нульстепенны. Пусть $\mathfrak{N}$ есть некоторая нормальная подсистема $\mathfrak{A}$, отличная от E. Если $X \in \mathfrak{N}$, $X \neq E$, то при некотором $n > 0$ имеет место $O = X^n \in \mathfrak{N}$. Следовательно, по 1.10.7 и 1.10.6, $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$.

4°. Пусть $\mathfrak{A}$ есть система с единицей E, не имеющая нормальных подсистем, кроме $\mathfrak{A}$ и E. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех ее обратимых элементов, т. е. таких элементов X, для каждого из которых найдется свой $\overline{X} \in \mathfrak{A}$ такой, что $X\overline{X} = E$. Очевидно, $\mathfrak{B}$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$, ибо

1. $(B_1, B_2 \in \mathfrak{B}) \to (B_1\overline{B}_1 = B_2\overline{B}_2 = E) \to (B_1B_2)\ (\overline{B}_1\overline{B}_2) = E \to (B_1B_2) \in \mathfrak{B}$,

2. $(\in_2 B, B_1.\mathfrak{B};\ B_1A = B_2) \to A\,(B_1\overline{B}_2) = B_2\overline{B}_2 = E \to A \in \mathfrak{B}$.

Следовательно, имеет место одно из двух: либо $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, либо $\mathfrak{B} = E$. В первом случае $\mathfrak{A}$ есть группа. Рассмотрим второй случай. Поскольку в этом случае $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{A} \setminus E)$ есть подсистема $\mathfrak{A}$, то система $\mathfrak{A}$, очевидно, является системой $\mathfrak{Z}$ с внешне присоединенной единицей (1.12). Пусть $\mathfrak{N}$ есть некоторая нормальная подсистема $\mathfrak{Z}$. Утверждаем, что $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cup E$ есть нормальная подсистема системы $\mathfrak{A}$. Действительно, то, что $\mathfrak{N}'$ замкнуто относительно умножения, очевидно. Пусть $N_1', N_2' \in \mathfrak{N}'$, $XN_1' = N_2'$, $X \neq E$. Если $N_1' = E$, то $X = N_2' \in \mathfrak{N}'$. Если $N_1' \neq E$, то $N_2' = XN_1' \neq E$ (ибо $\mathfrak{B} = E$), т. е. $X, N_1', N_2' \in \mathfrak{Z}$. Так как $\mathfrak{N}'$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{Z}$, то в этом случае $X \in \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$.

Так как $\mathfrak{N}' \neq E$, то должно иметь место $\mathfrak{N}' = \mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{N} = \mathfrak{Z}$. Следовательно, $\mathfrak{Z}$ есть система, не имеющая нормальных подсистем, кроме $\mathfrak{Z}$. Согласно 2°, $\mathfrak{Z}$ обладает нулем O, который, очевидно, является нулем и для $\mathfrak{A} = \mathfrak{Z} \cup E$, причем все элементы из $\mathfrak{Z}$ нульстепенны.

2.5. При доказательстве теоремы 2.4 мы отметили, что система с единицей и нулем, все неединичные элементы которой нульстепенны, может быть получена путем внешнего присоединения единицы (1.11) к системе с нулем, все элементы которой нульстепенны. Это дает возможность очевидным образом видоизменить формулировку второй части теоремы 2.4.

2.6. Для иллюстрации теоремы 2.4 рассмотрим следующую конкретную систему. Элементами системы являются R_α, где α принимает любые рациональные значения, такие, что $0 < \alpha \leqslant 1$. Умножение определяется формулой:

$$R_\alpha R_\beta = \begin{cases} R_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \leqslant 1, \\ R_1, & \text{если } \alpha + \beta > 1. \end{cases}$$

Очевидно, R_1 является нулем системы, а все ее элементы нульстепенны.

§ 3. Простота систем

3.1. Мы уже упоминали, что значение понятий нормального комплекса, нормальной подсистемы и идеала объясняется связью этих понятий со свойствами гомоморфизмов систем. Указанная связь специально рассматривалась в моей работе (²).

Приведем полученные там результаты относительно указанного вопроса.

3.2. ТЕОРЕМА. *Пусть $\mathfrak{K}$ есть подмножество системы $\mathfrak{A}$. Для того чтобы существовал гомоморфизм φ системы $\mathfrak{A}$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный*

прообраз одного из элементов $\varphi\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ был нормальным комплексом.

Для того чтобы существовал гомоморфизм φ системы $\mathfrak{A}$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз единицы системы $\varphi\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{K}$ была нормальной подсистемой.

3.3. Из приведенной теоремы 3.2 и результатов § 2 непосредственно следует существование почти во всякой системе как общих, так и некоторых частных нетривиальных гомоморфизмов.

Всякая система обладает следующими тривиальными гомоморфизмами. Это, во-первых, изоморфизмы. Во-вторых, отображение системы на единичную систему, являющееся всегда гомоморфизмом, который назовем *аннулирующим*. Эти тривиальные гомоморфизмы будем называть *несобственными*. Прочие гомоморфизмы — *собственными*.

Определение. *Система, не имеющая собственных гомоморфизмов, называется простой.*

Из теорем 2.3 и 3.2 непосредственно вытекает следующая.

ТЕОРЕМА. *Циклические группы, порядок которых есть простое число или единица, и системы второго порядка $\mathfrak{B}$ (1.13.2) и $\mathfrak{W}$ (1.13.3) суть единственные простые системы.*

3.4. ТЕОРЕМА. *Всякая система $\mathfrak{A}$, не являющаяся группой, обладает гомоморфизмом φ, отличным от аннулирующего, таким, что $\varphi\mathfrak{A}$ имеет нуль.*

Всякая система $\mathfrak{A}$, обладающая нулем и отличная от единичной системы и от систем $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{B}$, обладает собственным гомоморфизмом φ таким, что $\varphi\mathfrak{A}$ имеет нуль.

3.5. ТЕОРЕМА. *У систем $\mathfrak{A}$, обладающих нулем, все элементы которых нульстепенны, и только у этих систем аннулирующий гомоморфизм есть единственный гомоморфизм φ такой, что $\varphi\mathfrak{A}$ имеет единицу.*

Справедливость теорем 3.4 и 3.5 следует из 2.2, 2.3, 2.4 и 3.2.

В заключение напомним, что, как уже было упомянуто, свойства систем, рассмотренные в теоремах 3.4, 3.5 (или, что то же самое — в теоремах 2.2 и 2.4), иногда принимают в качестве определения простоты системы.

Поступило
3. I. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпин Е. С., Ядра гомоморфизмов ассоциативных систем, Матем. сборн., 20 (62) : 3 (1947), 497—515.

[2] Ляпин Е. С., Нормальные комплексы ассоциативных систем, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 179—192.

[3] Сиверцева Н. И., О простоте ассоциативной системы особенных квадратных матриц, Матем. сборн., 24 (66) : 1 (1949), 101—106.

[4] Воробьев Н. Н., Нормальные подсистемы конечной симметрической ассоциативной системы, Доклады Ак. Наук СССР, 58, № 9 (1947), 1877—1879;

[5] Rees D., On semi-groups, Proc. of Cambridge Phil. Soc., 36 (1940), 387—400;

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 283—295

М. В. ЯКОВКИН

О НЕКОТОРЫХ КРИТЕРИЯХ НЕПРИВОДИМОСТИ ПОЛИНОМОВ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В настоящей статье даются критерии неприводимости полиномов от одной переменной в поле рациональных чисел, основанные на арифметической природе значений этих полиномов в одной или двух точках.

1°. В 1919 г. Полиа (9) нашел, что если целочисленный полином степени $n \geqslant 17$ при n различных целых значениях аргумента принимает значения, по абсолютной величине равные одному и тому же простому числу p, то этот полином неприводим в поле рациональных чисел или разлагается на произведение двух полиномов одинаковой степени.

Позднее Дорварт и Оре в совместной работе (7) (теорема 16) доказали, что упоминаемый результат Полиа (9) имеет место и для $n > 10$.

Почти одновременно с Дорвартом и Оре Брауер (6) доказал, что теорема Полиа верна для $n > 6$ и уже неверна для $n = 6$.

В 1939 г. нами было найдено (2), что независимо от степени n равенство простому числу p целочисленного полинома даже в *одной* точке уже вполне определяет его неприводимость. Причем этой точкой может быть *любая целая*, за исключением, может быть, лишь некоторого конечного их числа.

Ниже мы доказываем улучшения или обобщения наших предыдущих результатов в этом направлении. В частности, например, из теорем 1 и 3 вытекают некоторые критерии неприводимости, опубликованные нами в работах (2), (3), (4).

Полиа в другой теореме для установления неприводимости целочисленных полиномов использовал арифметические свойства значений этих полиномов уже не в одной, а в двух точках. Эта теорема Полиа, а также вытекающий из нее критерий неприводимости Кона нашли отражение в некоторых учебниках высшей алгебры [см. (1), стр. 109—118].

В недавней работе (5) рассуждениями, более простыми чем у Полиа и Кона, мы доказали предложения, обобщающие их критерии неприводимости.

В теореме 2 предлагаемой статьи содержится одно из обобщений критериев неприводимости Полиа и Кона.

2°. Прежде всего следует сделать две оговорки, относящиеся ко всем предложениям настоящей статьи, хотя по самому существу рассматриваемых предложений эти оговорки являются и тривиальными:

1) там, где нет соответствующей обратной оговорки, „делители“ или „множители“ данного числа ((полинома))*, совпадающие с ним или отличающиеся от него только знаком ((постоянным множителем)), из рассмотрения исключаются;

2) под словом „сомножители“ рассматриваемого числа ((полинома)) мы подразумеваем по крайней мере два, оговоренных выше, делителя или множителя данного числа ((полинома)), произведение которых равно самому числу ((полиному)).

ТЕОРЕМА 1. *Если целочисленный полином $f(x)$ степени n имеет делитель $\varphi(x)$ m-й степени из поля рациональных чисел, то целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ должно иметь по крайней мере два сомножителя, по абсолютной величине превышающих соответственно $|qt|^m$ и $|qt|^{n-m}$, где $\frac{p}{q}$ — любое рациональное число, имеющее окрестность радиуса t без вещественных частей корней $f(x)$.*

Доказательство. Согласно условию теоремы, $\varphi(x)$ является делителем полинома $f(x)$. Это означает, что существует еще один полином $\psi(x)$ из поля рациональных чисел не нулевой степени, удовлетворяющий равенству

$$f(x) = \varphi(x)\psi(x). \tag{1}$$

Но тогда, по известной лемме Гаусса, должно иметь место аналогичное равенство и для соответствующих целочисленных полиномов. Обозначив через $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ целочисленные полиномы, соответствующие полиномам $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из поля рациональных чисел, мы вправе для них написать следующее тождество относительно переменной x:

$$f(x) = \varphi_0(x)\psi_0(x). \tag{2}$$

По условию теоремы, степень полинома $\varphi(x)$, а значит, и степень полинома $\varphi_0(x)$, равна m; следовательно, степень полинома $\psi(x)$ и полинома $\psi_0(x)$ будет $n-m$ и, по условию, отлична от нуля.

Перепишем равенство (2) в другой форме:

$$f(x) = b_\varphi \prod_\varphi \{(x-\gamma_\varphi)[(x-\alpha_\varphi)^2+\beta_\varphi^2]\}\, b_\psi \prod_\psi \{(x-\gamma_\psi)[(x-\alpha_\psi)^2+\beta_\psi^2]\}, \tag{3}$$

где b_φ, b_ψ — старшие коэффициенты, $\gamma_\varphi, \gamma_\psi$ — вещественные, а $\alpha_\varphi \pm \beta_\varphi i$, $\alpha_\psi \pm \beta_\psi i$ — комплексные корни соответственно полиномов $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$.

При значении аргумента x, равном рациональному числу $\frac{p}{q}$, взятому из условия теоремы, из равенства (3) получаем

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = b_\varphi \prod_\varphi \left\{\left(\frac{p}{q}-\gamma_\varphi\right)\left[\left(\frac{p}{q}-\alpha_\varphi\right)^2+\beta_\varphi^2\right]\right\}\cdot$$
$$\prod_\psi \left\{\left(\frac{p}{q}-\gamma_\psi\right)\left[\left(\frac{p}{q}-\alpha_\psi\right)^2+\beta_\psi^2\right]\right\}. \tag{4}$$

Это же равенство можно переписать в другой, более короткой форме:

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \varphi_0\left(\frac{p}{q}\right)\psi_0\left(\frac{p}{q}\right) \tag{5}$$

* Двойные скобки (( )) всюду выражают объединенные формулировки двух сходных предложений.

или после умножения обеих частей на $q^n = q^m q^{n-m}$ в виде

$$q^n f\left(\frac{p}{q}\right) = \left[q^m \varphi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right] \left[q^{n-m} \psi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right]. \qquad (6)$$

Поскольку рациональное число $\frac{p}{q}$ имеет окрестность радиуса t без вещественных частей $(\gamma_\varphi, \gamma_\psi, \alpha_\varphi, \alpha_\psi)$ корней $f(x)$, очевидно, будут справедливы следующие неравенства:

$$\left|\frac{p}{q} - \gamma_\varphi\right| > t, \quad \left|\frac{p}{q} - \gamma_\psi\right| > t, \quad \left|\frac{p}{q} - \alpha_\varphi\right| > t, \quad \left|\frac{p}{t} - \alpha_\psi\right| > t. \qquad (7)$$

Из (7), (4) и (5) вытекает справедливость следующих двух неравенств:

$$\left|\varphi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right| > |b_\varphi| t^m \text{ и } \left|\psi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right| > |b_\psi|^{n-m} \qquad (8)$$

или после умножения соответственно на $|q|^m$ и $|q|^{n-m}$

$$\left.\begin{aligned} &\left|q^m \varphi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right| > |b_\varphi| \, |qt|^m \geqslant |qt|^m \\ \text{и} \\ &\left|q^{n-m} \psi_0\left(\frac{p}{q}\right)\right| > |b_\psi| \, |qt|^{n-m} \geqslant |qt|^{n-m}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Сопоставляя равенство (6) и неравенства (9), мы вправе заключить, что целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ имеет по крайней мере два целых сомножителя, по абсолютной величине превышающих соответственно $|qt|^m$ и $|qt|^{n-m}$.

3°. Из доказанной теоремы можно получить некоторые следствия, представляющие самостоятельный интерес.

В частности, при рациональном значении $x = \frac{p}{q}$, не принадлежащем окрестностям радиуса $t \geqslant \frac{1}{q}$ вещественных частей всех корней целочисленного полинома $f(x)$ n-й степени, мы имеем:

Следствие 1. Если целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ не имеет делителя, по абсолютной величине превышающего $|qt|^m$ $(1 < m < n)$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел не может иметь делителя степени m и выше.

Следствие 2. Если целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ не имеет по крайней мере двух сомножителей, по абсолютной величине превышающих $|qt|^m$ $\left(1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}\right)$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел не может иметь делителя степени s $\left(m \leqslant s \leqslant \frac{n}{2}\right)$.

Следствие 3. Если целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ не имеет делителя, по абсолютной величине превышающего $|qt|^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 4. Если целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ не имеет по крайней мере двух сомножителей, по абсолютной величине превышающих $|qt|$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 5. Если целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ не имеет по крайней мере двух сомножителей, по абсолютной величине превышающих $|qt|^2$, и если $f(x)$ не имеет рациональных корней, то этот полином в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 6. Если целое число $q^n f\left(\frac{p}{q}\right)$ простое или не большее $|qt|^{n-\left[\frac{n}{2}\right]}$, то $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел.

Из следствия 3, а также из следствий 4 и 6 данной теоремы при $t=1$ вытекает первая теорема нашей работы ([3]).

Примечание 1. Если $f\left(\frac{p-1}{q}\right) \neq 0$, то требования $\left|\frac{p}{q}-\gamma\right|>t$ и $\left|\frac{p}{q}-\alpha\right|>t$ к рациональному числу $\frac{p}{q}$ в условии данной теоремы можно заменить следующими, более слабыми: $\left|\frac{p}{q}-\gamma\right| \geqslant t$ и $\left|\frac{p}{q}-\alpha\right| \geqslant t$.

Примечание 2. Эта теорема может быть обобщена для любого конечного числа сомножителей целочисленных функций.

4°. ЛЕММА 1. *Для всякого полинома $f(x)$ с вещественными коэффициентами при вещественных значениях аргумента $x=x_0 \pm h$ $(h>0$ имеют место неравенства:*

$$|f(x_0-h)|<|f(x_0+h)|, \quad \text{если } x_0 \geqslant R^*,$$

$$|f(x_0-h)|>|f(x_0+h)|, \quad \text{если } x_0 \leqslant R_*,$$

где R_* и R^* — соответственно нижняя и верхняя границы вещественных частей корней $f(x)$.

Доказательство. Обозначив через a_0, γ_f и $\alpha_f \pm \beta_f i$ соответственно старший коэффициент, вещественные и комплексные корни рассматриваемой целой рациональной функции $f(x)$, мы вправе написать следующее равенство:

$$f(x)=a_0 \prod_f (x_0-\gamma_f) \prod_f [(x-\alpha_f)^2+\beta_f^2], \tag{10}$$

откуда при $x=x_0-h$ и $x=x_0+h$ получаем

$$|f(x_0-h)|=|a_0| \prod_f |x_0-h-\gamma_f| \prod_f |(x_0-h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|, \tag{11}$$

$$|f(x_0+h)|=|a_0| \prod_f (x_0-h-\gamma_f| \prod_f |(x_0+h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|. \tag{12}$$

Для простоты дальнейших рассуждений мы будем исходить из элементарных геометрических соображений, основанных на взаимном расположении на числовой оси вещественных чисел, фигурирующих в равенствах (11) и (12).

В случае $x_0 \geqslant R^*$ все точки γ_f и α_f на вещественной оси лежат ближе к точке x_0-h, чем к точке x_0+h и, следовательно, расстояния $|x_0-h-\gamma_f|$ и $|x_0-h-\alpha_f|$ всех точек γ_f и α_f до точки x_0-h будут меньше, чем расстояния $|x_0+h-\gamma_f|$ и $|x_0+h-\alpha_f|$ соответствующих точек γ_f и α_f до точки x_0+h. Но тогда каждый множитель $|x_0-h-\gamma_f|$ и $|(x_0-h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|$ правой части равенства (11) меньше соответствующего множителя $|x_0+h-\gamma_f|$ и $|(x_0+h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|$ правой части равенства (12) и, значит, мы вправе заключить что в этом случае для левых частей этих равенств имеет место неравенство

$$|f(x_0-h)|<|f(x_0+h)|. \tag{13}$$

В случае $x_0 \leqslant R_*$, наоборот, все точки γ_f и α_f на вещественной оси лежат ближе к точке x_0+h, чем к точке x_0-h и, значит, расстояния $|x_0-h-\gamma_f|$ и $|x_0-h-\alpha_f|$ всех точек γ_f и α_f до точки x_0-h больше, чем расстояния $|x_0+h-\gamma_f|$ и $|x_0+x-\alpha_f|$ соответствующих точек γ_f и α_f до точки x_0+h. Но тогда каждый множитель $|x_0-h-\gamma_f|$ и $|(x_0-h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|$ правой части равенства (11) больше соответствующего множителя $|x_0+h-\gamma_f|$ и $|(x_0+h-\alpha_f)^2+\beta_f^2|$ правой части равенства (12) и, следовательно, мы вправе заключить, что в этом случае для левых частей этих равенств имеет место неравенство

$$|f(x_0-h)|>|f(x_0+h)|. \tag{14}$$

Следствие. Для всякого целочисленного полинома $f(x)$ n-й степени при рациональных значениях $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ справедливы следующие неравенства:

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|<\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right|, \text{ если } \frac{p_1}{q_1}\geqslant R^*-\frac{p_2}{2q_2}, \tag{15}$$

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|<\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right|, \text{ если } \frac{p_1}{q_1}\leqslant R_*+\frac{p_2}{2q_2}. \tag{16}$$

Это следствие вытекает из данной леммы при рациональных значениях $x_0=\frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{2q_2}$ и $h=\frac{p_2}{2q_2}$ в результате умножения обеих частей полученных неравенств на $\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n$.

Из леммы 1 при $x_0=k-\frac{1}{2}$ и $h=\frac{1}{2}$ мы получаем лемму, приведенную в учебнике высшей алгебры Г. М. Шапиро [(4), стр. 109].

5°. ТЕОРЕМА 2. *Если целочисленный полином $f(x)$ степени n имеет делитель $\varphi(x)$ m-й степени из поля рациональных чисел и $\left|q_1^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|>l^2$ $(l\geqslant 0)$, то целое число*

$$\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{q_2}\right) \quad \begin{matrix}\left(+,\ \textit{если}\ \frac{p_1}{q_1}\geqslant R^*-\frac{p_2}{2q_2}\right) & \text{(I)}\\ \left(-,\ \textit{если}\ \frac{p_1}{q_1}\leqslant R_*+\frac{p_2}{2q_2}\right) & \text{(II)}\end{matrix} \tag{17}$$

должно иметь по крайней мере один целый делитель, превышающий

$$(l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^m \ \textit{или}\ \ (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^{n-m}.$$

Доказательство. По условию теоремы целочисленный полином $f(x)$ имеет делитель $\varphi(x)$, следовательно, существует еще один полином $\psi(x)$ из поля рациональных чисел, удовлетворяющий тождеству

$$f(x)=\varphi(x)\,\psi(x). \tag{18}$$

Но тогда, по известной лемме Гаусса, должно иметь место аналогичное тождество

$$f(x)=\varphi_0(x)\,\psi_0(x) \tag{19}$$

и для целочисленных полиномов $\varphi_0(x)$ степени m и $\psi_0(x)$ степени $n-m\geqslant 1$, соответствующих полиномам $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из поля рациональных чисел.

По условию теоремы, $\left|q_1^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| > l^2$, поэтому из тождества (19) следует по крайней мере одно из двух неравенств:

$$\left|q_1^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| > l \text{ или } \left|q_1^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| > l. \tag{20}$$

Так как полиномы $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ целочисленные и l — целое число, то, в силу (20), должно иметь место по крайней мере одно из следующих соотношений:

$$\left|q_1^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant l+1, \quad \left|q_1^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant l+1 \tag{21}$$

или после умножения обеих частей соответственно на $\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^m$ и $\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^{n-m}$:

$$\begin{gathered}\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^m, \\ \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right| \geqslant (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^{n-m}.\end{gathered} \tag{22}$$

Случай I. Применяя следствие из леммы 1 к каждой из целочисленных функций $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ по отдельности, мы получим неравенства

$$\begin{gathered}\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|, \\ \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|.\end{gathered} \tag{23}$$

Тогда из (22) и (23) непосредственно вытекает по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$\begin{gathered}\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^m, \\ \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^{n-m}.\end{gathered} \tag{24}$$

Положив в тождестве (19) $x = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2}$ и умножив затем обе части на

$$\left|\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^n = \left|\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^m \left|\frac{q_1 q_2}{(p_1;\, q_2)}\right|^{n-m},$$

приходим к следующему равенству:

$$\begin{gathered}\left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| = \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right| \cdot \\ \cdot \left|\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)\right|.\end{gathered} \tag{25}$$

Сопоставляя неравенства (24) с равенством (25), мы видим, что целое число $\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\right)$ имеет по крайней мере один делитель, превышающий

$$\text{или} \quad (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^m \quad \text{или} \quad (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\, q_2)}\right|^{n-m}.$$

Случай II. Применяя следствие из леммы 1 к каждой из целочисленных функций $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ по отдельности, мы получим неравенства

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|,$$
$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\right)\right|. \qquad (26)$$

Тогда из (22) и (26) непосредственно вытекает по крайней мере одно из следующих неравенств:

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^m,$$
$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^{n-m} \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right| > (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^{n-m}. \qquad (27)$$

Положив в тождестве (19) $x=\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}$ и умножив затем обе части на

$$\left|\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^n = \left|\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^m \cdot \left|\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^{n-m},$$

приходим к следующему равенству:

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right| =$$
$$= \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right| \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)\right|. \qquad (28)$$

Сопоставляя неравенства (27) с равенством (28), видим, что целое число $\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}-\frac{p_2}{q_2}\right)$ имеет по крайней мере один делитель, превышающий

$$(l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^m \quad \text{или} \quad (l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^{n-m}.$$

Таким образом, справедливость теоремы доказана для обоих случаев.

6°. Приведем некоторые следствия, вытекающие из теоремы 2.

Следствие 1. Если целое число (17) не имеет ни одного целого делителя, превышающего $(l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^m \left(1 \leqslant m \leqslant \frac{n}{2}\right)$, то этот полином в поле рациональных чисел не может иметь делителей степени s $(m \leqslant s \leqslant n-m)$.

Следствие 2. Если целое число (17) не имеет по крайней мере одного целого делителя, превышающего $(l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^m$, и если $f(x)$ не имеет делителей степени ниже m, то этот полином в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 3. Если целое число (17) не имеет по крайней мере одного целого делителя, превышающего $(l+1)\left|\frac{q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|^2$, и если $f(x)$ не имеет рациональных корней, то этот полином в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 4. Если целое число (17) не имеет по крайней мере одного целого делителя, превышающего $\left|\frac{(l+1)\,q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|$, то полином $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел.

Следствие 5. Если целое число (17) простое или его абсолютная величина не превышает $\left|\frac{(l+1)\,q_2}{(q_1;\,q_2)}\right|$, то полином $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел.

Из последнего следствия, как частный случай, при $l=0$, $p_1=k_1$, $p_2=\pm k_2$, $q_1=q_2=1$, вытекают оба случая первой теоремы нашей работы ([5]).

Далее, из первой половины (случай I) следствия 5 при $l=0$, $p_1=k-1$, $p_2=q_1=q_2=1$ в точности получается формулировка известного ([1]) критерия неприводимости полиномов в поле рациональных чисел, найденного Полиа.

7°. ЛЕММА 2. *Если R^* ((R_*)) — верхняя ((нижняя)) граница вещественных частей корней полинома $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то при любом $h \geqslant R^*$ (($h \leqslant R_*$)) сама функция $F(y)=f(y+h)$ и все ее делители имеют знакопостоянные ((знакочередующиеся)) коэффициенты.*

Доказательство. Если обозначить через a_0, γ_f и $\alpha_f \pm \beta_f i$ соответственно старший коэффициент, вещественные и комплексные корни функции $f(x)$, то будет справедливо следующее равенство:

$$f(x)=a_0\prod_f (x-\gamma_f)\prod_f [(x-\alpha_f)^2+\beta_f^2]. \tag{29}$$

Это же равенство в результате преобразования $x=y+h$ перейдет в следующее:

$$f(y+h)=F(y)=a_0\prod_f (y+h-\gamma_f)\prod_f [(y+h-\alpha_f)^2+\beta_f^2]. \tag{30}$$

Если $h \geqslant R^*$ (($h \leqslant R_*$)), то $h-\gamma_f>0$ и $h-\alpha_f>0$ (($h-\gamma_f<0$ и $h-\alpha_f<0$)), так как, по определению верхней ((нижней)) границ вещественных частей корней, $R^*>\gamma_f$ и $R^*>\alpha_f$ (($R_*<\gamma_f$ и $R_*<\alpha_f$)) и, следовательно, все линейные и квадратные делители функции $F(y)$ будут со знакопостоянными ((знакочередующимися)) коэффициентами. Любые же другие делители $F(y)$, включая и самую функцию $F(y)$, в поле вещественных чисел, как произведения каких-нибудь комбинаций этих делителей и делителей постоянного a_0, будут также со знакопостоянными ((знакочередующимися)) коэффициентами.

Следствие. При любом $h \geqslant R^*$ (($h \leqslant R_*$)) ряд

$$f(h),\ f'(h), f''(h), \ldots, f^{(n)}(h) \tag{31}$$

будет знакопостоянным ((знакочередующимся)). При том же значении h этим же свойством будут обладать соответствующие ряды всех делителей полинома $f(x)$ в поле вещественных чисел.

Это следствие вытекает из леммы 2 по известной формуле Тэйлора.

Из первой половины леммы 2, приведенной нами в работе [2], при $a_0 = 1$ следует лемма Mandl'я [8].

8°. ТЕОРЕМА 3. *Если целочисленный полином $f(x)$ степени n имеет делитель $\varphi(x)$ m-й степени из поля рациональных чисел, то целое число*

$$\left[\frac{q_1 q_2}{(q_1;\, q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2}\right) \quad \begin{matrix} (+,\ \textit{если}\ \dfrac{p_1}{q_1} \geqslant R^* & \text{(I)} \\ & \text{и}\ \dfrac{p_2}{q_2} \geqslant 0 \\ (-,\ \textit{если}\ \dfrac{p_1}{q_1} \leqslant R_* & \text{(II)} \end{matrix}$$

должно иметь по крайней мере два целых сомножителя, по абсолютной величине не меньших соответственно

$$\left| \frac{(q_1 p_2)^{m+1} - q_2^{\,m+1}}{(q_1 p_2 - q_2)(q_1;\, q_2)^m} \right| \ \textit{и}\ \left| \frac{(q_1 p_2)^{n-m+1} - q_2^{\,n-m+1}}{(q_1 p_2 - q_2)(q_1;\, q_2)^{n-m}} \right|.$$

Доказательство. Будем вести доказательство теоремы одновременно для обоих (I и II) случаев.

По условию теоремы, $\varphi(x)$ является делителем полинома $f(x)$ и, следовательно, должен существовать еще один полином $\psi(x)$ не нулевой степени из поля рациональных чисел, удовлетворяющий неравенству

$$f(x) = \varphi(x)\,\psi(x). \tag{32}$$

По упоминавшейся уже лемме Гаусса, подобное же равенство должно иметь место и для целочисленных полиномов. Обозначив через $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ целочисленные полиномы, соответствующие полиномам $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из поля рациональных чисел, мы можем для них написать тождество

$$f(x) = \varphi_0(x)\,\psi_0(x) \tag{33}$$

относительно переменной x.

Положим в (33) $x = y + \frac{p_1}{q_1}$; в результате, по только что доказанной лемме, мы получим функции

$$F(y) = f\left(y + \frac{p_1}{q_1}\right), \quad \Phi(y) = \varphi_0\left(y + \frac{p_1}{q_1}\right), \quad \Psi(y) = \psi_0\left(y + \frac{p_1}{q_1}\right)$$

со знакопостоянными коэффициентами в первом случае и со знакочередующимися коэффициентами во втором случае, удовлетворяющие тождеству

$$F(y) = \Phi(y) \cdot \Psi(y). \tag{34}$$

Далее, поскольку полиномы $f(x)$, $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ целочисленные, то коэффициентами полиномов $F(y)$, $\Phi(y)$ и $\Psi(y)$ в обоих случаях должны быть рациональные дроби со знаменателями, равными степеням числа q_1. Степень этого числа q_1 в знаменателе коэффициента в произвольно

взятом члене с y^k в полиномах $F(y)$, $\Phi(y)$ и $\Psi(y)$ не может превышать соответственно $n-k$, $m-k$ и $n-m-k$ и, естественно, наивысшая степень этого числа q_1 в знаменателях коэффициентов в каждой из этих функций не выше степени соответствующей функции.

Следовательно, умножив обе части тождества (34) на $q_1^n = q_1^m q_1^{n-m}$, мы получим соответствующее тождество

$$q_1^n F(y) = [q_1^m \Phi(y)]\,[q_1^{n-m}\Psi(y)] \tag{35}$$

уже для целочисленных функций $q_1^n F(y)$, $q_1^m \Phi(y)$ и $q_1^{n-m}\Psi(y)$.

Коэффициенты этих целочисленных функций будут иметь степени целого числа q_1 в качестве целого множителя. Степень этого числа q_1 в коэффициенте произвольно взятого члена с y^k в полиномах $q_1^n F(y)$, $q_1^m \Phi(y)$ и $q_1^{n-m}\Psi(y)$ не может быть ниже k. Следовательно, целочисленные функции правой части равенства (35) мы можем представить в следующей форме:

$$q_1^m \Phi(y) = q_1^m \varphi_0\left(y + \frac{p_1}{q_1}\right) =$$

$$= B_0(q_1 y)^m + B_1(q_1 y)^{m-1} + \ldots + B_{m-1}(q_1 y) + B_m, \tag{36}$$

$$q_1^{n-m}\Psi(y) = q_1^{n-m}\psi_0\left(y + \frac{p_1}{q_1}\right) =$$

$$= C_0(q_1 y)^{n-m} + C_1(q_1 y)^{n-m-1} + \cdots + C_{n-m-1}(q_1 y) + C_{n-m}, \tag{36*}$$

где ряды из целых чисел

$$B_0,\ B_1, \ldots, B_{m-1},\ B_m \quad \text{и} \quad C_0,\ C_1, \ldots, C_{n-m-1},\ C_{n-m}$$

будут знакопостоянными в первом случае и знакочередующимися во втором случае.

При $y = \pm\frac{p_2}{q_2}$ функции (36) и (36*) будут иметь следующие значения:

$$q_1^m \Phi\left(\pm\frac{p_2}{q_2}\right) = q_1^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2}\right) = B_0\left(\pm\frac{p_2}{q_2}q_1\right)^m + B_1\left(\pm\frac{p_2}{q_2}q_1\right)^{m-1} +$$
$$+ \cdots + B_{m-1}\left(\pm\frac{p_2}{q_2}q_1\right) + B_m = B_0'\left(\frac{q_1 p_2}{q_2}\right)^m + B_1'\left(\frac{q_1 p_2}{q_2}\right)^{m-1} +$$
$$+ \cdots + B_{m-1}'\left(\frac{q_1 p_2}{q_2}\right) + B_m', \tag{37}$$

$$q_1^{n-m}\Psi\left(\pm\frac{p_2}{q_2}\right) = q_1^{n-m}\psi_0\left(\frac{p_1}{q_1} \pm \frac{p_2}{q_2}\right) = C_0\left(\pm\frac{p_2}{q_2}q_1\right)^{n-m} +$$
$$+ C_1\left(\pm\frac{p_2}{q_2}q_1\right)^{n-m-1} + \cdots + C_{n-m-1}\left(\pm\frac{p_2}{q_2}q_1\right) + C_{n-m} =$$
$$= C_0'\left(\frac{q_1 p_2}{q_2}\right)^{n-m} + C_1'\left(\frac{q_1 p_2}{q_2}\right)^{n-m-1} + \cdots + C_{n-m-1}'\left(\frac{q_1 p_2}{q_2}\right) + C_{n-m}', \tag{37*}$$

где ряды целых чисел

$$B_0',\ B_1', \ldots, B_{m-1}',\ B_m' \quad \text{и} \quad C_0',\ C_1', \ldots, C_{n-m-1}',\ C_{n-m}'$$

в обоих случаях уже будут знакопостоянными.

Умножив обе части (37) и (37*) соответственно на

$$\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m \quad \text{и} \quad \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m},$$

мы получим следующие соотношения для абсолютных величин значений рассматриваемых функций:

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m \Phi\left(\pm\frac{p_2}{q_2}\right)\right| = \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m \varphi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{q_2}\right)\right| =$$

$$= \left|B'_0\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m + B'_1\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{m-1}\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right] + \cdots +\right.$$

$$\left. + B'_{m-1}\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{m-1} + B'_m\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m\right| \geqslant \left|\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{m-1}\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right] + \cdots + \left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{m-1} + \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m\right| =$$

$$= \left|\frac{\left[\frac{p_2q_1}{(q_1;\ q_2)}\right]^{m+1} - \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{m+1}}{\left[\frac{p_2q_1}{(q_1;\ q_2)}\right] - \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]}\right| = \left|\frac{(p_2q_1)^{m+1} - q_2^{m+1}}{(p_2q_1 - q_2)(q_1;\ q_2)^m}\right|, \qquad (38)$$

$$\left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m} \Psi\left(\pm\frac{p_2}{q_2}\right)\right| = \left|\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m} \psi_0\left(\frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{q_2}\right)\right| =$$

$$= \left|C'_0\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m} + C'_1\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m-1}\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right] + \cdots +\right.$$

$$\left. + C'_{n-m-1}\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m-1} + C'_{n-m}\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m} + \left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m-1}\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right] + \cdots +\right.$$

$$\left. + \left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right]\left[\frac{q_2}{q_1;\ q_2)}\right]^{n-m-1} + \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ p_2)}\right]^{n-m+1} - \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m+1}}{\left[\frac{q_1p_2}{(q_1;\ q_2)}\right] - \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]}\right| = \left|\frac{(q_1p_2)^{n-m+1} - q_2^{n-m+1}}{(q_1p_2 - q_2)(q_1;\ q_2)^{n-m}}\right|. \qquad (38^*)$$

Положим в тождестве (35) $y = \pm\frac{p_2}{q_2}$ и умножим затем обе части полученного равенства на

$$\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^n = \left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^m\left[\frac{q_2}{(q_1;\ q_2)}\right]^{n-m};$$

тогда мы будем иметь

$$\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n F\left(\pm\,\frac{p_2}{q_2}\right)=\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\pm\,\frac{p_2}{q_2}\right)=$$

$$=\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^m \Phi\left(\pm\,\frac{p_2}{q_2}\right)\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^{n-m}\Psi\left(\pm\,\frac{p_2}{q_2}\right). \qquad (39)$$

Сравнивая соотношения (38) и (38*) с полученным равенством (39), мы убеждаемся в том, что из существования делителя $\varphi(x)$ степени m целочисленного полинома $f(x)$ n-й степени следует существование по крайней мере двух сомножителей целого числа

$$\left[\frac{q_1q_2}{(q_1;\,q_2)}\right]^n f\left(\frac{p_1}{q_1}\pm\frac{p_2}{q_2}\right), \qquad (40)$$

по абсолютной величине не меньших соответственно

$$\left|\frac{(q_1p_2)^{m+1}-q_2^{m+1}}{(q_1p_2-q_2)(q_1;\,q_2)^m}\right| \qquad (41)$$

и

$$\left|\frac{(q_1p_2)^{n-m+1}-q_2^{n-m+1}}{(q_1p_2-q_2)(q_1;\,q_2)^{n-m}}\right|. \qquad (41^*)$$

9°. Обозначив для краткости числа (41) и (41*) соответственно через $r(m)$ и $r(n-m)$, перечислим основные следствия, вытекающие из только что доказанной теоремы.

Пусть для целочисленного полинома $f(x)$ n-й степени найдутся два рациональных числа $\frac{p_2}{q_2}>0$ и $\frac{p_1}{q_1}\geqslant R^*$ при знаке плюс в (40) (($\frac{p_2}{q_2}>0$ и $\frac{p_1}{q_1}\leqslant R_*$ при знаке минус в (40))); тогда из только что доказанной теоремы получаем ряд следствий:

Следствие 1. Если целое число (40) имеет своими делителями только числа, по абсолютной величине меньшие, чем $r(m)$, $0<m<n$, то полином $f(x)$ может иметь в поле рациональных чисел делителей только степени ниже m.

Следствие 2. Если целое число (40) не имеет по крайней мере двух сомножителей, по абсолютной величине не меньших $r(m)$ $\left(1\leqslant m\leqslant\frac{n}{2}\right)$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел не может иметь делителя степени s $\left(m\leqslant s\leqslant\frac{n}{2}\right)$.

Следует отметить, что первая половина (случай I) этого следствия является содержанием теоремы, доказанной нами в статье ([4]).

Следствие 3. Если целое число (40) не имеет ни одного делителя, по абсолютной величине не меньшего $r\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 4. Если целое число (40) не может иметь по крайней мере двух сомножителей, по абсолютной величине не меньших $r(2)$, и если полином $f(x)$ не имеет рациональных корней, то этот полином в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 5. Если целое число (40) не имеет по крайней мере двух сомножителей, по абсолютной величине не меньших $r(1)$, то полином $f(x)$ в поле рациональных чисел неприводим.

Следствие 6. Если целое число (40) простое или меньше $[r(1)]^2$, то полином $f(x)$ неприводим в поле рациональных чисел.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Ак. Наук СССР

Поступило
18. III. 49

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шапиро Г. М., Высшая алгебра, Учпедгиз, Москва, 1938.
[2] Яковкин М. В., Об одном критерии неприводимости многочленов, Доклады Ак. Наук СССР, XXVIII, № 9 (1940), 771—773.
[3] Яковкин М. В., Обобщение одного критерия неприводимости полиномов, Доклады Ак. Наук СССР, LVIII, № 9 (1947), 1914—1918.
[4] Яковкин М. В., Еще об одном критерии неприводимости полиномов, Доклады Ак. Наук СССР, LXIV, № 6 (1949), 771—774.
[5] Яковкин М. В., Об одной теореме Полиа, Доклады Ак. Наук СССР, LXVI, № 2 (1949), 169—172.
[6] Brauer A., Bemerkungen zu einem Satze von Herrn G. Polya, J. der Deutsch. Math. Ver., 43 (1934), 124—125.
[7] Dorwart H. L., Ore O., Criteria for the Irreducibility of Polynomials, Ann. of Math., 34 (1933), 81—94.
[8] Mandl M., Über die Zerlegung ganzer, ganzzahliger Functionen in irreductibele Factoren, J. reine u. angew. Math., 113 (1894), 252—261.
[9] Polya G., Verschiedene Bemerkungen zur Zahlentheorie, Ber. Deutsch. Math. Ver. 28 (1919), 31—40.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 297—302

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ БОРИСА НИКОЛАЕВИЧА ДЕЛОНЕ

В марте 1950 года исполнилось 60 лет со дня рождения выдающегося советского математика, члена-корреспондента Академии Наук СССР, Бориса Николаевича Делоне.

В своем творчестве Борису Николаевичу удалось соединить редкое разнообразие интересов с умением решать труднейшие классические задачи. В таких разнообразных областях, как алгебра, теория чисел, геометрия, математическая кристаллография с именем Бориса Николаевича связан ряд первоклассных достижений.

Борис Николаевич провел свои университетские годы в Киеве и там же начал научную работу в качестве ученика В. П. Ермакова и Д. А. Граве. Первая напечатанная работа была сделана Борисом Николаевичем в 1913 году, сразу же после окончания университета. Эта работа, посвященная алгебраической теории чисел, содержала в себе новый подход к проблемам, бывшим уже в то время классическими, и показывала, что уже тогда Борис Николаевич был крупным специалистом в тонких областях алгебры и в теории чисел.

Непосредственно после этого начали появляться блестящие исследования Бориса Николаевича по теории неопределенных уравнений третьей степени, являющиеся одним из самых важных мировых достижений в этой области. Эти работы относятся к числу лучших исследований петербургской школы теории чисел. Согласно установкам этой школы, Борис Николаевич не удовлетворяется доказательством конечности числа решений неопределенного уравнения, а определяет число этих решений и ищет метод для их вычисления. Эти работы были немедленно подхвачены математиками всего мира и оказывают влияние на свою область до настоящего времени. Работы Бориса Николаевича были высоко оценены ленинградскими математиками, и Борис Николаевич был приглашен из Киева профессором в Ленинградский университет.

Переехав в Лениград, Борис Николаевич продолжал свои работы по теории чисел и одновременно начал работать в геометрии. Геометрические работы Бориса Николаевича отличаются необыкновенной, почти физической наглядностью. Концентрируя все внимание на геометрической стороне проблемы и употребляя обыкновенно самые элементарные и наглядные рассуждения, Борис Николаевич добивается неожиданно сильных результатов. Это же стремление к наглядности в геометрических рассуждениях Борис Николаевич прививал и своим ученикам.

Борис Николаевич никогда не был абстрактным ученым и постоянно интересовался вопросами естествознания и техники. В частности, он строил одним из первых в России планеры (в 1908—1909 гг. в Киеве) и совершал на них многочисленные полеты. Этот постоянный интерес к естествознанию побудил Бориса Николаевича включить в область своих исследований геометрическую кристаллографию. Со времени своего переезда в Ленинград Борис Николаевич не переставал печатать работы по геометрии многогранников, геометрии чисел и кристаллографии.

Работы Бориса Николаевича по теории многогранников относятся к теории правильного деления пространства, начатой знаменитым кристаллографом Федоровым и продолженной Вороным. В этой области Борис Николаевич дал два глубоких метода — «метод пустого шара» и «метод слоевого построения» и до конца решил чрезвычайно трудную задачу нахождения всех правильных разбиений 3- и 4-мерного пространства. Эти результаты до сих пор не провзойдены. Эти работы вызвали ряд важных работ его учеников.

В геометрии чисел Борису Николаевичу принадлежит ряд разнообразных и тонких работ, носящих чисто геометрический характер. В последнее время Борис Николаевич получил в этой области несколько важных результатов. Работы Бориса Николаевича по геометрии чисел являются достойным продолжением дела Вороного и оказали влияние на работы ряда советских математиков.

В кристаллографии надо особенно отметить две работы Бориса Николаевича. В работе 1926 года, помещенной в Журнале Минералогического общества, решается задача об определении плоской кристаллической решетки по расстояниям между ее точками, чрезвычайно важная для рентгеновского анализа кристаллов. В работе о правильной установке кристаллов Борис Николаевич прибавляет существенную главу к классической геометрической кристаллографии. Эти работы принадлежат к важнейшим работам по геометрической кристаллографии, сделанным после Федорова.

В период, последовавший за переездом Академии Наук в Москву, Борис Николаевич снова возвращается к вопросам алгебры, к которым он применяет приобретенное за предыдущие десятилетия геометрическое мастерство. Борис Николаевич берется за самую основную задачу теории Галуа — задачу о построении уравнений с заданными группами. Он стремится решить эту задачу для разрешимых групп и, действительно, решает ее в одном частном случае. В связи с этим исследованием Борис Николаевич вводит в алгебру совершенно своеобразное важное понятие — плотности уравнений с заданной группой, что стало возможным благодаря примененным им геометрическим методам.

Влияние, оказанное Борисом Николаевичем на развитие математики, не исчерпывается его работами. В каждой из интересовавших его областей Борис Николаевич имел учеников, одни из которых дали тонкие и сильные работы непосредственно в этих областях, а другие, отталкиваясь от интересов Бориса Николаевича, начали создавать сами большие самостоятельные направления. Характерным в воздействии Бориса Николаевича на своих учеников было то, что он не боялся ставить пе-

ред ними труднейшие задачи. Благодаря этому некоторые из учеников Бориса Николаевича выросли в совершенно самостоятельных ученых.

Не случайно такой первоклассный математик с мировым именем, как Н. Г. Чеботарев, в своей автобиографии называет себя в первую очередь учеником Бориса Николаевича. Действительно, устремления, которым посвятил себя Борис Николаевич в 1915—1916 г. г., передались Н. Г. Чеботареву, который получил в этом направлении прославившие его результаты.

В области теории чисел продолжателями дела Бориса Николаевича были главным образом В. А. Тартаковский и Д. К. Фаддеев, давшие тонкие исследования в направлении работ Бориса Николаевича по неопределенным уравнениям.

Влияние идей Бориса Николаевича ярко видно на следующем примере. Вопросы рентгеновского анализа кристаллов привели Бориса Николаевича к задаче теории чисел об определении квадратичной формы по представляемым ею числам, которую он сам решил для случая двух переменных. Решение этой задачи для случая четырех и более переменных было предметом больших исследований В. А. Тартаковского. Самый трудный случай трех переменных рассмотрен в первой крупной работе Ю. В. Линника.

Влияние Бориса Николаевича как геометра сказалось в том, что почти все соприкасавшиеся с ним математики усвоили истинно геометрический стиль мышления. Даже такой оригинальный ученый, как Б. А. Венков, обязан геометрической струей в своем творчестве влиянию Бориса Николаевича. Непосредственным учеником Бориса Николаевича является один из крупнейших геометров современности А. Д. Александров. Его центральная работа по теме непосредственно примыкает к вопросам, которые Борис Николаевич разбирал на своих семинарах в Ленинградском университете.

Под влиянием работ Бориса Николаевича по теории уравнений этими же вопросами стали заниматься Д. К. Фаддеев, который работал в ближайшем контакте с Борисом Николаевичем, и И. Р. Шафаревич.

Начиная с переезда в Ленинград в 1921 году, Борис Николаевич непрерывно читает основные математические курсы студентам физического и механико-математического факультетов Ленинградского и Московского университетов. Диапазон тем его лекций все расширяется. Он охватывает самые разные области математики от теории чисел и алгебры до геометрии Лобачевского и кристаллографии. В текущем году Борис Николаевич читает на механико-математическом факультете МГУ, впервые в Союзе, курс вычислительных машин.

Научные исследования и педагогическая деятельность Бориса Николаевича отразились в ряде книг, написанных им совместно с учениками: «Теория иррациональностей третьей степени», «Математические основы структурного анализа кристаллов», Курс аналитической геометрии для университетов и другие.

Сейчас Борис Николаевич полон сил и можно надеяться, что он и в дальнейшем даст много ценных научных результатов.

СПИСОК ТРУДОВ Б. Н. ДЕЛОНЕ

1. Связь между теорией идеалов и теорией Галуа, 1912 (медальное сочинение). (Не напечатано).

1915

2. К определению алгебраической области при помощи сравнений (С приложением к абелевым уравнениям). (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, № 6, стр. 271—274.)
3. К решению неопределенного уравнения $x^3p + y^3 = 1$. (*Сообщения Харьк. матем общ.*, сер. 2, т. 15, № 1, стр. 1—10.)
4. Решение неопределенного уравнения $x^3p + y^3 = 1$. [*Сообщения Харьк. матем. общ.* сер. 2, т. 15, № 1, стр. 11—16 (продолжение статьи № 3) и стр. 46—48 (окончание).]

1916

5. Решение неопределенного уравнения $x^3p + y^3 = 1$. (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, т. 15, № 2, стр. 75—76.)
6. La solution générale de l'équation $x^3p + y^3 = 1$. (*Comptes rendus. Paris*, t. 162, p. 160—151.)

1920

7. Sur le nombre de représentations d'un nombre par une forme cubique à disrcriminant négatif. (*Comptes rendus, Paris*, t. 171, p. 336—338.)

1921

8. Résolution de l'équation indéterminé $qx^3 - px^2y + hxy^2 + y^3 = 1$. (*Comptes rendus, Paris*, t. 172, p. 434—436.)

1922

9. О числе представлений числа двойничной кубической формой отрицательного определителя. (*Известия Росс. Акад. Наук*, т. 16, стр. 253—272.)
10. Решение неопределенного уравнения $x^3p + y^3 = 1$. (*Известия Росс. Акад. Наук*, т. 16, стр. 273—280.)
11. Zur Bestimmung algebraischer Zahlkörper durch Kongruenzen; eine Anwendung auf die Abelschen Gleichungen. (*Journ. f. Math.*, Bd. 152, S. 120—123.)

1923

12. Interprétation géométrique de la généralisation de l'algorithme des fractions continues donné par Voronoï. (*Comptes rendus, Paris*, t. 176, p. 554—556.)

1924

13. Sur la représentation des nombres par les formes binaires. (*Comptes rendus, Paris*, t. 178, p. 1458—1461.)

1926

14. Решение задачи эквивалентности и табуляризация кубических двойных форм отрицательного определителя. (*Журн. Ленингр. физ.-матем. общ.*, т. 1, стр. 40—55.)
15. К вопросу об однозначности определения основного параллелепипеда кристаллической структуры по способу Дебая. (*Зап. Мин. общ.*, сер. 2, ч. 55, в. 1, стр. 169—182.)
16. Sur la théorie des paralléloèdres. (*Comptes rendus, Paris*, t. 183, p. 464—467.)

1927

17. Über den Algorithmus der Erhöhung. (*Журн. Ленингр. физ.-матем. общ.*, т. 1, в. 2, стр. 257—267.)

1928

8. Задачи с решениями для повторного курса по элементарной математике. 1. (*Ленинград, Научн. книгоизд.*) (совместно с О. К. Житомирским).

19. О неопределенных уравнениях. (*Труды Всерос. съезда матем. в Москве* 27 апр. — 4 мая 1927 г., М.-Л., Гос. изд., стр. 148 — 161.)

20. О топологии параллелепипедальных систем точек. (*Труды Всеросс. съезда матем. в Москве* 27 апр.— 4 мая 1927 г., М.— Л., Гос. изд., стр. 226—227.)

21. Sur la sphère vide. (*Proceeding of the International Mathematical congress held in Toronto aug.* 11—16, 1924, vol. 1. Toronto, Univ. of Toronto Press, p. 695—700.)

22. Über die Darstellung der Zahlen durch binäre kubische Formen von negativer Discriminante. (*Atti Congresso int. Mat.*, Bologna, t. 2, p. 9—12.)

23. Über die reguläre Teilung des 4-dimensionalen Raumes. (*Atti Congresso int. Mat.* Bologna, t. 4, p. 147—156.)

24. Vollständige Lösung der unbestimmten Gleichung $ax^3 + y = 1$ in ganzen Zahlen. (*Math. Zeitschrift*, Bd. 28, S. 1—9.)

1929

25. Über die Darstelluug der Zahlen durch die binären kubischen Formen von negativer Discriminante. (*Math. Zeitschrift*, Bd. 31, s. 1—26.)

26. Bemerkung über die Abhandlung von Herren Trygve Nagel: «Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativen Diskriminanten». (*Math. Zeitschrift*, Bd. 31, S. 27—28.)

27. Sur la partition regulière de l'espace à 4 dimensions. Part 1. (*Известия Ак. Наук СССР*, отд. физ.-матем. наук, стр. 79—110.)

28. Sur la partition regulière de l'espace à 4 dimensions. Part 2. (*Известия Ак. Наук СССР*, отд. физ.-матем. наук, стр. 147—164.)

29. Комарницкий, В. И., Основания аналитической геометрии на плоскости и в пространстве Изд. 2-е. Под ред. и с доп. проф. Б. Н. Делоне. (Л.-М., ГТТИ, 287 стр.)

1932

30. Neue Darstellung der geometrischen Kristallographie. Abh. 1. (*Zeitschrift für Kristallographie*, Bd. 84, S. 109—149.)

1933

31. О плотнейших параллелепипедальных расположениях шариков в пространствах трех и четырех измерений. (*Труды. физ.-матем. ин-та им. Стеклова*, отд. матем., т. 4, стр. 63—69.)

32. Юрий Тодосьевич Вороний. (*Журн. матем. циклу Всеукр. Акад. наук*, т. 1, № 2, стр. 15—16.)

33. Sur la généralisation de la théorie de parallèloèdres. (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, № 5, стр. 641—646).

1934

34. Математические основы структурного анализа кристаллов и определение основного параллелепипеда повторяемости при помощи рентгеновских лучей. [Л. — М., ОНТИ, 328 стр. (Совместно с Н. Падуровым и А. Александровым).]

35. Доказательство теоремы Ферма для $n = 3$ при помощи кубической области. (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр. 7—9.)

36. Sur la sphère vide. A la mémoire de George Voronoï. (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, № 6, стр. 793—800.)

1935

37. Задачник по геометрии. Изд. 2-е перераб. и доп. [Л.-М., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1935, 276 стр. (совместно с О. Житомирским).]

38. Таблица чисто вещественных областей 4-го порядка. [*Известия Ак Наук СССР*, ОМЕН, № 10, стр. 1267—1297 (совместно с И. Соминским и К. Билевичем).]

1936

39. Геометрия бинарных квадратичных форм. (Лежен — Дирихле, Лекции по теории чисел, М.—Л., стр. 370—403.)
40. Об однозначной установке кристаллов. (*Известия сектора физ.-хим. анализа Ак. Наук СССР*, т. 8, стр. 91—101.)
41. Современное положение дискретной геометрии (резюме). [*Труды I Всес. съезда математиков в Харькове* 1930 г., М.— Л., стр. 203—204 (совместно с В. А. Тартаковским).]
42. Теория чисел и кристаллография. (*Труды II Всес. съезда математиков в Ленинграде* 24—20 июня 1934 г., т. 2. Секц. доклады. М.— Л. стр. 20—21.)
43. Непосредственная табуляризация областей IV порядка. [*Труды II Всес. съезда математиков в Ленинграде* 24—30 июня 1934 г., т. 2. Секц. доклады, М.—Л., стр. 28 (совместно с П. С Соминским и К. К. Билевичем).]
44. Герман Минковский. (*Успехи матем. наук*, в. 2, стр. 32—38.)
45. Доказательство неравенства Бруна-Минковского. (*Успехи матем. наук,* в. 2, стр. 39—46.)
46. О рациональном использовании математической литературы при научной работе в области математики. Заметки в связи с распространением книги Л. Е. Диксона «История теории чисел», томы 1, 2, 3. (*Успехи матем. наук,* вып. 2, стр. 292—295.)
47. Математическая подготовка в средней школе. (*Высш. техн. школа*, № 5, стр. 58—59.)

1937

48. Задачник по геометрии. [Изд. 3-е, Л.—М., Глав. ред. общетехн. лит-ры, 276 стр. (совместно с О. Житомирским).]
49. Геометрия положительных квадратичных форм. (*Успехи матем. наук*, в. 3, стр. 16—62).

1938

50. Геометрия положительных квадратичных форм. Часть 2. (*Успехи матем. наук*, вып. 4, стр. 102—164.)

1940

51. К геометрии теории Галуа. (Сборн. памяти Д. А. Граве, М.—Л., Гостехиздат., стр. 52—62.)
52. Теория иррациональностей третьей степени (совместно с Д. К. Фаддеевым). (*Труды Матем. ин-та Ак. Наук СССР*, т. XI, 340 стр.)

1944

53. Исследования по геометрии теории Галуа (совместно с Д. К. Фаддеевым.) (*Матем. сб.*, т. 15, (57) : 2, стр. 243—284.)

1945

54. Локальный метод в геометрии чисел. (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 9, стр. 241—256).

1947

55. Алгорифм разделенных параллелограммов. (*Известия Ак. Наук СССР, сер. матем.*, т. 11, стр. 505—538.)
56. Петербургская школа теории чисел. (М.— Л., Изд. Ак. Наук СССР, 420 стр.)

1948

57. Аналитическая геометрия, т. 1. (М.— Л., Гостехиздат, 456 стр.)

1949

58. Аналитическая геометрия, т. II (совместно с Д. А. Райковым). (Гостехиздат., М.—Л., 516 стр.)

1950

59. Геометрия Н. И. Лобачевского и некоторые ее применения. (*Вопросы истории отечественной науки,* Изд. Ак. Наук СССР.)

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 303—326

А. Н. КОЛМОГОРОВ

НЕСМЕЩЕННЫЕ ОЦЕНКИ

В статье рассматривается ряд задач на нахождение несмещенных оценок $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для различных функционалов $f(P)$, зависящих от закона распределения P наблюдаемых величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Некоторые из этих задач связаны с вопросами статистического контроля и браковки массовой промышленной продукции.

§ 1. Общие определения и теоремы

Пусть дана система $\mathfrak{P}$ «допустимых» распределений вероятностей

$$P(A) = \mathrm{P}\{x \in A\}$$

для случайной точки x в некотором пространстве X и определенный на $\mathfrak{P}$ функционал $f(P)$.

Определение 1. Заданная на X функция $\varphi(x)$ называется *несмещенной оценкой* для $f(P)$, если при любом распределении P из $\mathfrak{P}$ выполняется равенство*

$$M^P \varphi = f(P). \tag{1}$$

Например, если X есть n-мерное пространство точек

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а $\mathfrak{P}$ состоит из распределений P, задаваемых плотностями вероятностей

$$p(x \mid a) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2\right\},$$

то общеизвестной несмещенной оценкой для

$$f(P) = a$$

является среднее арифметическое

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

для

$$f(P) = a^2$$

несмещенной оценкой может служить

$$\varphi = \bar{x}^2 - \frac{1}{n}$$

и т. д.

---

* В формуле (1) и далее M^P есть знак математического ожидания, соответствующего распределению P:

$$M^P = \int_X \varphi(x)\, P(dx).$$

Мы увидим далее, что во многих важных случаях несмещенные оценки не существуют. В этих случаях полезно

Определение 2. Функции $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$ называются, соответственно, *верхней* и *нижней* оценкой для $f(P)$, если при любом распределении P из $\mathfrak{P}$ выполняются неравенства

$$M^P \varphi_+ \geqslant f(P), \tag{2}$$

$$M^P \varphi_- \leqslant f(P). \tag{3}$$

С другой стороны, в большинстве задач, в которых несмещенные оценки существуют, их имеется не одна, а много. Так, в рассматриваемом выше примере несмещенной оценкой для a может служить любая линейная форма

$$\varphi = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

с коэффициентами, подчиненными условию

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1.$$

Чрезмерное разнообразие несмещенных оценок может быть значительно сокращено, если ограничиться несмещенными оценками, которые выражаются через надлежащим образом выбранные достаточные статистики задачи. Чтобы сформулировать относящиеся сюда общие теоремы, мне придется привести несколько обобщенное определение достаточной статистики. Так как в этом определении достаточная статистика может быть не только скалярной, но и векторной величиной, то отпадает необходимость отдельно вводить понятие «достаточной системы статистик»: при нашем общем определении такая система статистик $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s)$ может считаться одной статистикой

$$\chi = (\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_s).$$

Нижеследующие несколько абстрактные формулировки будут конкретизированы в § 2 и 3, куда и следует обратиться читателю, которому эти формулировки покажутся трудными.

Пусть $\chi(x)$ — заданная на X функция со значениями из некоторого другого пространства H. Рассмотрим условные распределения вероятностей

$$P(A \mid h) = \mathrm{P}\{x \in A \mid \chi(x) = h\} \tag{4}$$

и условные математические ожидания*

$$M_h^P \varphi = \int_X \varphi(x) P(dx \mid h) \tag{5}$$

при фиксированном значении

$$\chi(x) = h.$$

Определение 3. Функция $\chi(x)$ называется *достаточной статистикой* для системы распределений $\mathfrak{P}$, если условные распределения вероятностей $P(A \mid h)$ не зависят от выбора P из $\mathfrak{P}$.

* Интеграл (5) надо понимать в смысле формул (10) и (11) в § 4 главы 5 моей книжки (1).

Так как условные вероятности $P(A \mid h)$ в соответствии с ([1]) определены лишь с точностью до множества значений h, на которое $\chi(x)$ попадает (при распределении P для x) с вероятностью нуль, то точный смысл определения 3 таков: $\chi(x)$ называется достаточной статистикой для $\mathfrak{P}$, если существует такая функция $Q(A \mid h)$ от $A \subseteq X$ и $h \in H$, которая при любом P из $\mathfrak{P}$ может быть принята за $P(A \mid h)$.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\chi(x)$ есть достаточная статистика для $\mathfrak{P}$, то для любой функции $\varphi(x)$ с конечными при всех $P \in \mathfrak{P}$ математическими ожиданиями M^P условные математические ожидания $M_h^P \varphi$ не зависят от $P \in \mathfrak{P}$.*

Как и в случае определения 3, точный смысл теоремы 1 нуждается в пояснении. Он заключается в следующем: для любой функции $\varphi(x)$ с конечными при всех P из $\mathfrak{P}$ математическими ожиданиями $M^P \varphi$, существует такая функция $M(h)$, которая при любом $P \in \mathfrak{P}$ может быть принята за $M_h^P \varphi$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно положить

$$M(h) = \int_X \varphi(x)\, Q(dx \mid h), \tag{6}$$

где функция $Q(A \mid h)$ взята из пояснения к определению 3, а интеграл понимается в смысле примечания к формуле (5).

Следующие две теоремы являются некоторым обобщением результатов Блеквелла ([3]).

ТЕОРЕМА 2. *Если $\varphi(x)$ является несмещенной оценкой для $f(P)$, а $\chi(x)$ — достаточной статистикой для $\mathfrak{P}$, то* *

$$\varphi^*(x) = M_{\chi(x)}\, \varphi(x) = M[\chi(x)] \tag{7}$$

тоже является несмещенной оценкой для $f(P)$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любого $P \in \mathfrak{P}$, для которого дисперсия $D^P \varphi$ существует, в условиях теоремы 2 имеет место неравенство*

$$D^P \varphi^* \leqslant D^P \varphi. \tag{8}$$

Для доказательства теорем 2 и 3 достаточно воспользоваться тождествами

$$M(M_\chi \varphi) = M\varphi, \tag{9}$$

$$D\varphi = D(M_\chi \varphi) + M(\varphi - M_\chi \varphi)^2, \tag{10}$$

которые справедливы при любых функциях $\varphi(x)$ и $\chi(x)$, если только $M\varphi$ и $D\varphi$ существуют.

---

* Верхний индекс P при M в формуле (7) опущен, так как, в силу теоремы 1, функция φ^* может быть выбрана независимой от P.

Теоремы 2 и 3 можно рассматривать как обоснование и без того естественной тенденции употреблять только несмещенные оценки, выражающиеся через достаточные статистики задачи: теорема 2 показывает, что при этом мы не суживаем круга задач, в которых несмещенные оценки существуют, а теорема 3,— что при переходе от произвольной несмещенной оценки φ к осредненной оценке φ^*, выражающейся через статистику χ, мы можем только уменьшить дисперсию. Можно было бы показать, что оценка φ^* всегда бывает «не хуже» порождающей ее оценки φ и при других способах сравнения «качества» оценки.

Теорема 2, кроме того, как мы увидим, дает сильное средство для нахождения несмещенных оценок с малыми дисперсиями: часто осреднением «плохих», но легко обнаруживаемых оценок φ можно получить «хорошие» оценки φ^*. В довольно широком классе случаев несмещенные оценки, выражающиеся через надлежаще выбранную достаточную статистику, оказываются однозначно определенными оцениваемым функционалом $f(P)$. По этому поводу см. интересную работу Халмоса ([4]), которая является одной из немногих попыток подойти к изучению несмещенных оценок с достаточно общей точки зрения. Некоторые результаты Халмоса будут приведены в § 10 настоящей статьи.

§ 2. Основные формулы для дискретного случая

Если множество X возможных значений x конечно:

$$X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

а распределения P^θ системы $\mathfrak{P}$ определяются однозначно заданием одного или нескольких параметров θ, то естественно ввести в рассмотрение вероятности*

$$p_k(\theta) = P^\theta\{x = a_k\},$$

функционал $f(P)$ записывать в виде функции $f(\theta)$ и ввести обозначение

$$\varphi_k = \varphi(a_k)$$

для возможных значений оценки φ. Условие того, чтобы φ являлось несмещенной оценкой $f(\theta)$, запишется тогда в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k p_k(\theta) = f(\theta). \tag{1}$$

Формула (1) показывает, что в случае, когда θ пробегает бесконечное множество значений, лишь немногие функции $f(\theta)$, а именно те, которые выражаются линейными формами вида (1), допускают несмещенные оценки φ. Если функции $p_k(\theta)$ линейно независимы, то для каждой функции $f(\theta)$, которая допускает несмещенную оценку, такая оценка существует только одна.

---

* В случае нескольких параметров $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ мы обозначаем через θ вектор $\{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$.

Если возможные значения x занумерованы парами индексов:

$$X = \{a_{hk}\}, \quad 1 \leqslant h \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n_h,$$

то естественно нумеровать аналогичным образом вероятности $p_{hk}(\theta)$ и значения φ_{hk} оценки φ. Первый индекс h будет при этом достаточной статистикой задачи в том и только том случае, если $p_{hk}(\theta)$ могут быть записаны в виде

$$p_{hk}(\theta) = \overline{p}_h(\theta)\, q_{hk}, \tag{2}$$

где q_{hk} не зависят от θ,

$$q_{hk} \geqslant 0, \quad \sum_{k=1}^{n_h} q_{hk} = 1,$$

$$\overline{p}_h(\theta) \geqslant 0, \quad \sum_{h=1}^{m} \overline{p}_h(\theta) = 1.$$

В случае (2) из несмещенной оценки

$$\varphi(a_{hk}) = \varphi_{hk}$$

для $f(\theta)$ можно получить в соответствии с теоремами 2 и 3 несмещенную оценку

$$\varphi^*(a_{hk}) = \varphi_h^* = \sum_{k=1}^{n_h} q_{hk}\,\varphi_{hk} \tag{3}$$

с дисперсией

$$D^\theta \varphi^* \leqslant D^\theta \varphi$$

при любом θ.

Доказательство теорем 2 и 3, которое в общем случае, хотя и было чрезвычайно просто и коротко, опиралось на несколько трудную общую теорию условных вероятностей и математических ожиданий, в рассматриваемом частном случае делается чисто арифметическим, так как входящие в рассмотрения математические ожидания и дисперсии выражаются общеизвестными формулами

$$M^\theta \varphi = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_h} p_{hk}(\theta)\,\varphi_{hk},$$

$$M^\theta \varphi^* = \sum_{h=1}^{m} \overline{p}_h(\theta)\,\varphi_h^*,$$

$$D^\theta \varphi = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_h} p_{hk}(\theta)\,(\varphi_{hk} - M^\theta \varphi)^2,$$

$$D^\theta \varphi^* = \sum_{h=1}^{m} \overline{p}_h(\theta)\,(\varphi_h^* - M^\theta \varphi^*)^2.$$

§ 3. Основные формулы в непрерывном случае

Пусть распределения P^θ из $\mathfrak{P}$ заданы плотностями вероятностей

$$p(x \mid \theta).$$

В этом случае условие того, чтобы $\varphi(x)$ являлось несмещенной оценкой для $f(\theta)$, записывается в виде

$$\int_X \varphi(x)\, p(x \mid \theta)\, dx = f(\theta), \tag{1}$$

т. е. нахождение несмещенной оценки $\varphi(x)$ для заданной функции $f(\theta)$ сводится к решению интегрального уравнения.

Пусть, далее, задана функция $\chi(x)$ со значениями из пространства H. Эта функция порождает разбиение пространства X на подмножества V_h, на которых χ имеет постоянное значение

$$\chi(x) = h.$$

Допустим, что элемент объема dx может быть выражен в виде

$$dx = dx_1 dh,$$

где dh — элемент объема в H, а dx_1 — надлежащим образом определенный элемент объема в V_h. Тогда χ является достаточной статистикой задачи в том и только в том случае, если плотности вероятностей $p(x \mid \theta)$ могут быть записаны в виде:

$$p(x \mid \theta) = \overline{p}(h(x) \mid \theta)\, q(x), \tag{2}$$

где $q(x)$ не зависит от θ и

$$q(x) \geqslant 0, \qquad \int_{V_h} q(x)\, dx_1 = 1,$$

$$\overline{p}(h \mid \theta) \geqslant 0, \qquad \int_H \overline{p}(h \mid \theta)\, dh = 1.$$

В случае (2) из несмещенной оценки

$$\varphi = \varphi(x)$$

для $f(\theta)$ можно получить в соответствии с теоремами 2 и 3 несмещенную оценку

$$\varphi^* = \varphi^*(x) = \int_{V_{\chi(x)}} \varphi(x)\, q(x)\, dx_1 \tag{3}$$

с дисперсией

$$D^\theta \varphi^* \leqslant D^\theta \varphi \tag{4}$$

при любом θ, которая зависит только от $\chi(x)$:

$$\varphi^* = s[\chi(x)].$$

§ 4. Несмещенные оценки случайных величин

В этом параграфе мы укажем дальнейшее обобщение задачи § 1, которое будет использовано в § 5. Пусть дана система $\mathfrak{P}$ допустимых распределений вероятностей

$$P(A) = \mathrm{P}\{(x, y) \in A\}$$

для пар, состоящих из «наблюдаемой» точки $x \in H$ и ненаблюдаемой непосредственно случайной величины y. Функция $\varphi(x)$ называется несмещенной оценкой для y, если при всех P из $\mathfrak{P}$

$$M^P\varphi = M^P y. \qquad (1)$$

Вопрос о нахождении таких несмещенных оценок для случайных величин не связан с какими-либо новыми трудностями, так как он равносилен нахождению несмещенных оценок для

$$f(P) = M^P y.$$

Только вместо дисперсии $D^P\varphi$ в качестве характеристики точности оценки φ для y естественно рассматривать выражение

$$M^P(\varphi - y)^2.$$

В случае, когда x и y при любом P из $\mathfrak{P}$ независимы,

$$M^P(\varphi - y)^2 = D^P\varphi + D^P y, \qquad (2)$$

и так как $D^P y$ не зависит от выбора φ, то задача нахождения несмещенной оценки φ для y с наименьшим значением $M^P(\varphi - y)^2$ равносильна задаче нахождения несмещенной оценки для $M^P y$ с минимальной дисперсией $D^P\varphi$.

§ 5. Браковка по качественному признаку на основании однократной выборки. Случай разрушения изделия при испытании

Чтобы показать на достаточно конкретном примере значение теории нахождения несмещенных оценок в вопросах браковки массовой продукции по выборочным данным, мы рассмотрим в этом параграфе и в § 7 две задачи из этой области. В детали, связанные с практическим применением предлагаемого метода, мы в настоящей публикации входить не будем. В этом параграфе будет предположено, что испытание изделий приводит к их разрушению и поэтому принципиально может быть только выборочным. Подлежащая нашему рассмотрению система браковки состоит в следующем:

Из партии, содержащей N изделий, производится случайная выборка объема n. Выбранные n изделий испытываются и устанавливается число x «дефектных» изделий в выборке. Если $x \leqslant c$, то $N - n$ изделий, не вошедшие в выборку, принимаются. Если $x \geqslant d = c + 1$, то вся партия бракуется.

Если в партии до испытания имелось y дефектных изделий, то число принятых дефектных изделий будет равно

$$y^* = \begin{cases} y - x & \text{при } x \leqslant c, \\ 0 & \text{при } x \geqslant d. \end{cases}$$

Положим

$$q = \frac{y}{N}, \quad q^* = \frac{y^*}{N}.$$

Задача браковки состоит в том, чтобы гарантировать достаточно малые значения q^*, не вызвав в то же время без надобности, т. е. при малых q, чрезмерно частого забракования всей партии и не увеличивая чрезмерно объем выборки n.

Чтобы удовлетворить этим требованиям, выбирают надлежащие n и c. Основной характеристикой системы браковки с данными n и c является условная вероятность

$$L(q) = \mathrm{P}(x \leqslant c \mid q)$$

при заданном q получить $x \leqslant c$, т. е. принять партию. Для вычисления $L(q)$ служат условные вероятности

$$p_m(q) = \mathrm{P}(x = m \mid q) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \frac{(N-n)!\,N^n}{N!} q\left(q - \frac{1}{N}\right)\left(q - \frac{2}{N}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(q - \frac{m-1}{N}\right)(1-q)\left(1-q-\frac{1}{N}\right)\cdots\left(1-q-\frac{n-m-1}{N}\right) \qquad (1)$$

появления при заданном q значений $x = m$. Легко видеть, что

$$L(q) = \sum_{m \leqslant c} p_m(q). \qquad (2)$$

Если признано целесообразным браковать партии с $q < q_0$ и принимать партии с $q > q_0$, то идеальной оперативной характеристикой $L(q)$ была бы функция

$$L(q) = \begin{cases} 1 \text{ при } q < q_0, \\ 0 \text{ при } q > q_0, \end{cases}$$

изображенная на рис. 1. Такой вид функции $L(q)$ мог бы быть достигнут лишь при $n = N$, что в случае испытания разрушительного характера лишило бы всю операцию смысла. Однако можно приблизиться к идеальной характеристике рис. 1, если выбрать достаточно большое c и взять

$$n \sim \frac{c}{q_0}.$$

Если N очень велико, то это еще не приведет к чрезмерному увеличению отношения $\frac{n}{N}$, которое, конечно, должно оставаться достаточно малым. На рис. 2 * приведена оперативная характеристика для случая

* См. Sampling inspection, Statistical research group, Columbia University (1948), 21.

$$N = 10\,000,$$

$$n = 1000,$$

$$c = 20,$$

$$q_0 \sim \frac{c}{n} = 0{,}02.$$

К сожалению, получение вполне удовлетворительной оперативной характеристики даже при N порядка 1000—10 000 часто оказывается возможным только за счет чрезмерного увеличения отношения $\frac{n}{N}$. Поэтому часто применяются системы браковки с недостаточно круто падающей при возрастании q оперативной характеристикой. В этих случаях

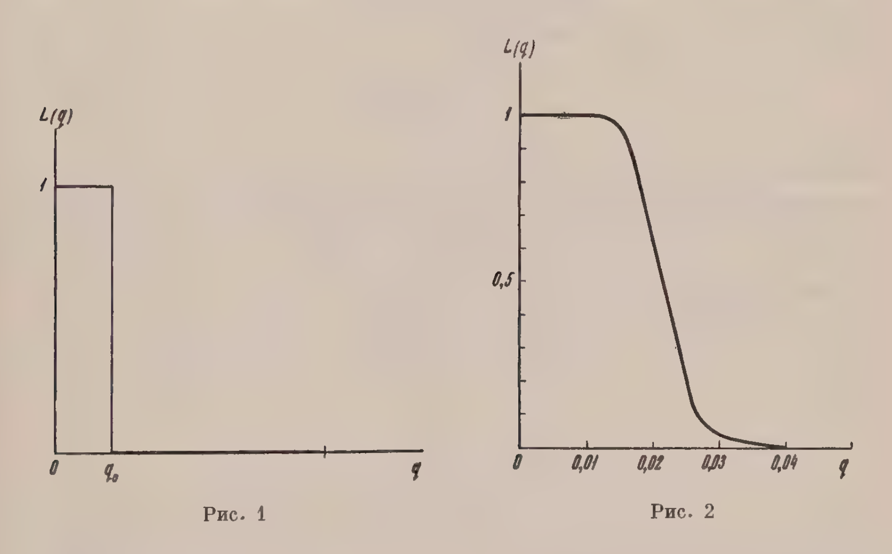


Рис. 1

Рис. 2

приобретает основное значение вопрос о последующей оценке по результатам испытаний доли фактически принятых дефектных изделий. При хорошо налаженном производстве она часто бывает значительно меньше, чем та доля дефектных изделий q_0, исходя из которой рассчитана система браковки.

Последующая оценка по результатам испытаний доли дефектных изделий в предъявленной на проверку продукции и доли пропущенных в результате применения данной системы браковки дефектных изделий имеет, конечно, большое значение и при вполне удовлетворительной оперативной характеристике. К решению этой задачи мы и переходим.

Предположим, что система браковки с данными n и c применена к большому числу партий s. Введенные выше отношения q и q^* для партии с номером r будем обозначать через q_r и q_r^*. Кроме того, обозначим

через s_m число партий, при проверке которых число дефектных изделий x оказалось равным m. Очевидно, что

$$s = s_0 + s_1 + \cdots + s_n,$$

а

$$s' = s_0 + s_1 + \cdots + s_c$$

обозначает число принятых партий. Общее число изделий в s партиях равно

$$R = sN,$$

число же принятых изделий равно

$$R' = s'(N - n).$$

Общее число дефектных изделий равно

$$Y = \sum_{r=1}^{s} y_r = N \sum_{r=1}^{s} q_r,$$

число же принятых дефектных изделий равно

$$Y' = \sum_{r=1}^{s'} y'_r = N \sum_{r=1}^{s} \overset{*}{q}_r.$$

Успешность всей браковочной процедуры определяется тем, насколько отношение

$$q'_{\text{ср}} = \frac{Y'}{R'}$$

меньше чем отношение

$$q_{\text{ср}} = \frac{Y}{R} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} q_r.$$

Так как

$$q'_{\text{ср}} = \overset{*}{q}_{\text{ср}} \frac{R}{R'},$$

где

$$\overset{*}{q}_{\text{ср}} = \frac{Y'}{R} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} \overset{*}{q}_r,$$

а отношение $\frac{R}{R'}$ после приемки становится известным и к тому же при сколько-либо нормальном ходе производства близко к единице, то мы можем считать, что наша задача состоит в оценке $q_{\text{ср}}$ и $\overset{*}{q}_{\text{ср}}$.

Если число партий s достаточно велико, а $\varphi(x)$ и $\varphi^*(x)$ являются несмещенными оценками q и, соответственно, q^* по x, то, в силу закона больших чисел, для оценки $q_{\text{ср}}$ и $\overset{*}{q}_{\text{ср}}$ можно пользоваться приближенными формулами

$$q_{\text{ср}} \sim \varphi_{\text{ср}} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} \varphi(x_r), \tag{3}$$

$$\overset{*}{q}_{\text{ср}} \sim \overset{*}{\varphi}_{\text{ср}} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} \varphi^*(x_r). \tag{4}$$

Точность этих формул определяется обычными стандартными методами, так как слагаемые в правых частях равенств

$$q_{cp} - \varphi_{cp} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} [q_r - \varphi(x_r)],$$

$$q^*_{cp} - \varphi^*_{cp} = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^{s} [q^*_r - \varphi^*(x_r)]$$

взаимно независимы. По этому поводу см. конец следующего параграфа.

Несмещенная оценка для q хорошо известна:

$$\varphi(x) = \frac{x}{n}. \tag{5}$$

Она приводит к оценке

$$q_{cp} \sim \varphi_{cp} = \frac{1}{ns} \sum_{m=1}^{n} m s_m \tag{6}$$

для q_{cp}.

Так как всегда*

$$q^*_{cp} \leqslant q_{cp}, \tag{7}$$

то φ_{cp} может служить также и верхней оценкой (см. определение 2 § 1) для q^*_{cp}. Этот общеизвестный способ оценки q^*_{cp}, однако, совсем не чувствителен к уменьшению числа дефектных изделий в результате браковки. Чтобы ориентироваться в возможностях более эффективной оценки q^*_{cp}, рассмотрим общий вопрос о том, какие функции $f(q)$ допускают несмещенную оценку по числу дефектных изделий x в выборке объема n. Вопрос этот решается очень просто в соответствии с § 2. Для любой функции $\varphi(x)$

$$f(q) = M^q \varphi(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi(m) p_m(q) \tag{8}$$

есть многочлен от q степени не выше n. Так как при этом $n+1$ многочленов $p_m(q)$ линейно независимы, то любой многочлен $f(q)$ степени не выше n единственным образом записывается в виде (8). Иначе говоря, *многочлены $f(q)$ степени не выше n и только они допускают несмещенные оценки по x и оценки эти определяются многочленом $f(q)$ однозначно.*

Легко проверить, что

$$Q(q) = M^q q^* = \sum_{m \leqslant c} \left(q - \frac{m}{N}\right) p_m(q) \tag{9}$$

является многочленом $n+1$-ой степени. Поэтому точной несмещенной оценки $\varphi^*(x)$ для q^* по x *не существует*. Мы увидим, однако, в следую-

* И даже более точно

$$q^*_{cp} \leqslant q_{cp} - \frac{1}{sN} \sum_{r=1}^{s} x_r.$$

щем параграфе, что поставленная нами задача нахождения такой оценки допускает при довольно широких допущениях очень простое приближенное решение. Кроме того, представляют интерес следующие два замечания:

1) При любом $n' < n$ существует несмещенная оценка по числу дефектных изделий x в выборке объема n для q^*, которое получилось бы при браковке по выборке объема n' (с любым c).

2) Аппроксимируя $Q(q)$ многочленами $Q_+(q)$ и $Q_-(q)$ степени не выше n, удовлетворяющими неравенствам

$$Q_-(q) \leqslant Q(q) \leqslant Q_+(q),$$

можно получить для q^* верхнюю и нижнюю оценки $\varphi^*_+(x)$ и $\varphi^*_-(x)$.

Этот метод обещает дать вполне приемлемые практически результаты для многих случаев, в которых приближенные формулы следующего параграфа неприменимы.

§ 6. Случай $c \ll n \ll N$

Если n мало по сравнению с N, то можно с достаточно хорошим приближением положить

$$q^* = \begin{cases} q & \text{при } x \leqslant c, \\ 0 & \text{при } x \geqslant d, \end{cases}$$

а формулы (1), (2), (9) § 5 заменить формулами

$$p_m(q) = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} q^m (1-q)^{n-m}, \tag{1}$$

$$L(q) = \sum_{m \leqslant c} p_m(q), \tag{2}$$

$$M^q q^* = Q(q) = qL(q). \tag{3}$$

В предположении законности пользования формулой (1) для дисперсии

$$D^q \varphi(x) = D^q\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{q(1-q)}{n}$$

оценки (5) из предшествующего параграфа получается несмещенная оценка

$$\psi^2 = \frac{x(n-x)}{n^2(n-1)}, \tag{4}$$

найденная Гиршиком, Мостлером и Саважем ([5]). Из нее получается несмещенная оценка

$$\Delta^2 = \frac{1}{s^2 n^2 (n-1)} \sum_{m=1}^{n-1} m(n-m)\, s_m \tag{5}$$

для дисперсии $\varphi_{\text{ср}}$.

При m малых по сравнению с n вероятности $p_m(q)$ сколько-либо заметно отличаются от нуля лишь при малых q и формула (1) может быть заменена еще более простой приближенной формулой

$$p_m(q) = \frac{n^m}{m!} q^m e^{-nq}. \tag{6}$$

Так как, в силу (6),

$$qp_m(q) = \frac{m+1}{n} p_{m+1}(q),$$

то в предположении, что c мало по сравнению с n, из формул (2) и (3) получается

$$Q(q) = \frac{1}{n} \sum_{m \leqslant d} m p_m(q). \tag{7}$$

Таким образом, в случае законности применения формул (3), (6) и (7) функция $Q(q)$ является линейной комбинацией функций $p_m(q)$ и мы получаем возможность в соответствии с § 2 сформировать несмещенную оценку для $Q(q)$ (а следовательно, и для q^*) по x. Оценка эта имеет вид

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \frac{x}{n} \text{ при } x \leqslant d = c+1, \\ 0 \text{ при } x \geqslant d+1. \end{cases} \tag{8}$$

Для $q^*_{\text{ср}}$ отсюда получается несмещенная оценка

$$q^*_{\text{ср}} \sim \varphi^*_{\text{ср}} = \frac{1}{ns} \sum_{m \leqslant d} m s_m. \tag{9}$$

Поучительно сравнить формулу (9) с формулой (6) § 5. Из их сопоставления получается, что разность

$$\varphi_{\text{ср}} - \varphi^*_{\text{ср}} = \frac{1}{ns} \sum_{m > d} m s_m \tag{10}$$

при больших s приближенно равна разности $q_{\text{ср}} - q^*_{\text{ср}}$ или (в случае отношения $\frac{R}{R'}$, близкого к единице) разности $q_{\text{ср}} - q'_{\text{ср}}$, т. е. сокращению доли дефектных изделий, достигнутому в результате браковки.

Точность приближенного соотношения (9) может быть достаточно эффективным образом оценена. Из независимости выборок из различных партий (такая независимость входит в понятие «случайной» выборки) вытекает, что

$$M(q^*_{\text{ср}} - \varphi^*_{\text{ср}})^2 = \frac{1}{s^2} \sum_{r=1}^{s} M[q^*_r - \varphi^*_r(x_r)]^2. \tag{11}$$

Так как

$$(q^*_{\text{ср}} - \varphi^*_{\text{ср}})^2 = \begin{cases} \left(q - \frac{x}{n}\right)^2 \text{ при } x \leqslant c, \\ \left(\frac{x}{n}\right)^2 \quad \text{при } x = d = c+1, \\ 0 \quad \text{при } x \geqslant d+1, \end{cases} \tag{12}$$

то

$$M^q(q^*_{\text{ср}} - \varphi^*_{\text{ср}})^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^{d} m^2 p_m(q) + \frac{2q}{n} \sum_{m=1}^{c} m p_m(q) + q^2 \sum_{m=0}^{c} p_m(q),$$

или, после надлежащих преобразований,

$$M^q(q^*_{\text{ср}}-\varphi^*_{\text{ср}})^2=\frac{1}{n^2}\left[\sum_{m=1}^{d} mp_m(q)+d(d+1)\,p_{d+1}(q)\right]. \tag{13}$$

Поэтому несмещенной оценкой $M^q(q^*-\varphi^*)^2$ является

$$\psi^2_*(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{n^2} & \text{при } x\leqslant d,\\ \dfrac{d(d+1)}{n^2} & \text{при } x=d+1,\\ 0 & \text{при } x\geqslant d+2,\end{cases} \tag{14}$$

а несмещенной оценкой $M(q^*_{\text{ср}}-\varphi^*_{\text{ср}})$ может служить

$$\Delta^2_*=\frac{1}{s^2}\sum_{r=1}^{s}\psi^2_*(x_r)=\frac{1}{(ns)^2}\left[\sum_{m=1}^{d} ms_m+d(d+1)\,s_{d+1}\right]=$$

$$=\frac{\varphi^*_{\text{ср}}}{ns}+\frac{d(d+1)}{(ns)^2}s_{d+1}. \tag{15}$$

При больших s

$$M(q^*_{\text{ср}}-\varphi^*_{\text{ср}})^2\sim\Delta^2_*$$

и, по теореме Ляпунова,

$$\mathrm{P}\{|q^*_{\text{ср}}-\varphi^*_{\text{ср}}|\leqslant t\Delta\}\sim\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt. \tag{16}$$

Рассмотрим в заключение численный пример на употребление формул (6) § 5 и формул (4), (9), (15) и (16) этого параграфа. Пусть

$$N=1000,\qquad n=50,$$

$$s=200,\qquad c=1,\qquad d=2.$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
s_m	143	27	12	9	3	1	2	1	1	—	—	1

$$\varphi_{\text{ср}}=0{,}0133,\qquad \Delta_*\sim0{,}0010,$$

$$\Delta\sim0{,}0011,\qquad q_{\text{ср}}\sim0{,}0133\pm0{,}0011,$$

$$\varphi^*_{\text{ср}}=0{,}0051,\qquad q^*_{\text{ср}}\sim0{,}0051\pm0{,}0010,$$

или при 3σ-вых пределах

$$|q_{\text{ср}}-\varphi_{\text{ср}}|<3\Delta,\qquad |q^*_{\text{ср}}-\varphi^*_{\text{ср}}|<3\Delta_*,$$

$$0{,}0100<q_{\text{ср}}<0{,}0166,$$

$$0{,}0021<q^*_{\text{ср}}<0{,}0081.$$

Я думаю, что при выбранных для примера значениях s, N, n, c употребление формул, выведенных в предположениях $c\ll n\ll N$ и большого s, уже законно. Но этот вопрос заслуживает более подробного исследования.

§ 7. Браковка по качественному признаку на основании однократной выборки. Случай испытаний, не наносящих вреда изделиям

Если испытание изделий не наносит вреда изделиям, то может быть принята система браковки, отличная от рассмотренной в § 5.

Из партии, состоящей из N изделий, производится случайная выборка объема n. Выбранные n изделий испытываются и устанавливается число «дефектных» изделий в выборке. Если $x \leqslant c$, то x обнаруженных дефектных изделий заменяются заведомо годными (не «дефектными») и вся партия принимается. Если $x \geqslant d = c + 1$, то проверяется вся партия, все обнаруженные при этом дефектные изделия заменяются заведомо годными и только после этого вся партия принимается.

Как и в § 5,

$$q^* = \begin{cases} q - \frac{x}{N} & \text{при } x \leqslant c, \\ 0 & \text{при } x \geqslant d, \end{cases}$$

но теперь величина q^* получает более простой смысл: это доля дефектных изделий, остающаяся в партии после описанной выше процедуры

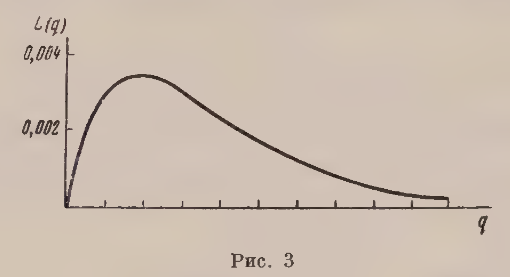


Рис. 3

Формулы (1) — (9) § 5 сохраняются. При этом $Q(q)$ получет новый смысл математического ожидания доли дефектных изделий в принятой продукции в предположении, что до браковки в каждой партии доля дефектных изделий была равна q. Поэтому теперь оказывается осуществимой априорная оценка наихудшего возможнсго среднего качества принятой при данной системе браковки продукции: каково бы ни было распределение дефектных изделий по партиям до браковки, в среднем в принятой после браковки продукции дефектные изделия будут составлять долю, не превышающую

$$Q_L = \max_{0 \leqslant q \leqslant 1} Q(q). \tag{1}$$

В обстановке § 5 такая априорная оценка невозможна. На рис 3 * дан график функции $Q(q)$ для

$$N = 1000, \quad c = 1,$$
$$n = 100, \quad d = 2.$$

Максимум $Q_L = 0{,}0035$ достигается здесь при $q = 0{,}009$.

*См. Grant, Statistical quality control (1946), 353.

Кроме числа дефектных изделий x, в выборке в новой обстановке становится доступным для наблюдения число

$$z = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant c, \\ qN - x & \text{при } x \geqslant d \end{cases}$$

дефектных изделий, обнаруженных при сплошной проверке не вошедших в выборку $N - n$ изделий, если такая проверка производится. Это доставляет новые возможности для получения несмещенных оценок q и q^*.

Легко обнаружить, что достаточной статистикой задачи является сумма

$$u = x + z = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant c, \\ qN & \text{при } x \geqslant d. \end{cases}$$

Мы увидим сейчас, что *при* $0 < c \leqslant n$ *для любой функции* $f(q)$ *существует несмещенная оценка* $\varphi(u)$ *и притом одна единственная.*

В самом деле, требование

$$M^q \varphi(u) = \sum_{m \leqslant c} \varphi(m)\, p_m(q) + \varphi(qN)\,[1 - L(q)] = f(q) \tag{2}$$

заключает в себе $N + 1$ уравнений в соответствии с возможными значениями

$$q = 0,\ \frac{1}{N},\ \frac{2}{N}, \ldots, 1.$$

Так как при $q = 0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{c}{N}$ множитель $1 - L(q)$ в (2) равен нулю, то $\varphi(u)$ для $u \leqslant c$ однозначно определяется системой d уравнений

$$\sum_{u \leqslant c} \varphi(u)\, p_u\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{m}{N}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, c. \tag{3}$$

При $u \geqslant d$, положив $q = \frac{u}{N}$, получаем из (2)

$$\varphi(u) = \frac{f\left(\frac{u}{N}\right) - \sum\limits_{m \leqslant c} \varphi(m)\, p_m\left(\frac{u}{N}\right)}{1 - L\left(\frac{u}{N}\right)}. \tag{4}$$

В частности, при $f(q) = Q(q)$ формулы (3), (4) приводят к несмещенной оценке для $Q(q)$, т. е. для q^*.

§ 8. Оценка $f(a)$ в случае нормального распределения с заданным σ

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимы и подчинены нормальному распределению с плотностью вероятности

$$p(x \mid a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

Будем считать σ известным. Тогда

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \tag{2}$$

является достаточной статистикой задачи. Плотность вероятности для $\bar{x}$ может быть записана в виде

$$p(\bar{x} \mid a, \sigma) = G(\bar{x} - a, T), \tag{3}$$

где

$$G(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{4t}}, \tag{4}$$

$$T = \frac{\sigma^2}{2n}. \tag{5}$$

Основное уравнение (1) § 3 в нашем случае (для несмещенных оценок вида $\varphi(\bar{x})$ функции $f(a)$) может быть записано в форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\bar{x}) G(\bar{x} - a, T) d\bar{x} = f(a). \tag{6}$$

Положим при $t > -T$

$$\varphi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\zeta) G(\zeta - z, T - t) d\zeta. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$\varphi(z, 0) = f(z). \tag{8}$$

Без потери каких-либо решений задачи, имеющих практический интерес, можно ограничиться такими функциями $\varphi(z)$, что:

1) Функция $\varphi(z, t)$ аналитична при всех действительных z и $t > -T$ по обоим переменным z и t.

2) Почти всюду по z у функции $\varphi(z, t)$ существуют предельные значения

$$\varphi(z, -T) = \varphi(z). \tag{9}$$

Как известно, при $t > -T$ функция $\varphi(z, t)$ удовлетворяет тепловому уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \tag{10}$$

и при сделанных допущениях однозначно определяется для $t > -T$ своими значениями $f(z)$ при $t = 0$. В силу (9), это приводит к тому, что $\varphi(z)$ однозначно определяется по $f(z)$.*

Таким образом, *если задача нахождения несмещенной оценки для* $f(a)$ *разрешима, то при ограничениях* 1) *и* 2) *ее решение единственно.*

В силу уравнений (8), (9) (10), задача нахождения несмещенных оценок для $f(a)$ сводится к «обратной задаче теплопроводности», которой посвящены, например, работы ([6]), ([7]), ([8]). Мы отметим для дальней-

---

* Так как, в силу (3), $\bar{x}$ попадает на множества меры нуль с вероятностью, равной нулю, то возможная неопределенность $\varphi(z)$ на множестве меры нуль не мешает делу. Во всех подобных вопросах однозначность решения законно понимать в смысле однозначности с точностью до случаев, имеющих (при всех допустимых распределениях P) вероятность нуль.

шего лишь следующее, связанное с этим обстоятельство. Если при некотором $T_0 > T$ функция $f(z)$ уже представлена в виде

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\zeta - z, T_0)\, dF(\zeta), \tag{11}$$

то несмещенная оценка $\varphi(\bar{x})$ дается формулой

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\zeta - z, T_0 - T)\, dF(\zeta). \tag{12}$$

В частности, для самой плотности вероятности

$$p(x \mid a, \sigma) = G\left(x - a, \frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{13}$$

в какой-либо фиксированной точке x мы получаем несмещенную оценку при $n > 1$ в виде

$$\varphi_x(\bar{x})\, \varphi(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(\bar{x}-x)^2}{2\sigma_0^2}}, \quad \sigma_0^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2. \tag{14}$$

Интегрируя (14), получим при любом фиксированном множестве A, расположенном на числовой прямой x, для

$$P(A) = \mathrm{P}(x \in A \mid a, \sigma) = \int_A e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx \tag{15}$$

несмещенную оценку *

$$\varphi_A(\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \int_A e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_0^2}}\, dx. \tag{16}$$

Формула (16) применима в случае $n > 1$. В случае $n = 1$ вместо нее действует несмещенная оценка для $P(A)$ по $\bar{x} = x_1$ вида

$$\psi_A(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_1 \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x_1 \overline{\in} A. \end{cases} \tag{17}$$

По аналогии с (17) можно и в случае $n > 1$ дать для $P(A)$ несмещенную оценку

$$\psi_A^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \psi_A(x_m), \tag{18}$$

---

* На оценку (14) и возможность получить из нее интегрированием оценку (16) обратил мое внимание Ю. В. Линник. До этого замечания Ю. В. Линника я выводил оценки вида (17) для частных видов множества A непосредственно из уравнения (6).

равную $\frac{1}{n}$ от числа точек x_m, попавших на множество A. Эта оценка имеет то преимущество, что она является несмещенной оценкой $P(A)$ и в том случае, если класс $\mathfrak{P}$ допустимых распределений

$$P(A) = \mathrm{P}(x \in A)$$

расширить до класса всех одномерных распределений $P(A)$. Однако в случае нормальных распределений с неизвестным a и заданным σ оценка ψ_A^* значительно менее эффективна, чем φ_A.

§ 9. Оценка $f(a, \sigma)$ в случае нормального распределения с неизвестными a и σ

Будем исходить из формулы (1) § 8 и сохраним допущение о независимости $x_1, x_2, \ldots, x_n$ между собой, но предположим, что оба параметра a и σ неизвестны. Из формулы

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid a, \sigma) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\{(\bar{x}-a)^2 + s^2\}} \tag{1}$$

для n-мерной плотности вероятностей видно, что достаточных статистик задачи две: $\bar{x}$ и

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}(x_m - \bar{x})^2. \tag{2}$$

Двумерная плотность вероятностей для $\bar{x}$ и s выражается формулой

$$\bar{p}(\bar{x}, s \mid a, \sigma) = \frac{K_{n-2}\, n^{\frac{n-1}{2}} s^{n-2}}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^n} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\{(\bar{x}-a)^2 + s^2\}}, \tag{3}$$

где

$$K_{n-2} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{4}$$

есть $(n-2)$-мерный объем сферы единичного радиуса в $n-1$-мерном пространстве. Основное уравнение (1) § 3 приобретает теперь вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\bar{x}, s)\,\bar{p}(\bar{x}, s \mid a, \sigma)\, ds\, d\bar{x} = f(a, \sigma). \tag{5}$$

Мы ограничимся тем, что при помощи теоремы 2 § 1 найдем решение уравнения (5) для случая

$$f(a, \sigma) = P(A) = \int_A p(x \mid a, \sigma)\, dx. \tag{6}$$

Как уже было указано в § 8, для $P(A)$ существует несмещенная оценка

$$\psi_A(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x_1 \in A, \\ 0 & \text{при} \quad x_1 \overline{\in} A. \end{cases}$$

Чтобы получить несмещенную оценку для $P(A)$ вида $\varphi(\bar{x}, s)$, нам остается вычислить интеграл

$$\varphi_A(\bar{x}, s) = \int\limits_{V_{\bar{x}, s}} \psi_A(x_1)\, q\, dv, \tag{7}$$

где $V_{\bar{x}, s}$ обозначает подмножество n-мерного пространства точек $(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$, определяемое равенствами

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \bar{x}, \qquad \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} (x_m - \bar{x})^2 = s^2,$$

которое является $(n-2)$-мерной сферой радиуса

$$\rho = \sqrt{n}\, s; \tag{8}$$

dv обозначает элемент объема в $V_{\bar{x}, s}$, а множитель q имеет постоянное значение

$$q = \frac{1}{K_{n-2} (\sqrt{n}\, s)^{n-2}}. \tag{9}$$

При $n > 2$

$$\varphi_A(\bar{x}, s) = \int\limits_A \varphi_x\, dx, \tag{10}$$

где φ_x является несмещенной оценкой по $\bar{x}$ и s для плотности вероятностей $p(x \mid a, \sigma)$ в точке x. Для определеня φ_x рассмотрим объем

$$\frac{\varphi_x\, dx}{q}$$

кольца, высекаемого из сферы $V_{\bar{x}, s}$ плоскостями

$$x_1 = x, \quad x_1 = x + dx.$$

В случае

$$\frac{n}{n-1} (x - \bar{x})^2 \geqslant \rho^2$$

это кольцо исчезает и

$$\varphi_x = 0.$$

В случае же

$$\frac{n}{n-1} (x - \bar{x})^2 < \rho^2$$

интересующее нас кольцо имеет радиус

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 - \frac{n}{n-1}(x-\bar{x})^2}, \tag{11}$$

ширину

$$\delta = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\frac{\rho}{\rho'}\,dx$$

и объем

$$\frac{\varphi_x dx}{q} = K_{n-3}(\rho')^{n-3}\,\delta = K_{n-3}\sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\rho\,(\rho')^{n-4}\,dx.$$

Пользуясь формулами (9), (10) и (11), получаем теперь окончательно

$$\varphi_x = \begin{cases} \dfrac{K_{n-3}}{K_{n-2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\cdot\dfrac{1}{s}\left\{1-\dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{x-\bar{x}}{s}\right)^2\right\}^{\frac{n-4}{2}}, & \text{если } \left|\dfrac{x-\bar{x}}{s}\right| < \sqrt{n-1}, \\ 0, & \text{если } \left|\dfrac{x-\bar{x}}{s}\right| > \sqrt{n-1}. \end{cases} \tag{12}$$

Вводя функцию

$$f_n(t) = \begin{cases} C_n\left(1-\dfrac{1}{n-1}t^2\right)^{\frac{n-4}{2}} & \text{при } |t| \leqslant \sqrt{n-1}, \\ 0 & \text{при } |t| \geqslant \sqrt{n-1}, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$C_n = \frac{K_{n-3}}{K_{n-2}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{n-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\sqrt{n-1}}, \tag{14}$$

можно записать φ_x в виде

$$\varphi_x = \frac{1}{s}\,f_n\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right). \tag{15}$$

При $n \to \infty$ функции $f_n(t)$ сходятся к пределу

$$f_\infty(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{t^2}{2}}. \tag{16}$$

§ 10. Несмещенные оценки характеристик произвольного распределения по независимым наблюдениям

Рассмотренные нами примеры дали читателю некоторое представление о разнообразии конкретных задач, связанных с нахождением несмещенных оценок. Мне представляется, что эта область математической статистики

заслуживает большего внимания, чем ей уделяется. В заключение этой статьи, которая и не претендует на большее, чем на демонстрацию на примерах недостаточной разработанности этой области, я хочу указать на связь общего подхода к несмещенным оценкам и достаточным статистикам, изложенного в § 1, с результатами уже цитировавшейся работы Халмоса (4).

Пусть в некотором пространстве X_0 задана система распределений $\mathfrak{P}_0$. Допустимыми распределениями в пространстве X упорядоченных систем

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_m \in X_0$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, будем считать те и только те распределения, которые получаются обычным образом из предположения, что все x_m независимы и подчиняются одному и тому же распределению $\theta \in \mathfrak{P}_0$.

Вопрос о том, какие функционалы $f(\theta)$, заданные на $\mathfrak{P}_0$, допускают несмещенную оценку вида

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

равносилен вопросу о том, какие заданные на $\mathfrak{P}_0$ функционалы $f(\theta)$ могут быть представлены в виде

$$f(\theta) = \int_{X_0}\int_{X_0} \cdots \int_{X_0} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \theta(dx_1)\, \theta(dx_2) \cdots \theta(dx_n). \qquad (1)$$

Функционалы вида (1) естественно называть *функционалами степени* $\leqslant n$.* Они во многом аналогичны многочленам степени $\leqslant n$. Например, легко видеть, что они обладают следующим свойством:

(*) при любых θ_1 и θ_2 выражение

$$F(\lambda) = f[\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2]$$

для всех тех λ, для которых

$$\theta = \lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2$$

принадлежит $\mathfrak{P}_0$, может быть выражено в виде многочлена степени $\leqslant n$ от λ.

При некоторых ограничениях на систему $\mathfrak{P}_0$ верно и обратное: из свойства (*) вытекает представимость в виде (1), т. е. свойство (*) может быть принято за определение функционала степени $\leqslant n$ (по этому поводу см. определение полиноминальных операций, данное в (9)).

Изложенный очевидный критерий существования несмещенных оценок для $f(\theta)$ привел Халмоса к некоторым интересным следствиям.

* Легко видеть, что всякий функционал $f(\theta)$, представимый в виде (1) при $n = n_1$, представим в виде (1) при $n = n_2 > n_1$. Функционалы $f(\theta)$, представимые в виде (1) при $n = n_0$ и не представимые в виде (1) при любом меньшем n, естественно называть *функционалами степени* n_0.

Например, если $\mathfrak{P}_0$ состоит из всех распределений θ на числовой прямой, для которых абсолютный момент

$$\beta_s(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^s \, d\theta$$

конечен, где s — натуральное число, то центральный момент

$$\mu_s(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - m(\theta)]^s \, d\theta, \qquad m(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} t \, d\theta,$$

имеет несмещенную оценку вида

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

в том и только том случае, когда

$$s \leqslant n$$

(несмещенные оценки в случае $s \leqslant n$ хорошо известны, см. ([2]), 27.6).

Легко видеть, далее, что в соответствии с общим определением § 1 для рассматриваемой нами задачи оценки $f(\theta)$ по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существует достаточная статистика χ в виде системы значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, рассматриваемой независимо от порядка нумерации входящих в нее точек x_m (но с учетом кратностей в случае, если некоторые x_m совпадают). Функции $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающиеся через эту достаточную статистику χ, суть не что иное как симметрические функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Это очевидное замечание приводит нас, в силу теорем 2 и 3 § 1, к одному из результатов Халмоса: если для $f(\theta)$ имеется несмещенная оценка вида $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то для $f(\theta)$ имеется и симметрическая несмещенная оценка $\varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с дисперсией, не превосходящей дисперсию $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Халмосу удалось, однако, пойти и несколько дальше этих очевидных результатов и доказать при некоторых не слишком стеснительных ограничениях на систему $\mathfrak{P}_0$ *единственность* симметричной несмещенной оценки. (По этому поводу см. непосредственно его статью ([4]).)

Поступило
30. III. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, Москва, 1936.

[2] Крамер Г., Математические методы статистики, Москва, 1948.

[3] Blackwell D., Conditional expectation and unbiased sequential estimation, Ann. Math. Statistics, 18 (1947), 105—110.

[4] Halmos P., The theory of unbiased estimation, Ann. Math. Statistics, 17 (1946), 34—43.

[5] Girshick M. A., Mosteller F., Savage L. J., Unbiased estimates for certain binomial sampling problems with applications, Ann. Math. Statistics, 17 (1946), 13—23.

[6] Тихонов А. Н., Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, Доклады Ак. Наук СССР, 1 (1935), 294—300.

[7] Тихонов А. Н., Теоремы единственности для уравнения теплопроводности, Матем. сборник, 42 (1935), 199—216.

[8] Lévy P., Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène, Annali della Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 2, vol. 1 (1932), 283—296.

[9] Mazur S., Orlicz W., Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, Studia Mathematica, 5 (1934), 50—68, 179—189.

[10] Halmos P., Savage L. J., Application of the Radon — Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann. Math. Statistics, 20 (1949), 225—241.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 327—342

Ю. В. ЛИННИК

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ЗИГЕЛЯ НА ОСНОВЕ СПОСОБА И. М. ВИНОГРАДОВА

(С приложением короткого аналитического доказательства)

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается элементарное доказательство теоремы Зигеля о числе классов бинарных квадратичных форм, основанное на некоторых замечаниях И. М. Виноградова. Аналитическая интерпретация доказательства дает некоторые новые факты о возможных связях в расположении нулей различных L-рядов.

1. Около 30 лет назад И. М. Виноградовым была высказана мысль о примечательном сходстве между поведением примитивных реальных характеров $\chi(n)$ по большому модулю D на интервале $[1, D-1]$ и поведением функции Лиувилля $\lambda(n) = (-1)^{\nu(n)}$ ($\nu(n)$ — число всех простых делителей n) на том же интервале. Основой такого сходства является полная мультипликативность обоих видов функций. Однако в то время как для сумм характеров $\chi(n)$ существует оценка И. М. Виноградова [см. (1)]

$$\sum_{n\leqslant x} \chi(n) \ll \sqrt{D}\ln D \tag{1.1}$$

для любого $x \in [1, D-1)$, существование оценки типа

$$\sum_{n\leqslant x} \lambda(n) \ll x^{1-c_0} \quad (c_0 > 0 \text{ — константа}) \tag{1.2}$$

для функции Лиувилля $\lambda(n)$ является неразрешенной проблемой, совпадающей со «слабой гипотезой Римана» для ζ-функции Римана.

Для выяснения связи между оценками (1.1) и (1.2) И. М. Виноградов указал на полезность изучения степени порчи функции Лиувилля $\lambda(n)$ при замене ее на характер $\chi(n)$.

В небольшой заметке 1942 г. (2) автор настоящей статьи наметил, исходя из этих идей, новое доказательство теоремы Зигеля о числе классов бинарных квадратичных форм отрицательного дискриминанта. Однако это доказательство требовало мощных аналитических средств и больших предварительных сведений.

В настоящей статье на основе тех же идей предлагается сравнительно элементарное доказательство теоремы Зигеля, не использующее анализа теории функций комплексного или реального переменного. В виде приложения дается короткое аналитическое доказательство.

2. Теорема Зигеля о числе классов $h(\Delta)$ бинарных форм фундаментального дискриминанта Δ утверждает, что

если $\Delta = -D < 0$, то

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\ln h(-D)}{\ln D} = \frac{1}{2}, \tag{2.1}$$

и если $\Delta = D > 0$, то

$$\lim_{D\to\infty} \frac{\ln R_D + \ln h(D)}{\ln D} = \frac{1}{2}, \tag{2.2}$$

где R_D — «регулятор» квадратичной области.

В данной работе мы ограничимся доказательством (2.1), хотя легко усмотреть, что аналогично можно доказать и (2.2); мы опускаем это доказательство лишь ввиду осложнений тривиального типа.

В доказательстве будут использованы:

а) элементы арифметической теории бинарных квадратичных форм и реальных характеров, включая оценку И. М. Виноградова (1.1); *

б) элементарные свойства простых чисел и функции Мёбиуса;

в) определение и свойства неперова числа;

г) элементарная алгебра;

д) понятие о пределе (этого можно и избежать, но тогда нужно очевидным образом изменить формулировку теоремы).

К сожалению, доказательство будет столь же неэффективным, как и другие известные доказательства. (По поводу проблемы эффективизации см., например, (3).)

Вместе с тем, аналитическая интерпретация доказательства выявит некоторый, повидимому, новый факт.

3. Пусть

$$C_0,\ C_1,\ \ldots;\quad c_0,\ c_1\ \ldots;\quad \varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \ldots;\quad \eta_0,\ \eta_1,\ \ldots$$

обозначают положительные константы; в двух последних рядах будут всегда малые $\left(\text{меньше } \frac{1}{4}\right)$ константы.

Пусть дан реальный примитивный характер $\chi_k(n)$ по модулю $k > 2$ и число $\beta > \frac{1}{2}$, не превосходящее 1.

Мы будем говорить, что $\chi_k(n)$ обладает свойством $\mathfrak{A}(\beta)$, если существует такая константа $C_0(\chi_k)$, что при любом $N > C_0(\chi_k)$ в сегменте $[\sqrt{N}, N]$ найдется такое $N_1 \in [\sqrt{N}, N]$, что

$$\left|\sum_{n\leqslant N_1} \chi_k(n)\,\mu(n)\right| > N_1^{\beta}. \tag{3.1}$$

Со свойством $\mathfrak{A}(\beta)$ связана следующая лемма**.

---

* Впрочем, ее можно заменить и тривиальной оценкой: D вместо $\sqrt{D}\ln D$.

** Она имеет некоторую аналитическую новизну, так как условие (3.1) не предполагает реальности «аномальных нулей» $L(s, \chi_k)$.

I ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Если существует какой-либо характер $\chi_k(n)$, обладающий свойством $\mathfrak{A}(\beta)$, где $\beta \geqslant \frac{3}{4}$, то при $D > C_1(\chi_k, \eta_0)$ будем иметь*

$$h(-D) > D^{\frac{1}{2}-\eta(\beta)}, \tag{3.2}$$

где

$$\eta(\beta) = 10{,}5(1-\beta) + \eta_0 \tag{3.3}$$

и η_0 — сколь угодно малое положительное фиксированное число.

Доказательство этого предложения будет опираться на несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Если $\rho > 1$, $q_1 > q_0 > 1$, то*

$$\sum_{q=q_0}^{q_1} \frac{1}{q^\rho} < \frac{2}{1-\frac{1}{2^\rho}} \cdot \frac{1}{q_0^{\rho-1}}. \tag{3.4}$$

Для доказательства заменяем все числа q между q_0 и $2q_0$ на q_0, все числа q между $2q_0+1$ и $4q_0$ на $2q_0$ и т. д. и оцениваем далее сумму геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{2^\rho}$.

ЛЕММА 2. *Если имеет место неравенство*

$$\Big|\sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(n)\,\mu(n)\Big| > N_1^\beta, \qquad \beta > \frac{1}{2}, \tag{3.5}$$

и ε — любое число под условием $0 < \varepsilon < \beta - \frac{1}{2}$, то при $N_1 > C_0(\beta, \varepsilon, \chi_k)$ в сегменте $[N_1^{2\beta-1-2\varepsilon}, N_1]$ найдется целое число $N_2 \in [N_1^{2\beta-1-2\varepsilon}, N_1]$ такое, что

$$\Big|\sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n)\,\lambda(n)\Big| > N_2^{\beta-\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Доказательство. По соображениям «решета», имеем

$$\sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(n)\,\mu(n) = \sum_{q \leqslant \sqrt{N_1}} \mu(q) \sum_{m \leqslant \frac{N_1}{q^2}} \chi_k(m)\,\lambda(m). \tag{3.7}$$

Отберем те значения q, для которых $q \geqslant N_1^{1-\beta+\varepsilon}$. Для них, согласно (3.4), получим

$$\Big|\sum_{N_1^{1-\beta+\varepsilon} \leqslant q \leqslant \sqrt{N_1}} \mu(q) \sum_{m \leqslant \frac{N_1}{q^2}} \chi_k(m)\,\lambda(m)\Big| \leqslant \sum_{N_1^{1-\beta+\varepsilon} \leqslant q \leqslant \sqrt{N_1}} \frac{N_1}{q^2} < \frac{4N_1}{N^{1-\beta+\varepsilon}}.$$

Это последнее число не превосходит $4N_1^{\beta-\varepsilon}$, так что

$$\sum_{n \leqslant N} \chi_k(n)\,\mu(n) = \sum_{q < N^{1-\beta+\varepsilon}} \mu(q) \sum_{m \leqslant \frac{N_1}{q^2}} \chi_k(m)\,\lambda(m) + R_{N_1}, \tag{3.8}$$

где $|R_{N_1}| < 4N_1^{\beta-\varepsilon}$.

Допустим теперь, что при $q < N_1^{1-\beta+\varepsilon}$ имеем всегда

$$\Big|\sum_{n<\frac{N_1}{q^2}} \chi_k(m)\lambda(m)\Big| < \left(\frac{N_1}{q^2}\right)^{\beta-\varepsilon}$$

и приведем предположение к противоречию. На основании (3.4), мы получим из предположения

$$\Big|\sum_{q<N_1}\mu(q)\sum_{m<\frac{N_1}{q^2}}\chi_k(m)\lambda(m)\Big| < N_1^{\beta-\varepsilon}\sum_{1<q<N_1^{1-\beta+\varepsilon}}\frac{1}{q^{2\beta-2\varepsilon}} < C(\beta,\ \varepsilon)\,N_1^{\beta-\varepsilon}.$$

Подставляя в (3.8), находим

$$\Big|\sum_{n\leqslant N_1}\chi_k(n)\mu(n)\Big| < (C(\beta,\ \varepsilon)+4)\,N_1^{\beta-\varepsilon},$$

что противоречит (3.5). Отсюда следует, что при достаточно большом N_1 найдется q_1 такое, что

$$\Big|\sum_{m\leqslant\frac{N_1}{q^2}}\chi_k(m)\lambda(m)\Big| \geqslant \left(\frac{N_1}{q^2}\right)^{\beta-\varepsilon},\qquad q < N_1^{1-\beta+\varepsilon}.$$

Полагая $N_2 = \frac{N_1}{q^2}$, мы видим, что $N_2 \leqslant N_1$ и $N_2 > N^{2\beta-1-2\varepsilon}$. Это и доказывает лемму 2.

4. ЛЕММА 3. *Для любого характера* $\chi(n)$, *примитивного* $(\mathrm{mod}\,D)$, *имеем*:

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n) \ll \sqrt{D}\ln D, \tag{4.1}$$

где x — *любое число,* $\ll$ — *известный знак И. М. Виноградова.*

Далее, если $\nu(n)$ — *число простых делителей* n, $\tau(n)$ — *число всех его делителей, то*

$$2^{\nu(n)} \ll n^{\varepsilon},\qquad \tau(n) \ll n^{\varepsilon}$$

при любом фиксированном ε *и* $n \to \infty$.

Эти три соотношения, из которых (4.1) есть известная оценка И. М. Виноградова, доказываются элементарно.

ЛЕММА 4. *Если* $Q(x,\ y) = ax^2 + bxy + cy^2$ — *приведенная положительная коренная форма дискриминанта* — D, *то*

$$\sum_{m\leqslant M} r(m) < c_1\frac{M}{\sqrt{D}},$$

где $r(m)$ — *число решений уравнения* $Q(x,\ y) = m$, *а* $M \geqslant D^2$.

Для подсчета достаточно грубо оценить число целых точек $(x,\ y)$ в области $Q(x,\ y) \leqslant M$.

5. Доказательство I основной леммы. Пусть дан реальный характер $\chi_k(n)$, обладающий свойством $\mathfrak{A}(\beta)$ с $\beta \geqslant \frac{3}{4}$, и указана соответствующая константа $C_0(\chi_k)$. Тогда, по определению свойства $\mathfrak{A}(\beta)$ и по

лемме 2, при любом положительном $\varepsilon < \beta - \frac{1}{2}$ и $N > C_1(\beta, \varepsilon, \chi_k)$ в сегменте $[N^{\beta-\frac{1}{2}-\varepsilon}, N]$ найдется число N_2 такое, что

$$\left| \sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \lambda(n) \right| > N_2^{\beta-\varepsilon}. \tag{5.1}$$

Положим здесь

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 0{,}01(1-\beta). \tag{5.2}$$

Пусть существует бесконечная последовательность фундаментальных дискриминантов $-D_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ под условием

$$h(-D_j) \leqslant D_j^{\frac{1}{2}-\eta(\beta)}, \quad \eta(\beta) = 10{,}5(1-\beta) + \eta_0, \tag{5.3}$$

где η_0 — сколь угодно малое положительное фиксированное число. Нам нужно привести это предположение к противоречию. Возьмем столь большое $D_j = D$, что $D_j > C_1(\beta, \varepsilon, \chi_k)$ и выберем

$$N = [2D^{\frac{4}{\beta-\frac{1}{2}-\varepsilon_0}}] = N_3.$$

Тогда найдется $N_2 \in [D^4, N_3]$, $N_3 > D^8$, такое, что

$$\left| \sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \lambda(n) \right| > N_2^{\beta-\varepsilon_0}. \tag{5.4}$$

6. Положим $\chi(n) = \left(\frac{-D}{n}\right)$ и введем сумму

$$\sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \chi(n).$$

Согласно лемме 3 и основным свойствам характеров, имеем

$$\sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \chi(n) \ll \sqrt{kD} \ln(kD). \tag{6.1}$$

Сравним суммы (5.3) и (6.1), исследуя возможные различия в поведении $\lambda(n)$ и $\chi(n)$.

Пусть сперва $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, для которых $\chi(p_j) = 0$. Тогда $p_1 p_2 \ldots p_s \leqslant D$.

Введем мультипликативную функцию $\chi'(n)$, которая отличается от $\chi(n)$ тем и только тем, что $\chi'(p_j) = -1$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда получим

$$\sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \chi'(n) = \sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \chi(n) -$$
$$- \sum_{p_j} \sum_{n \leqslant \frac{N_2}{p_j}} \chi_k(n) \chi(n) + \ldots + (-1)^{s-1} \sum_{n \leqslant \frac{N_2}{p_1 \ldots p_s}} \chi_k(n) \chi(n).$$

Число наших сумм не превосходит $2^s \leqslant \tau(D) \ll D^{\varepsilon'}$ при любом фиксированном $\varepsilon' > 0$. Каждая из сумм, по лемме 3, не превосходит $C_1 \sqrt{Dk} \ln(kD)$ и поэтому

$$\sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \chi'(n) n \ll N_2^{\varepsilon'} \sqrt{kD} \ln(kD). \tag{6.2}$$

Произведем в этой сумме замену всех $\chi'(n)$ на $\lambda(n)$, что равносильно замене значений $\chi'(p)=1$ для p/n на $\lambda(p)=-1$ (p/n).

Обозначим через $\mathfrak{A}_D$ множество всех таких чисел n', каждый простой делитель которых p/n' будет иметь $\chi(p)=+1$.

Из элементарной теории квадратичных форм хорошо известно, что $\mathfrak{A}_D$ совпадает с множеством всех чисел, примитивно представляемых формами дискриминанта $-D$. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant N_2}\chi_k(n)\lambda(n)=\sum_{n\leqslant N_2}\chi_k(n)\chi'(n)-2\sum_{p_j\in\mathfrak{A}_D}\sum_{n\leqslant\frac{N_2}{p_j}}\chi_k(n)\chi'(n)+$$

$$+4\sum_{p_i p_j\in\mathfrak{A}_D}\sum_{n\leqslant\frac{N_2}{p_i p_j}}\chi_k(n)\chi'(n)+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^m 2^m\sum_{p_i p_j\cdots p_\rho\in\mathfrak{A}_D}\sum_{n\leqslant\frac{N_2}{p_i p_j\cdots p_\rho}}\chi_k(n)\chi'(n)+\cdots. \quad (6.3)$$

Разобьем суммы на два типа:

1) те, в которых $p_i p_j \cdots p_\rho \geqslant \frac{N_2}{D^2}$,

2) остальные.

Суммы первого типа в совокупности не превосходят

$$N^2\sum_{\frac{N_2}{D^2}\leqslant n'\leqslant N_2}\frac{2^{\nu(n')}}{n'},$$

где n' — свободное от квадратов число, принадлежащее $\mathfrak{A}_D$. Из элементарной теории квадратичных форм следует, что эта сумма не превосходит

$$N_2\sum_Q\sum_{\frac{N_2}{D^2}\leqslant Q(x,\,y)\leqslant N_2}\frac{1}{Q(x,\,y)},$$

где $Q(x,\,y)$ пробегает приведенные формы дискриминанта $-D$.

Из леммы 4 легко выводим

$$\sum_{\frac{N_2}{D^2}\leqslant Q(x,\,y)\leqslant N_2}\frac{1}{Q(x,y)}<C_2\frac{\log_2 D}{\sqrt{D}}$$

Суммирование на все $\leqslant 2h(-D)$ форм $Q(x,\,y)$ дает

$$N_2\sum_Q\sum_{\frac{N_2}{D^2}\leqslant Q(x,\,y)\leqslant N_2}\frac{1}{Q(x,y)}<2N_2h(-D)\frac{C_2\log_2 D}{\sqrt{D}}. \quad (6.4)$$

Но, согласно (5.3),

$$h(-D)\leqslant D^{\frac{1}{2}-\gamma(\beta)},$$

так что получаем

$$N_2 \sum_{\frac{N_2}{D^2} \leqslant n' \leqslant N_2} \frac{2^{\nu(n')}}{n'} < 2C_2 N_2 \log_2 D \cdot D^{\frac{1}{2} - \eta(\beta)} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}} \ll N_2 \log_2 D \cdot D^{-\eta(\beta)}. \quad (6.5)$$

Для сумм второго типа, где $p_i p_j \cdots p_\rho < \frac{N_2}{D^2}$, имеем

$$\left| 2^m \sum_{n \leqslant \frac{N_2}{p_i \cdots p_\rho}} \chi_k(n) \chi'(n) \right| < N_2^{\varepsilon'} \cdot 2\sqrt{kD} \ln(kD), \quad (6.6)$$

на основании очевидной модификации оценки (6.2).

Далее, $2^m \ll N_2^{\varepsilon'}$, по лемме 3. Количество же сумм второго типа равно количеству $p_i p_j \cdots p_\rho < \frac{N_2}{D^2}$, так что общая их оценка не превосходит

$$C_{\varepsilon'} N_2^{2\varepsilon'} \frac{\sqrt{kD} \ln kD}{D^2} N^2. \quad (6.7)$$

7. Оценки (6.5) и (6.7) дают в соединении с (6.3)

$$\left| \sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \lambda(n) \right| \ll N_2 D^{-0,9\eta(\beta)}, \quad (7.1)$$

в то время как согласно (5.4),

$$\left| \sum_{n \leqslant N_2} \chi_k(n) \lambda(n) \right| > N_2^{\beta - \varepsilon_0} = N_2^{\beta - 0,01(1-\beta)}. \quad (7.2)$$

По выбору N_2 имеем $N_2 \leqslant 2D^{\frac{4}{\beta - \frac{1}{2} - \varepsilon_0}} < D^9$, откуда

$$D^{0,9\eta(\beta)} > N_2^{0,1\eta(\beta)}.$$

Вспоминая, что $\eta(\beta) = 10,5(1-\beta) + 0,1\eta_0$, получим, сравнивая (7.1) и (7.2),

$$N_2^{1-1,01(1-\beta)} \ll N_2^{1-0,1\eta(\beta)} = N_2^{1-1,05(1-\beta)-0,1\eta_0}. \quad (7.3)$$

При $D > C_0(\beta, \eta_0, k)$ получим очевидное противоречие, доказывающее I основную лемму.

8. ЛЕММА 5. *При $h \to 0$ имеем*

$$\ln(1+h) = 1 + O(h), \quad (1+h)^\beta = 1 + O(h), \quad (8.1)$$

где $\beta > 0$ — фиксированное число.

Эта лемма доказывается на основании определения числа e и натуральных логарифмов, а также свойств обыкновенного бинома Ньютона.

Пусть $(-k)$ — фундаментальный дискриминант, а $\chi_k(n) = \left(\frac{-k}{n}\right)$ — соответствующий характер. Пусть ε_1 — какое-либо число, фиксированное под условиями:

$$0 < \varepsilon_1 < 0,01. \quad (8.2)$$

Предположим, что

$$h(-k) < k^{\frac{1}{2} - \varepsilon_1} \quad (8.3)$$

и, считая в дальнейшем k достаточно большим сравнительно с $\frac{1}{\varepsilon_1}$, выведем из (8.3) некоторые следствия.

Пусть a_1 — положительное число под условиями:

$$0{,}01\varepsilon_1 \leqslant a_1 \leqslant \frac{3}{2}. \tag{8.4}$$

Мы будем рассматривать выражение:

$$L(a_1) = \sum_{n \leqslant k^3} \chi_k(n)\, n^{-a_1} \tag{8.5}$$

и в нем, как это делалось в п. 6, постараемся заменить $\chi_k(n)$ на $\lambda(n)$, а затем отсеять числа, делящиеся на квадраты. Таким образом, мы будем сравнивать (8.5) с

$$L_1(a_1) = \sum_{n \leqslant k^3} \chi_k(n)\, n^{-a_1}. \tag{8.6}$$

9. Пусть

$$A = \frac{4}{\varepsilon_1}, \quad (\ln k)^A = \Delta, \quad k_1 = k^3. \tag{9.1}$$

Посмотрим, что получится, если отсеять из (8.5) числа n, содержащие простые множители, не превосходящие Δ. Если обозначить

$$\prod\nolimits_1 (a_1) = \prod_{p \leqslant \Delta} \left(1 - \frac{\chi_k(p)}{p^{a_1}}\right) = \sum_q \frac{b_q}{q^{a_1}},$$

то получим

$$L_2(a_1) = \sum_{q \leqslant k_1} \frac{b_q}{q^{a_1}} \sum_{m \leqslant \frac{k_1}{q}} \chi_k(m)\, m^{-a_1}, \tag{9.2}$$

где $L_2(a_1)$ — результат высеивания из $L(a_1)$ указанных выше чисел.

Докажем следующую оценку: для любого числа $N \geqslant k$ имеем

$$\sum_{N \leqslant q \leqslant 2N} |b_q|\, q^{-a_1} \ll N^{-0{,}15\varepsilon_1}. \tag{9.3}$$

В самом деле, пусть (9.3) не выполняется для какого-либо $N \geqslant k$. Пусть $a_1' = 1 - 0{,}2\varepsilon_1$. Тогда имеем

$$\sum_{N \leqslant q \leqslant 2N} |b_q|\, q^{-a_1'} > N^{a_1 - a_1'} \sum_{N \leqslant q \leqslant 2N} |b_q|\, q^{-a_1} \gg N^{-0{,}15\varepsilon_1 + 0{,}19\varepsilon_1} = N^{0{,}04\varepsilon_1}. \tag{9.4}$$

С другой стороны,

$$\sum_{N \leqslant q \leqslant 2N} \frac{|b_q|}{q^{a_1'}} < \prod_{p \leqslant \Delta} \left(1 + \frac{1}{p^{a_1}}\right)$$

и

$$\ln \prod_{p \leqslant \Delta} \left(1 + \frac{1}{p^{a_1'}}\right) \ll \sum_{n \leqslant \Delta} \frac{1}{n^{a_1'}} \ll \Delta^{1 - a_1'},$$

по леммам 1 и 5.

Далее,

$$\Delta^{1 - a_1'} = (\ln k)^{A \cdot 0{,}2\varepsilon_1} = (\ln k)^{0{,}8} \leqslant (\ln N)^{0{,}8}. \tag{9.5}$$

Это явно противоречит (9.4) и доказывает лемму.

10. Полагая

$$\prod\nolimits_2 (a_1) = \prod_{\substack{\Delta < p < k_1 \\ \chi_k(p) = +1}} \frac{1 - \frac{1}{p^{a_1}}}{1 + \frac{1}{p^{a_1}}} = 1 + \sum_{q > \Delta} \frac{d_q}{q^{a_1}}, \tag{10.1}$$

докажем следующую лемму:

ЛЕММА 6. *Для любого* $N \in [\Delta, k^4]$ *число простых чисел под условием:* $\chi_h(p) = +1$, $N \leqslant p \leqslant 2N$, *будет*

$$N_1 \ll N^{-0.015\varepsilon_1}. \tag{10.2}$$

Доказательство. Пусть это не так для данного N. Найдем целое число r, для которого $(2N)^r = k^\gamma$, $2 \leqslant \gamma < 3$, и будем рассматривать $C_{N_1}^r$ всевозможных различных произведений по r из наших простых чисел. Имеем

$$C_{N_1}^r > \frac{N_1^r 2^{-r}}{r!} > N_1^r e^{-r(1+\ln r)} \quad (\text{очевидно, } r! \leqslant e^{r \ln r}),$$

$$r \leqslant \frac{3 \ln k}{\ln \Delta} = \frac{3}{4} \varepsilon_1 \frac{\ln k}{\ln \ln k}, \quad \ln r \leqslant \ln \ln k.$$

Отсюда при большом k имеем

$$C_{N_1}^r > N_1^r k^{-0,76\varepsilon_1}.$$

Если $N_1 > N^{1-0,015\varepsilon_1}$, то

$$C_{N_1}^r > k^\gamma \cdot k^{-0,76\varepsilon_1}.$$

Все построенные произведения лежат между k^γ и $k^\gamma \cdot 2^{-r}$, $r \leqslant \frac{3}{4} \varepsilon_1 \frac{\ln k}{\ln \ln k}$. Все эти произведения представимы квадратичными формами $Q(x, y)$ цискриминанта $(-k)$ и лемма 4 в этом случае непосредственно дает

$$h(-k) > k^{\frac{1}{2} - 0,82\varepsilon_1},$$

что противоречит (8.3) при большом k. Лемма доказана.

Обозначая

$$\overline{\prod}_2 (a_1) = \prod_{\substack{\Delta < p \leqslant k_1 \\ \chi_k(p) = +1}} \frac{1 + \frac{1}{p^{a_1}}}{1 - \frac{1}{p^{a_1}}},$$

мы с помощью этой леммы, получаем произведение, мажорирующее $\Pi_2(a_1)$ по лемме 5.

$$\ln \overline{\prod}_2 (a) \ll \sum_{\substack{\Delta < p \leqslant k \\ \chi_k(p) = +1}} \frac{1}{p^{a_1}} \ll \frac{1}{\Delta^{a_1}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ia_1}} (\Delta \cdot 2^i)^{1 - 0,015\varepsilon_1} \ll (\ln k)^{-0,02}. \tag{10.3}$$

Отсюда следует

ЛЕММА 6а. *При* $N \geqslant k$, $a_2 \geqslant 1 - 0,005\,\varepsilon_1$ *имеем*

$$\sum_{N \leqslant q \leqslant 2N} |d_q| q^{-a_1} \ll N^{-0,004\varepsilon_1}. \tag{10.4}$$

Доказательство с помощью (10.3) полностью аналогично доказательству оценки (9.3).

11. Будем считать a_3 фиксированным и принадлежащим сегменту $\left[1-0{,}001\varepsilon_1, \frac{3}{2}\right]$. Полагая

$$\prod(a_3) = \prod_{2\leqslant p\leqslant\Delta} \frac{1-\frac{\chi_k(p)}{p^{a_3}}}{1+\frac{1}{p^{a_3}}} \prod_{\substack{\Delta<p\leqslant k_1 \\ \chi_k(p)=+1}} \frac{1-\frac{1}{p^{a_3}}}{1+\frac{1}{p^{a_3}}} \prod_{2\leqslant p\leqslant k_1}\left(1-\frac{1}{p^{2a_3}}\right) = \sum_q \frac{e_q}{q^{a_3}},$$

находим, объединяя оценки п. 9 и п. 10,

$$\ln \prod(a_3) \ll (\ln k)^{0,8}, \tag{11.1}$$

$$\sum_{N\leqslant q\leqslant 2N} |e_q|\, q^{-a_3} \ll N^{-0,003\varepsilon_1} \text{ при } N \geqslant k. \tag{11.2}$$

Далее, имеем

$$L_1(a_3) = \sum_{n\leqslant k_1} \frac{\mu(n)}{n^{a_3}} \sum_{q\leqslant k_1} \frac{l_q}{q^{a_3}} \sum_{m\leqslant \frac{k_1}{q}} \frac{\chi_k(m)}{m^{a_3}}, \tag{11.3}$$

Но абелево суммирование и оценка вида (1.1) дают:

$$\sum_{m\leqslant\frac{k_1}{q}} \frac{\chi_k(m)}{m^{a_1}} = \begin{cases} L(a_1) + Bk^{-\frac{1}{8}} & \text{при } q \leqslant k^{1,5}, \\ B_k^{0,0015\,\varepsilon_1} & \text{при } q > k^{1,5}. \end{cases} \tag{11.4}$$

Здесь B — ограниченное число, не всегда одно и то же. Подставим результат (11.2) и (11.4) в (11.3); тогда получим

$$L_1(a_3) = \sum_{q\leqslant\frac{k_1}{k^2}} \frac{l_q}{q^{a_1}}\left(L(a_3) + Bk^{-\frac{1}{2}}\right) + R_{a_1}, \tag{11.5}$$

где

$$R_{a_1} \ll k^{0,0015\varepsilon_1} \sum_{u^2\leqslant q\leqslant k^2} \frac{|l_q|}{q^{a_3}} \ll k^{0,0015\varepsilon_1-0,003\varepsilon_1} \ll k^{-0,0015\varepsilon_1}. \tag{11.6}$$

Далее, (11.2) дает

$$\sum_{q\leqslant\frac{k_1}{k^2}} \frac{l_q}{q^{a_3}} = \prod(a_3) + Bk^{-0,003\varepsilon_1}. \tag{11.7}$$

Наконец, известная арифметическая оценка:

$$\tau(n) = O(n^{\eta})$$

при любом фиксированном $\eta > 0$ дает

$$\sum_{q\leqslant\frac{k_1}{k^2}} \frac{|l_q|}{q^{a_1}} \ll k^{0,0015\varepsilon_1}.$$

Следовательно, (11.6) и (11.7) дают:

$$L_1(a_3)=\prod(a_3)L(a_3)+Bk^{-0{,}0015\varepsilon_1}. \tag{11.8}$$

Учитывая (11.1), найдем отсюда

$$L(a_3)=L_1(a_3)\left(\prod(a_3)\right)^{-1}+Bk^{-0001\varepsilon_1}. \tag{11.9}$$

12. Положим $a_3=\beta$, так что $\beta\in\left[1-0{,}001\varepsilon_1, \frac{3}{2}\right]$.

ЛЕММА 7. *Для любого* $n\in[k^2, k^4]$

$$\sum_{n\leqslant N}\mu(n)\ll n^{1-0{,}01\varepsilon_1}. \tag{12.1}$$

Эта лемма доказывается с помощью тривиальной модификации доказательства I основной леммы: нарушение (12.1) привело бы к противоречию с гипотезой:

$$h(-k)<k^{\frac{1}{2}-\varepsilon_1}. \tag{8.3}$$

(По существу, лемма 7 — частный случай несколько видоизмененной I основной леммы.)

Введем функцию

$$F(\beta, k_2)=\sum_{n\leqslant k_2}a_n n^{-\beta},$$

где

$$a_n=(-1)^{n-1},\quad k_2=k_1k=k^4.$$

В таком случае имеем тождество:

$$\sum_{n\leqslant k_2}n^{-\beta}\sum_{\delta/n}a_\delta\mu\left(\frac{n}{\delta}\right)=1-2^{1-\beta}; \tag{12.2}$$

его можно переписать в виде

$$\sum_{q\leqslant k_1k}\frac{\mu(q)}{q^\beta}\sum_{m\leqslant\frac{k_1k}{q}}\frac{a^m}{m^\beta}=1-2^{1-\beta}. \tag{12.3}$$

Здесь мы можем выделить $q>k_1$ и применить (12.1) и очевидную оценку $\left|\sum_{m\leqslant\alpha}a_m\right|\leqslant 1$, рассуждая, как и в п. 10 и 11. Тогда получим

$$L(\beta)F(\beta, k_2)=1-2^{1-\beta}+Bk^{-0{,}005\varepsilon_1}, \tag{12.4}$$

или, учитывая (11.9),

$$L(\beta)F(\beta, k_2)=(1-2^{1-\beta})\left(\prod(\beta)\right)+Bk^{-0{,}001\varepsilon_1}, \tag{12.5}$$

$$\ln\prod(\beta)\ll(\ln k)^{0{,}8}. \tag{12.6}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} &L(\beta)F(\beta, k_2)>c'_{\varepsilon_1}e^{-c_1(\ln k)^{0{,}8}} \quad \text{при } \beta=1+0{,}001\varepsilon_1,\\ &L(\beta)F(\beta, k_2)<-c''_{\varepsilon_1}e^{-c_1(\ln k)^{0{,}8}} \quad \text{при } \beta=1-0{,}001\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Но

$$F(\beta, k_2) = 1 - \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\beta} - \cdots \pm \frac{1}{k_2^\beta} > 1 - \frac{1}{2^\beta} + \frac{B}{k_2^{\frac{1}{2}}} > \frac{1}{4}.$$

Таким образом, мы получаем весьма важные неравенства:

$$\begin{aligned} L(\beta) &> c_{\varepsilon_1} e^{-c_1 (\ln k)^{0,8}} \quad \text{при } \beta = 1 + 0{,}001\varepsilon_1, \\ L(\beta) &< -c_{\varepsilon_1} e^{-c_1 (\ln k)^{0,8}} \quad \text{при } \beta = 1 - 0{,}001\varepsilon_1. \end{aligned} \qquad (12.8)$$

13. II ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Характер* $\chi_k(n)$, *для которого имеем*

$$h(-k) < k^{\frac{1}{2} - \varepsilon_1}, \qquad (8.3)$$

должен обладать свойством $\mathfrak{A}(\beta_1)$ *при* $\beta_1 = 1 - 0{,}08\varepsilon_1$.

Для доказательства леммы предположим, что это не так. Тогда найдется $N \geqslant k^{100}$ такое, что для любого $x \in [\sqrt{N}, N]$ будем иметь

$$\left|\sum_{n \leqslant x} \chi_k(n)\, \mu(n)\right| \leqslant x^{1 - 0{,}08\varepsilon_1}. \qquad (13.1)$$

Положим $x = N$. Способ «решета» приводит к тождеству:

$$\sum_{q \leqslant N} \chi_k(q)\, \mu(q)\, q^{-\beta} \sum_{m \leqslant \frac{N}{q}} \chi_k(m)\, m^{-\beta} = 1. \qquad (13.2)$$

Примем во внимание (11.4) и оценки

$$\sum_{n \leqslant N_1} \chi_k(m)\, \mu(m)\, m^{-\beta} \ll N_1^{0{,}001\varepsilon_1}$$

и

$$\sum_{N_1 \leqslant m \leqslant N_2} \chi_k(m)\, m^{-\beta} < \frac{k}{N_1^\beta}$$

для любого N_1. Тогда (13.1) и (13.2) дадут нам, по тому же способу, как в пп. 9 и 10,

$$M(\beta) \sum_{m \leqslant \sqrt{N}} \frac{\chi_k(m)}{m^\beta} = 1 + BN^{-0{,}05\varepsilon_1}, \qquad (13.3)$$

где

$$M(\beta) = \sum_{q \leqslant \sqrt{N}} \chi_k(q)\, \mu(q)\, q^{-\beta}.$$

Далее, имеем:

$$\sum_{k_1 \leqslant m \leqslant \sqrt{N}} \chi_k(m)\, m^{-\beta} = Bk^{-1},$$

так что

$$Q(\beta) = \sum_{m \leqslant \sqrt{N}} \frac{\chi_k(m)}{m^\beta} = L(\beta) + Bk^{-1}.$$

Отсюда, используя (12.8), получаем:

$$Q(\beta) > \frac{1}{2} c_{\varepsilon_1} e^{-c_1 (\ln k)^{0,08}} \quad \text{при } \beta = 1 + 0{,}001\varepsilon_1,$$
$$Q(\beta) < -\frac{1}{2} c_{\varepsilon_1} e^{-c_1 (\ln k)^{0,08}} \quad \text{при } \beta = 1 - 0{,}001\varepsilon_1. \qquad (13.4)$$

Так как $Q(\beta)$ — непрерывная функция, то существует точка в интервале $[1-0{,}001\varepsilon_1,\ 1+0{,}001\varepsilon_1]$, где $Q(\beta)=0$. Полагая в неравенстве (13.3) $\beta=\beta_0$, мы придем к абсурдному для больших k равенству:

$$0 = 1 + Bk^{-1},$$

которое и доказывает II основную лемму.

14. Теперь можно доказать теорему Зигеля. Возьмем $\varepsilon_1 \in (0; 0{,}01)$ Если существует достаточно большое k, для которого

$$h(-k) < k^{\frac{1}{2} - \varepsilon_1},$$

то характер $\chi_k(n)$, по II основной лемме, обладает свойством $\mathfrak{A}(1-0{,}08\varepsilon_1)$. Но тогда, по I основной лемме, имеем для достаточно больших D

$$h(-D) > D^{\frac{1}{2} - \eta(\beta)},$$

где

$$\eta(\beta) = 10{,}5 \cdot 0{,}08\varepsilon_1 + \eta_0 = 0{,}84\varepsilon_1 + \eta_0 < 0{,}85\varepsilon_1,$$

ибо η_0 может быть выбрано сколь угодно малым.

Итак, указанных k лишь конечное число, что требовалось доказать.

Поступило
2. I. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Sur la distribution des résidus et des non-résidus de puissances, Пермь, Ж. физ. исп. об-ва, 1 (1918), 18—28 и 94—98.

[2] Линник Ю. В., Свойство аналогии L-рядов и теорема Зигеля, Доклады Ак. Наук СССР, XXXVIII, № 4 (1943), 115—117.

[3] Гельфонд А. О. и Линник Ю. В., О методе Туэ и проблеме эффективизации в квадратичных полях, Доклады Ак. Наук СССР, 61, № 5 (1948), 773—776.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Короткое аналитическое доказательство теоремы Зигеля

Здесь мы также ограничимся случаем отрицательного дискриминанта $-k<0$ во избежание тривиальных осложнений. Мы будем доказывать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln h(-k)}{\ln k} = \frac{1}{2}$$

прямым продолжением метода Гейльброна. *

* Не используя ни реальности нулей, ни положительности коэффициентов некоторых функций.

1. Пусть $h(-k) < k^{\frac{1}{2}-\eta_0}$, $\eta_0 > 0$ фиксировано, $\eta_0 < \frac{1}{2}$, $\chi_k(n)$ — соответствующий реальный характер. Тогда

$$L(s, \chi_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_k(n) n^{-s}$$

имеет хоть один нуль в прямоугольнике $|t| \leqslant \ln^2 k$, $\sigma > 1 - 0{,}001\,\eta_0$ при достаточно большом k. Будь это не так, мы имели бы:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L k^s \Gamma(s)\left\{-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{L'(s, \chi_k)}{L(s, \chi_k)}\right\} ds = \sum_{n=1}^{\infty}(1 + \chi_k(n))\Lambda(n) e^{-\frac{n}{k}},$$

где L — контур: $\sigma = 1 - \frac{\eta_0}{2000}$; $|t| \leqslant \frac{\ln^2 k}{2}$; $1 - \frac{\eta_0}{2000} < \sigma < 2$;

$$|t| = \frac{\ln^2 k}{2};\quad \sigma = 2;\ |t| \geqslant \frac{\ln^2 k}{2},$$

что равнялось бы $k + O\left(k^{1-\frac{\eta_0}{2000}} \ln k\right)$. Так как количество чисел, изобразимых приведенной квадратичной формой $Q(x, y)$ дискриминанта $-k$, не превосходящих $k \ln k$, как легко подсчитать, будет $\ll \frac{k \ln k}{\sqrt{k}}$ и так как при $\chi_k(p) = +1$ простое число p изображается формой $Q(x, y)$ дискриминанта $-k$, то из нашего результата следовало бы, что

$$h(-k) > c_1 \frac{\sqrt{k}}{\ln k},$$

что противоречит гипотезе.

2. Покажем, исходя из той же гипотезы $h(-k) < k^{\frac{1}{2}-\eta_0}$, что если $-D$ — фундаментальный дискриминант, где D — достаточно большое сравнительно с k, то

$$h(-D) > D^{\frac{1}{2}-0{,}9\eta_0}. \tag{2.1}$$

Тогда получится, что всякое неравенство $h(-k) < k^{\frac{1}{2}-\eta_0}$ может выполняться лишь конечное число раз, что и докажет теорему.

Пусть для некоторого D (насколько большого — увидим в дальнейшем) выполняется

$$h(-D) < D^{\frac{1}{2}-0{,}9\eta_0}$$

и пусть $\chi_D(n)$ — соответствующий реальный характер. Тогда имеем:

$$2L(s, \chi_k) L(s, \chi_k\chi_D) = \sum_Q \sum_{Q>0} \chi_k(Q)(Q(x, y))^{-s}, \tag{2.2}$$

где Q пробегает $h(-D)$ приведенных форм дискриминанта $-D$. Мы имеем при $n \geqslant D^2$

$$\sum_{Q \leqslant n} \chi_k(Q) Q(x, y) \ll k\sqrt{n},$$

так что (2.2) сходится в $\sigma \geqslant \frac{3}{4}$. Рассматриваем область $|t| \leqslant \ln^3 k$, $\sigma \geqslant 1-0{,}01\,\eta_0$. В этой области

$$2L(s, \chi_k)\cdot L(s, \chi_k\chi_D) = \sum_Q \sum_{Q\leqslant D^3} \chi_k(Q)(Q(x, y))^{-s} + Bk^2D^{-\frac{1}{2}}. \qquad (2.3)$$

На основании предыдущего неравенства, B — ограниченное число, не всегда одно и то же.

Проведем над правой частью (2.3) операцию решета Эратосфена, в результате которой выяснится, что в нашей области при достаточно больших D (2.3) будет по модулю $> e^{-(\ln D)^{0,8}}$, так что в этой области $L(s, \chi_k) \neq 0$, что и приводит к очевидному противоречию.

3. ЛЕММА 1.

$$\sum_Q \sum_{Q\leqslant x} \chi_k(Q)(Q(x, y))^{-s} \ll x^{0,02\eta_0}. \qquad (3.1)$$

Доказательство. Правая часть мажорируется $\sum_{n\leqslant x} 2^{\nu(n)} n^{-1+0,01\,\eta_0}$. Положим $D_1 = D^3$ и обозначим сумму из (3.1) при $x = D_1$ через $S(s)$. Положим, далее, $A = \frac{4}{\eta_0}$, $(\ln D)^A = \Delta$ и обозначим через $\mathfrak{A}_0$ множество чисел, делящих D, через $\mathfrak{A}_1$ — множество чисел, для которых $\chi_D(p) = +1$, через $\mathfrak{A}_{-1}$ — множество чисел, для которых $\chi_D(p) = -1$. Положим

$$\prod\nolimits_1(s) = \prod_{p\leqslant\Delta} (1-\chi_k(p)\,p^{-s})(1-\chi_k(p)\,\chi_D(p)\,p^{-s}) \qquad (3.2)$$

и через $\overline{\prod}_1(s)$ обозначим то же произведение, где $\chi_k(p)$ и $\chi_k(p)\chi_D(p)$ заменены на -1.

ЛЕММА 2. *Пусть $N \geqslant D$ — какое-либо число, а $\sum_N$ есть сумма модулей тех членов развернутого произведения* (3.2), *для которых соответствующие произведения простых чисел лежат между N и $2N$; тогда будем иметь оценку*:

$$\sum\nolimits_N \ll N^{-0,15\eta_0}. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Пусть это не так для какого-либо N. Тогда в точке $s_0 = 1 - 0{,}2\,\eta_0$ сумма модулей таких же членов была бы $\gg N^{0,05\eta_0}$ и мы, очевидно, имели бы

$$\ln \overline{\prod}_1(s_0) \gg 0{,}05\,\eta_0 \ln N.$$

Но, с другой стороны,

$$\ln \overline{\prod}_1(s_0) \ll \sum_{n\leqslant\Delta} \frac{1}{n^{s_0}} \ll \Delta^{1-s_0} = (\ln D)^{A\cdot 0,02\eta_0} = (\ln D)^{0,8} \leqslant (\ln N)^{0,8}.$$

Это противоречие доказывает утверждение.

ЛЕММА 3. *Для любого $N\in[\Delta, D^3]$ число простых $p\in\mathfrak{A}_1$, лежащих между N и $2N$, будет*

$$N_1 \leqslant N^{1-0,15\eta_0}. \qquad (3.4)$$

Доказательство. Пусть это не так для данного N. Найдем целое число r, для которого $(2N)^r = D^\gamma$, $2 \leqslant \gamma \leqslant 3$ и будем рассматривать $C_{N_1}^r$ всевозможных различных произведений из наших простых чисел.

Имеем

$$C_{N_1}^r > \frac{N_1^r 2^{-r}}{r!} > N_1^r e^{-r(1+\ln r)}, \qquad r = \frac{3 \ln D}{\ln \Delta} = \frac{3 \ln}{4 \ln \ln D} \eta_0, \quad \ln r \sim \ln \ln D.$$

Отсюда при большом D имеем

$$C_{N_1}^r > N_1^r D^{-0,76\eta_0}.$$

Если $N_1 > N^{1-0,015\eta_0}$, то

$$C_{N_1}^r > D^\gamma \cdot D^{-0,81\eta_0}.$$

Построенные произведения лежат между D^γ и $D^\gamma \cdot 2^{-r}$, $r \leqslant \frac{3}{4} \eta \frac{\ln D}{\ln \ln D}$. Все эти произведения изображаются квадратичными формами $Q(x, y)$; каждое не более 2^r раз. Отсюда немедленно следует, что $h(-D) > D^{\frac{1}{2} - 0,82\eta_0}$ при большом D, что противоречит (2.1).

4. Отсеем из $S(s)$ числа $Q(x, y)$, делящиеся на $p \leqslant \Delta$, и обозначим оставшуюся сумму через $S_1(s)$.

Лемма 1 и лемма 2 дают возможность заключить после тривиального подсчета *:

$$S_1(s) = S(s) \left(\prod\nolimits_1 (s)\right)^{-1} + B \cdot D^{-0,05\eta_0}. \tag{4.1}$$

Далее, $S_1(s) - 1$ состоит из таких членов, где $Q(x,y) \geqslant \Delta$. Сумма модулей членов $S_1(s) - 1$ при $s = \sigma + it$ в нашей области мажорируется произведением

$$\overline{\prod}_2 (\sigma) = \prod_{\substack{p \in \mathfrak{A}_1 \\ D^s \geqslant p > \Delta}} (1 - p^{-\sigma})^{-2} \prod_{\substack{p \in \mathfrak{A}_{-1} \\ D^s \geqslant p > \Delta}} (1 - p^{-2\sigma}).$$

На основании леммы 3, имеем

$$\ln \overline{\prod}_2 (\sigma) \ll \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta^\sigma} \frac{1}{2^{j\sigma}} (\Delta \cdot 2^j)^{1-0,015\eta_0}.$$

Ввиду $\sigma \geqslant 1 - 0,01\,\eta_0$, отсюда следует, что

$$\ln \overline{\prod}_2 (\sigma) \ll \Delta^{-0,005\eta_0} \ll (\ln D)^{-0,02}.$$

Отсюда и из (4.1) получаем

$$S(s) \left(\prod\nolimits_1 (s)\right)^{-1} = 1 + B (\ln D)^{-0,02}.$$

Но из доказательства леммы 2 следует, что

$$\ln \left|\prod\nolimits_1 (s)\right| < \ln \overline{\prod}_1 (s_0) \ll (\ln D)^{0,8},$$

откуда

$$|S(s)| \gg e^{-(\ln D)^{0,8}},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что применение квадратичных форм в этом доказательстве не очень существенно.

---

* См. п. 9 и п. 10 предыдущей статьи.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 343—354

М. И. ГРАЕВ

О СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе дается построение свободных произведений топологических групп и выясняется алгебраическая структура получаемых при этом групп.

Основной целью настоящей статьи является конструкция свободного произведения топологических групп.

Руководствуясь аналогией с теорией абстрактных групп ([1]), мы будем называть топологическую группу G *свободным произведением топологических групп* $A_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$, если она обладает следующими свойствами:

S_1. G содержит группы $A_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$ в качестве своих подгрупп.

S_2. Минимальная замкнутая подгруппа группы G, содержащая в себе подгруппы $A_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$, совпадает с группой G.

S_3. Каковы бы ни были топологическая группа H и непрерывные гомоморфизмы φ_α групп A_α в H $(\alpha \in \mathfrak{M})$, найдется непрерывный гомоморфизм Φ группы G в группу H, совпадающий на каждой подгруппе A_α с гомоморфизмом $\varphi_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$.

Как и в теории абстрактных групп, нас будет интересовать здесь прежде всего вопрос о существовании и единственности группы G с перечисленными свойствами. Однако основная проблема, которую мы будем решать в настоящей статье, состоит в выяснении алгебраической структуры группы G. Мы покажем, что группа G, как абстрактная группа, является свободным произведением в алгебраическом смысле групп $A_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$. Тем самым для заданного множества топологических групп $A_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$ будет установлено существование топологической группы G, содержащей эти группы в качестве своих подгрупп таким образом, что между элементами различных подгрупп A_α отсутствуют какие бы то ни было алгебраические соотношения, отличные от тривиальных.

Группа G, обладающая свойствами S_1, S_2 и S_3, может быть построена как подгруппа топологического прямого произведения групп, каждая из которых порождается непрерывными гомоморфными образами групп $A_\alpha\,(\alpha \in \mathfrak{M})$.

Этот весьма простой метод доказательства существования свободного произведения топологических групп аналогичен тому методу, каким С. Какутани доказал существование свободной топологической группы вполне регулярного пространства [см. ([5]), теорема 1]. Мы не будем, однако, воспроизводить деталей доказательства, поскольку указанный путь построения группы G не позволяет нам выяснить ее алгебраическую структуру.

Мы воспользуемся другим методом построения группы G, позволяющим выяснить алгебраическую структуру группы G, доказав попутно существование этой группы.

ТЕОРЕМА 1. *Группа G со свойствами S_1, S_2 и S_3 существует. Эта группа, рассматриваемая без топологии, является свободным произведением в алгебраическом смысле абстрактных групп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$.*

Доказательство теоремы. —1°. Рассматривая группы A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ как абстрактные группы, образуем их свободное произведение в алгебраическом смысле:

$$G = \prod_{\alpha \in \mathfrak{M}}^{*} A_\alpha.$$

Рассмотрим всевозможные топологизации группы G, индуцирующие на подгруппах A_α первоначально заданную топологию. Если множество таких топологизаций не пусто, то в нем найдется максимальная топологизация T, т. е. такая топологизация группы G, что подмножество из G, открытое хотя бы при одной из указанных топологизаций группы G, будет открыто и при топологизации T [см. ([4]), § 1]. Легко проверить, что группа G с топологизацией T удовлетворяет условиям S_1, S_2 и S_3.

В самом деле, пусть H — произвольная топологическая группа и φ_α — непрерывный гомоморфизм группы A_α в группу H $(\alpha \in \mathfrak{M})$. В силу известных свойств свободного произведения абстрактных групп, существует гомоморфизм Φ группы G в группу H, совпадающий на каждой подгруппе A_α с гомоморфизмом φ_α. Пусть $H' \subseteq H$ — образ группы G при гомоморфизме Φ. Рассмотрим совокупность $\{V\}$ множеств, являющихся полными прообразами в группе G окрестностей единицы группы H'. Система $\{V\}$ удовлетворяет, как легко видеть, всем аксиомам окрестностей единицы топологической группы ([2]), кроме, быть может, аксиомы отделимости. Если теперь $\{U\}$ — система окрестностей единицы группы G в топологии T, то система множеств $\{U \cap V\}$ удовлетворяет всем аксиомам окрестностей единицы. Для определяемой этой системой множеств топологии T' на группе G имеем $T' \geqslant T$. Но, так как топология T' индуцирует на подгруппах A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ первоначальную топологию, то $T' \leqslant T$, а потому $T = T'$. Таким образом, множества $U \cap V$ открыты в топологии T, откуда непосредственно вытекает непрерывность гомоморфизма Φ. Этим доказано свойство S_3 группы G с топологией T.

Справедливость для группы G свойств S_1 и S_2 очевидна.

Итак, *для доказательства теоремы* 1 *нам достаточно показать, что в группе G можно ввести по крайней мере одну топологизацию, индуцирующую на подгруппах A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ первоначально заданную топологию.*

К построению такой топологизации на группе G мы сейчас и перейдем.

2°. Рассмотрим сперва случай двух сомножителей. Пусть A и B — топологические группы. Образуем свободное произведение этих групп в алгебраическом смысле:

$$C = A * B.$$

Пусть K — взаимный коммутант подгрупп A и B в группе C, т. е. подгруппа в C, порожденная коммутаторами вида

$$(a, b) = a^{-1}b^{-1}ab,$$

где $a \in A$ и $b \in B$. Подгруппа K является нормальным делителем в группе C.

Пусть, далее, N_A и N_B — непрерывные нормы ([3]) соответственно на группах A и B.

На множестве коммутаторов (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, введем «метрику» R_{N_A, N_B} по следующей формуле:

$$R_{N_A,N_B}[(a', b'), (a'', b'')] = \min\{\min(N_A(a'), N_B(b')) + \\ + \min(N_A(a''), N_B(b'')); \; N_A(a'a''^{-1}) + N_B(b'b''^{-1})\}. \tag{1}$$

В случае, когда $(a'', b'') = e$, т. е. один из элементов a'' и b'' есть e, а другой элемент произволен, формула (1) не теряет смысла, ибо тогда мы имеем

$$R_{N_A,N_B}[(a', b'), e] = \min(N_A(a'), N_B(b')). \tag{1'}$$

Определенная формулой (1) *неотрицательная функция* R_{N_A,N_B} *удовлетворяет следующим условиям:*

a) $R_{N_A,N_B}[(a, b), (a, b)] = 0$ (*ослабленная аксиома тождества*);

b) $R_{N_A,N_B}[(a', b'), (a'', b'')] = R_{N_A,N_B}[(a'', b''), (a', b')]$ (*аксиома симметрии*);

c) *если* $k_1 = (a_1, b_1)$, $k_2 = (a_2, b_2)$, $k_3 = (a_3, b_3)$, *то* $R_{N_A,N_B}(k_1, k_3) \leqslant \leqslant R_{N_A,N_B}(k_1, k_2) + R_{N_A,N_B}(k_2, k_3)$ (*аксиома треугольника*).

Справедливость двух первых условий очевидна. Для проверки справедливости условия c) мы должны рассмотреть все могущие представиться здесь случаи. Для краткости будем в дальнейшем вместо R_{N_A,N_B} писать R, а вместо N_A и N_B — просто N.

Случай 1. $R(k_1, k_2) = N(a_1a_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1})$.

Подслучай 1.1. $R(k_2, k_3) = N(a_2a_3^{-1}) + N(b_2b_3^{-1})$.

В силу известных свойств норм, имеем

$$R(k_1, k_2) + R(k_2, k_3) \geqslant N(a_1a_3^{-1}) + N(b_1b_3^{-1}),$$

а потому

$$R(k_1, k_2) + R(k_2, k_3) \geqslant R(k_1, k_3).$$

Подслучай 1.2. $R(k_2, k_3) = N(x_2) + N(x_3)$, где x_2 — один из элементов a_2 и b_2, а x_3 — один из элементов a_3 и b_3.

Имеем

$$N(a_1a_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1}) + N(x_2) \geqslant N(x_1),$$

где $x_1 = a_1$, если $x_2 = a_2$, и $x_1 = b_1$, если $x_2 = b_2$. Поэтому

$$R(k_1, k_2) + R(k_2, k_3) \geqslant N(x_1) + N(x_3) \geqslant R(k_1, k_3).$$

Случай 2. $R(k_1, k_2) = N(x_1) + N(x_2)$, где x_1 — один из элементов a_1 и b_1, а x_2 — один из элементов a_2 и b_2.

Подслучай 2.1. $R(k_2, k_3) = N(a_2a_3^{-1}) + N(b_2b_3^{-1}) = N(a_3a_2^{-1}) + N(b_3b_2^{-1})$.

Этот подслучай аналогичен подслучаю 1.2.

Подслучай 2.2. $R(k_2, k_3) = N(y_2) + N(y_3)$, где y_2 — один из элементов a_2 и b_2, а y_3 — один из элементов a_3 и b_3.

Имеем

$$R(k_1, k_2) + R(k_2, k_3) \geqslant N(x_1) + N(y_3) \geqslant R(k_1, k_3).$$

Справедливость аксиомы треугольника установлена.

Заметим, что в группе K множество X' элементов $(a, b) \neq e$ образует свободный базис.

В статье автора (4) было показано, как метрику ρ, заданную на множестве X, состоящем из единичного элемента и элементов свободного базиса X' свободной группы, можно продолжить до инвариантной относительно взятия обратного элемента и относительно умножений слева и справа метрики на всей свободной группе. Согласно приведенному там описанию, если x_1 и x_2 — элементы из X, то мы полагаем

$$\rho(x_1^{-1}, x_2^{-1}) = \rho(x_1, x_2) \text{ и } \rho(x_1, x_2^{-1}) = \rho(x_1^{-1}, x_2) = \rho(x_1, e) + \rho(x_2, e).$$

Если же x_1 и x_2 — произвольные элементы свободной группы, то мы должны рассмотреть всевозможные записи элементов x_1, x_2 в виде слов одинаковой длины,

$$x_1 = u_1u_2 \cdots u_s \text{ и } x_2 = v_1v_2 \cdots v_s,$$

где u_i и v_i — элементы из множества $X \cup X^{-1}$. Тогда $\rho(x_1, x_2)$ определяется как нижняя грань сумм $\sum_{i=1}^{s} \rho(u_i, v_i)$ при всевозможных записях элементов x_1 и x_2 в виде слов одинаковой длины. Было показано, что всегда найдутся такие две записи элементов x_1 и x_2, для которых упомянутая сумма в точности совпадает с $\rho(x_1, x_2)$.

При этом построении аксиома тождества ($\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, если $x = y$) на множестве X использовалась лишь при доказательстве справедливости этой аксиомы на всей группе.

Таким образом, пользуясь указанным построением, мы можем определить на всей группе K «метрику» R, удовлетворяющую ослабленной аксиоме тождества и аксиомам симметрии и треугольника, инвариантную относительно операции взятия обратного элемента и операций умножения слева и справа на элемент группы K и совпадающую с функцией R_{N_A, N_B} на множестве $X = X' \cup \{e\}$.

Покажем, что *при транспонировании элементов из K при помощи элемента из A или из B расстояние R между любыми двумя элементами группы K не может увеличиться более, чем в два раза.*

Заметим, что если a и x — элементы из группы A, а b и y — элементы из группы B, то имеют место тождества

$$x^{-1}(a, b)\,x = (ax, b) \cdot (x, b)^{-1}, \tag{2}$$

$$y^{-1}(a, b)\,y = (a, y)^{-1} \cdot (a, by). \tag{3}$$

Пусть z_1 и z_2 — произвольные элементы из группы K и пусть Z_1 и Z_2 — две записи этих элементов в виде слов одинаковой длины, реализующие $R(z_1, z_2)$ и выписанные одна под другой. Предположим, что при этом под элементом $k_1^{\varepsilon_1} = (a_1, b_1)^{\varepsilon_1}$ из Z_1 стоит элемент $k_2^{\varepsilon_2} = (a_2, b_2)^{\varepsilon_2}$ из Z_2 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$). Транспонируя записи Z_1 и Z_2 при помощи элемента x, мы получаем, согласно формуле (2), записи Z_1' и Z_2' элементов $x^{-1}z_1x$ и $x^{-1}z_2x$ удвоенной длины. При этом элемент $(a_1, b_1)^{\varepsilon_1}$ из записи Z_1 преобразуется в элемент

$$l_1^{\varepsilon_1} = [(a_1x, b_1)\cdot(x, b_1)^{-1}]^{\varepsilon_1},$$

а элемент $(a_2, b_2)^{\varepsilon_2}$ из записи Z_2 — в элемент

$$l_2^{\varepsilon_2} = [(a_2x, b_2)\cdot(x, b_2)^{-1}]^{\varepsilon_2}.$$

Для доказательства того, что

$$R(x^{-1}z_1x, x^{-1}z_2x) \leqslant 2R(z_1, z_2),$$

нам, в силу определения функции R, достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$R(l_1^{\varepsilon_1}, l_2^{\varepsilon_2}) \leqslant 2R(k_1^{\varepsilon_1}, k_2^{\varepsilon_2}).$$

В силу определения метрики R, имеем

$$R(l_1, l_2) \leqslant R[(a_1x, b_1), (a_2x, b_2)] + R[(x, b_1), (x, b_2)] \leqslant$$
$$\leqslant N(a_1a_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1}) \leqslant 2[N(a_1a_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1})].$$

С другой стороны,

$$R(l_1, l_2) \leqslant R[(a_1x, b_1), (a_2x, b_2)] + R[(x, b_1), (x, b_2)] \leqslant$$
$$\leqslant [N(b_1) + N(b_2)] + [N(b_1) + N(b_2)] = 2[N(b_1) + N(b_2)].$$

Воспользовавшись, далее, записями элементов l_1 и l_2 в виде

$$l_1 = (a_1x, b_1)\cdot(x, b_1)^{-1}\cdot(x, b_2)\cdot(x, b_2)^{-1},$$
$$l_2 = (x, b_1)\cdot(x, b_1)^{-1}\cdot(a_2x, b_2)\cdot(x, b_2)^{-1},$$

получим

$$R(l_1, l_2) \leqslant R[(a_1x, b_1), (x, b_1)] + R[(x, b_2), (a_2x, b_2)] \leqslant N(a_1) + N(a_2).$$

Наконец, записав элементы l_1 и l_2 в виде

$$l_1 = (a_1x, b_1)\cdot(x, b_1)^{-1}\cdot \quad e \quad \cdot \quad e,$$
$$l_2 = (x, b_1)\cdot(x, b_1)^{-1}\cdot(a_2x, b_2)\cdot(x, b_2)^{-1},$$

находим:

$$R(l_1, l_2) \leqslant R[(a_1x, b_1), (x, b_1)] + R[(a_2x, b_2), e] + R[(x, b_2), e] \leqslant$$
$$\leqslant N(a_1) + N(b_2) + N(b_2) \leqslant 2[N(a_1) + N(b_2)]$$

и, аналогично,

$$R(l_1, l_2) \leqslant 2[N(a_2) + N(b_1)].$$

На основании формулы (1), мы непосредственно убеждаемся, что

$$R(l_1, l_2) \leqslant 2R(k_1, k_2).$$

Отсюда мы получаем также:

$$R(l_1^{-1}, l_2^{-1}) = R(l_1, l_2) \leqslant 2R(k_1, k_2) = 2R(k_1^{-1}, k_2^{-1})$$

и

$$R(l_1^{-1}, l_2) = R(l_1, l_2^{-1}) \leqslant R(l_1, e) + R(l_2, e) \leqslant 2R(k_1, e) + 2R(k_2, e) =$$
$$= 2R(k_1^{-1}, k_2) = 2R(k_1, k_2^{-1}).$$

Итак, вообще,

$$R(l_1^{\varepsilon_1}, l_2^{\varepsilon_2}) \leqslant 2R(k_1^{\varepsilon_1}, k_2^{\varepsilon_2})$$

при любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$, что и требовалось доказать.

Аналогичные рассуждения имеют место и при транспонировании элементов из K при помощи элемента y из B.

Подобно рассмотренному случаю, нам нужно лишь установить, что

$$R(l_1', l_2') \leqslant 2R(k_1, k_2),$$

где $l_1' = y^{-1}k_1y = (a_1, y)^{-1}\cdot(a_1, b_1y)$ и $l_2' = (a_2, y)^{-1}\cdot(a_2, b_2y)$.

Легко видеть, что

$$R(l_1', l_2') \leqslant N(a_1a_2^{-1}) + N(a_1a_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1}) \leqslant 2[N(a_1a_2^{-1}) + N(b_1b_2^{-1})]$$

и

$$R(l_1', l_2') \leqslant [N(a_1) + N(a_2)] + [N(a_1) + N(a_2)] = 2[N(a_1) + N(a_2)].$$

С другой стороны, воспользовавшись записями

$$l_1' = (a_1, y)^{-1}\cdot(a_1, b_1y)\cdot(a_2, y)^{-1}\cdot(a_2, y),$$

$$l_2' = (a_1, y)^{-1}\cdot(a_1, y)\cdot(a_2, y)^{-1}\cdot(a_2, b_2y),$$

получим

$$R(l_1', l_2') \leqslant N(b_1) + N(b_2).$$

Наконец, записав элементы l_1' и l_2' в виде

$$l_1' = (a_1, y)^{-1}\cdot(a_1, b_1y)\cdot \quad e \quad \cdot \quad e,$$

$$l_2' = (a_1, y)^{-1}\cdot(a_1, y)\cdot(a_2, y)^{-1}\cdot(a_2, b_2y),$$

находим

$$R(l_1', l_2') \leqslant N(b_1) + N(a_2) + N(a_2) \leqslant 2[N(b_1) + N(a_2)]$$

и, аналогично,

$$R(l_1', l_2') \leqslant 2[N(b_2) + N(a_1)].$$

На основании формулы (1), мы непосредственно убеждаемся, что и в рассматриваемом случае

$$R(l_1', l_2') \leqslant 2R(k_1, k_2).$$

Из доказанного утверждения вытекает, что *при транспонировании элементов из K при помощи элемента из C длины s относительно элементов из A и из B расстояние R между элементами не может увеличиться более, чем в 2^s раз* $(s = 1, 2, \ldots)$.

Дадим теперь построение топологии на группе C, индуцирующей на подгруппах A и B заданную топологию.

Для каждой пары непрерывных норм N_A и N_B соответственно на подгруппах A и B определим описанным выше способом метрику R_{N_A,N_B} на подгруппе K.

Обозначим через U_{N_A,N_B} множество всех элементов abk группы C, где $a \in A$, $b \in B$, $k \in K$, для которых $N_A(a) < 1$, $N_B(b) < 1$ и $R_{N_A,N_B}(k, e) < 1$. Очевидно, что $e \in U_{N_A,N_B}$.

Покажем, что *система* Σ *множеств* U_{N_A,N_B}, *где* N_A *и* N_B *пробегают все непрерывные нормы соответственно на подгруппах* A *и* B, *удовлетворяет всем пяти аксиомам окрестностей единицы Понтрягина и, следовательно, определяет некоторую топологизацию* T *группы* C.

1. Пусть $c = abk \neq e$ — произвольный элемент группы C. Если $a \neq e$ $(b \neq e)$, то найдется ([3]) непрерывная норма N_A (N_B) такая, что $N_A(a) > 1$ $(N_B(b) > 1)$ и, следовательно, найдется множество U_{N_A,N_B}, не содержащее элемента e.

Если же $c = k \in K$, то пусть в несократимую запись элемента k относительно множества X' коммутаторов (a, b) входят коммутаторы (a_1, b_1), $(a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$. Всегда найдутся такие непрерывные нормы N'_A и N'_B соответственно на группах A и B, что $N'_A(a_i a_j^{-1}) > 1$ при $a_i \neq a_j$, $N'_B(b_i b_j^{-1}) > 1$ при $b_i \neq b_j$, $N'_A(a_i) > 1$, $N'_B(b_i) > 1$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

На основании формулы (1), имеем тогда:

$$R_{N'_A,N'_B}[(a_i, b_i), e] > 1 \quad \text{и} \quad R_{N'_A,N'_B}[(a_i, b_i), (a_j, b_j)] > 1$$

$$(i, j = 1, \ldots, n; \; i \neq j).$$

Но тогда $R_{N'_A, N'_B}(k, e) > 1$ [см. ([4]), стр. 286, свойство 3], а потому $k \overline{\in} U_{N'_A, N'_B}$. Справедливость аксиомы отделимости доказана.

2. Если $U_{N'_A, N'_B}$ и $U_{N''_A, N''_B}$ — произвольные множества из Σ, то положив $N_A = N'_A + N''_A$ и $N_B = N'_B + N''_B$, имеем, очевидно,

$$U_{N_A, N_B} \subseteq U_{N'_A, N'_B} \cap U_{N''_A, N''_B}.$$

3. Заметим, что

$$(a_1 b_1 k_1)(a_2 b_2 k_2)^{-1} = a_1 b_1 k_1 k_2^{-1} b_2^{-1} a_2^{-1} = (a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1}) \cdot a_2 b_2 (k_1 k_2^{-1})(a_2 b_2)^{-1} =$$

$$= a_1 a_2^{-1} b_1 b_2^{-1} \cdot [(b_1 b_2^{-1})^{-1} a_2 (b_1 b_2^{-1}) a_2^{-1}] \cdot a_2 b_2 (k_1 k_2^{-1})(a_2 b_2)^{-1},$$

откуда

$$(a_1 b_1 k_1)(a_2 b_2 k_2)^{-1} = a_1 a_2^{-1} b_1 b_2^{-1} k_3 k_4, \tag{4}$$

где $k_3 = (a_2^{-1}, b_1 b_2^{-1})^{-1}$ и $k_4 = a_2 b_2 (k_1 k_2^{-1})(a_2 b_2)^{-1}$ — элементы из подгруппы K.

Пусть U_{N_A, N_B} — произвольное множество из Σ. Положим $N'_A = 9N_A$ и $N'_B = 9N_B$ и покажем, что

$$U_{N'_A, N'_B} \cdot U^{-1}_{N'_A, N'_B} \subseteq U_{N_A, N_B}.$$

В самом деле, если $a_1 b_1 k_1$ и $a_2 b_2 k_2$ — элементы из $U_{N'_A, N'_B}$, то имеем

$$N_A(a_1 a_2^{-1}) \leqslant N_A(a_1) + N_A(a_2) = \frac{1}{9}(N'_A(a_1) + N'_A(a_2)) < \frac{2}{9} < 1$$

и, аналогично,

$$N_B(b_1 b_2^{-1}) < \frac{2}{9} < 1.$$

Далее,

$$R_{N_A, N_B}(k_3, e) \leqslant N_A(a_2) = \frac{1}{9} N'_A(a_2) < \frac{1}{9}.$$

Наконец,

$$R_{N_A, N_B}(k_1 k_2^{-1}, e) = \frac{1}{9} R_{N'_A, N'_B}(k_1 k_2^{-1}, e) \leqslant \frac{1}{9} [R_{N'_A, N'_B}(k_1, e) +$$

$$+ R_{N'_A, N'_B}(k_2, e)] < \frac{2}{9}.$$

Но тогда, в силу ранее доказанного,

$$R_{N_A, N_B}(k_4, e) < 2^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9},$$

а потому

$$R_{N_A, N_B}(k_3 k_4, e) \leqslant R_{N_A, N_B}(k_3, e) + R_{N_A, N_B}(k_4, e) < \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1.$$

Наше утверждение вытекает теперь непосредственно из формулы (4).

4. Заметим, что

$$a_1 b_1 k_1 \cdot abk = a_1 b_1 \cdot ab \cdot [(ab)^{-1} k_1 (ab)] \cdot k = a_1 a b_1 b \cdot (b_1 b)^{-1} a^{-1} b_1 ab \cdot$$

$$\cdot [(ab)^{-1} k_1 (ab)] k = a_1 a b_1 b [(b_1 b)^{-1} a^{-1} (b_1 b) a] \cdot [a^{-1} b^{-1} ab] \cdot [(ab)^{-1} k_1 (ab)] \cdot k,$$

откуда

$$a_1 b_1 k_1 \cdot abk = a_1 a b_1 b \cdot k_2^{-1} k_3 k_4 k, \tag{5}$$

где k, $k_2 = (a, b_1 b)$, $k_3 = (a, b)$ и $k_4 = (ab)^{-1} k_1 (ab)$ — элементы из K.

Пусть U_{N_A, N_B} — произвольное множество из Σ и пусть $c = abk \in U_{N_A, N_B}$. Тогда найдется такое число $\delta > 0$, что

$$N_A(a) < 1 - \delta, \quad N_B(b) < 1 - \delta \text{ и } R_{N_A, N_B}(k, e) < 1 - \delta.$$

Положим

$$N'_A = \frac{5}{\delta} N_A \text{ и } N'_B = \frac{5}{\delta} N_B$$

и покажем, что

$$U_{N'_A, N'_B} \cdot c \subseteq U_{N_A, N_B}.$$

В самом деле, если $a_1 b_1 k_1 \in U_{N'_A, N'_B}$, то

$$N_A(a_1 a) \leqslant N_A(a_1) + N_A(a) < \frac{\delta}{5} + 1 - \delta < 1$$

и, аналогично,

$$N_B(b_1 b) < 1.$$

Далее,

$$R_{N_A, N_B}(k_2^{-1} k_3, e) = R_{N_A, N_B}(k_3, k_2) \leqslant N_B(b_1) < \frac{\delta}{5}.$$

Наконец, в силу ранее доказанного,

$$R_{N_A, N_B}(k_4, e) \leqslant 4R_{N_A, N_B}(k_1, e) < \frac{4\delta}{5},$$

откуда

$$R_{N_A, N_B}(k_2^{-1} k_3 k_4 k, e) \leqslant R_{N_A, N_B}(k_2^{-1} k_3, e) + R_{N_A, N_B}(k_4, e) +$$

$$+ R_{N_A, N_B}(k, e) < \frac{\delta}{5} + \frac{4\delta}{5} + 1 - \delta = 1.$$

Наше утверждение вытекает теперь непосредственно из формулы (5).

5. Заметим, что если x — элемент из A, а y — элемент из B, то

$$x^{-1}(abk)\,x = (x^{-1}ax)\,b\,(b^{-1}x^{-1}bx)\,(x^{-1}kx) = (x^{-1}ax)\cdot bk_1k_2, \tag{6}$$

где $k_1 = (x, b)^{-1}$ и $k_2 = x^{-1}kx$ — элементы из K, и

$$y^{-1}(abk)\,y = a\,(a^{-1}y^{-1}ay)\,(y^{-1}by)\,(y^{-1}ky) =$$

$$= a\,(y^{-1}by)\,[(y^{-1}by)^{-1}(a^{-1}y^{-1}ay)\,(y^{-1}by)]\,(y^{-1}ky),$$

откуда

$$y^{-1}(abk)\,y = a\,(y^{-1}by)\,k_1'k_2', \tag{7}$$

где $k_1' = (y^{-1}by)^{-1}\cdot(a, y)\cdot(y^{-1}by)$ и $k_2' = y^{-1}ky$ — элементы из K.

Пусть U_{N_A, N_B} — произвольное множество из Σ. Положим $N_B' = 3N_B$ и определим непрерывную норму N_A' на группе A по формуле

$$N_A'(a) = 3N_A(a) + N_A(x^{-1}ax).$$

Покажем, что

$$x^{-1}U_{N_A', N_B'}\cdot x \subseteq U_{N_A, N_B}.$$

В самом деле, если $abk \in U_{N_A', N_B'}$, то

$$N_A(x^{-1}ax) \leqslant N_A'(a) < 1, \quad N_B(b) \leqslant N_B'(b) < 1,$$

$$R_{N_A, N_B}(k_1, e) \leqslant N_B(b) < \frac{1}{3}$$

и

$$R_{N_A, N_B}(k_2, e) \leqslant 2R_{N_A, N_B}(k, e) \leqslant \frac{2}{3} R_{N_A', N_B'}(k, e) < \frac{2}{3},$$

откуда

$$R_{N_A, N_B}(k_1k_2, e) < \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1,$$

а потому, в силу формулы (6),

$$x^{-1}(abk)\,x \in U_{N_A, N_B}.$$

Положив $N_A'' = 4N_A$ и определив непрерывную норму N_B'' на группе B по формуле

$$N_B''(b) = 4N_B(b) + N_B(y^{-}by),$$

мы покажем, что

$$y^{-1}U_{N_A'', N_B''}\,y \subseteq U_{N_A, N_B}.$$

В самом деле, если $abk \in U_{N''_A, N''_B}$, то

$$N_A(a) < 1, \quad N_B(y^{-1}by) \leqslant N''_B(b) < 1,$$

$$R_{N_A, N_B}(k'_1, e) \leqslant 2R_{N_A, N_B}[(a, y), e] \leqslant 2N_A(a) < \frac{2}{4}$$

и

$$R_{N_A, N_B}(k'_2, e) \leqslant 2R_{N_A, N_B}(k, e) \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4} R_{N''_A, N''_B}(k, e) < \frac{1}{2},$$

откуда

$$R_{N_A, N_B}(k'_1 k'_2, e) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

а потому, в силу формулы (7),

$$y^{-1}(abk)\, y \in U_{N_A, N_B}.$$

Справедливость пятой аксиомы окрестностей единицы для системы Σ вытекает теперь непосредственно из того факта, что любой элемент группы C является произведением конечного числа элементов из подгрупп A и B.

Итак, справедливость для системы множеств U_{N_A, N_B} аксиом окрестностей единицы нами доказана.

Топология T, определяемая на группе C системой множеств U_{N_A, N_B}, индуцирует на подгруппах A и B первоначально заданную топологию.

В самом деле, множество $A \cap U_{N_A, N_B}$ совпадает с множеством всех элементов a из A, для которых $N_A(a) < 1$. Как доказал А. А. Марков ([3]), последние множества образуют базис окрестностей единицы в топологической группе A, когда N_A пробегает все непрерывные нормы на A. Те же рассуждения справедливы и для группы B.

Тем самым теорема 1 доказана для случая двух групп.

3°. Теорему 1 можно доказать теперь по индукции для любого *конечного* числа групп. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — топологические группы. Образуем их свободное произведение в алгебраическом смысле:

$$C_n = A_1 * A_2 * \cdots * A_n = C_{n-1} * A_n,$$

где $C_{n-1} = A_1 * \cdots * A_{n-1}$. Предположим, что на группе C_{n-1} уже построена топология T, индуцирующая на подгруппах $A_1, \ldots, A_{n-1}$ заданную топологию. Методом, описанным в 2°, мы можем тогда построить топологию T' на группе C_n, индуцирующую на подгруппе A_n заданную топологию, а на подгруппе C_{n-1} — топологию T и, следовательно, индуцирующую заданную топологию также на подгруппах $A_1, \ldots, A_{n-1}$.

4°. Пусть A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ — *бесконечное* множество топологических групп. Образуем их свободное произведение в алгебраическом смысле:

$$G = \prod_{\alpha \in \mathfrak{M}}{}^{*} A_\alpha.$$

Обозначим через $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$ окрестность единицы в свободном произведении конечного числа топологических групп $A_{\alpha_1} * A_{\alpha_2} * \cdots * A_{\alpha_s}$ $(\alpha_i \in \mathfrak{M}, i = 1, \ldots, s)$ и через $N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$ — нормальный делитель группы G, порожденный всеми подгруппами A_α, кроме подгрупп $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_s}$.

Рассмотрим в группе G совокупность Σ_1 всевозможных множеств вида

$$U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} \cdot N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}.$$

Эти множества удовлетворяют в группе G аксиомам окрестностей единицы.

Справедливость аксиомы отделимости вытекает из следующего свойства свободных произведений в алгебраическом смысле: если $C = A * B$ и N_B — нормальный делитель в C, порожденный подгруппой B, то $A \cap N_B = \{e\}$. Действительно, если $x \neq e$ — произвольный элемент из G, то для некоторых индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ будет $x \in A_{\alpha_1} * \cdots * A_{\alpha_s}$, и, если $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$ — окрестность, не содержащая элемента x, то, в силу указанного свойства, $x \overline{\in} U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} \cdot N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}$.

Заметим далее, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_t$ — конечная система индексов из $\mathfrak{M}$ и M — нормальный делитель в группе $G' = A_{\alpha_1} * \cdots * A_{\alpha_t}$, порожденный подгруппами $A_{\alpha_{s+1}}, \ldots, A_{\alpha_t}$, то всякое множество вида $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} \cdot M$, будучи полным прообразом множества, открытого в группе $G'' = A_{\alpha_1} * \cdots * A_{\alpha_s}$, при естественном непрерывном гомоморфизме группы G' на группу G'', открыто в группе G'. Таким образом, существует такая окрестность $U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_t}$ единицы в группе G', что

$$U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_t} \cdot N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_t} \subseteq U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} \cdot M \cdot N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_t} \subseteq U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} \cdot N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s}.$$

Из полученного соотношения с очевидностью вытекает справедливость аксиомы о пересечениях.

Справедливость для системы Σ_1 множеств остальных аксиом окрестностей единицы очевидна.

Легко видеть, наконец, что топология, определяемая на группе G системой Σ_1 окрестностей единицы, индуцирует на подгруппах A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ первоначальную топологию. Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Группа G со свойствами S_1, S_2 и S_3 единственна с точностью до топологических изоморфизмов, переводящих все элементы подгрупп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ в самих себя.*

Доказательство. Пусть G и G' — две группы со свойствами S_1, S_2 и S_3. В силу свойства S_3, существуют непрерывный гомоморфизм φ группы G в группу G' и непрерывный гомоморфизм ψ группы G' в группу G, переводящие все элементы подгрупп A_α в самих себя. Отображение $\psi\varphi$ будет тогда непрерывным эндоморфизмом группы G, оставляющим на месте элементы подгрупп A_α. В силу свойства S_2 группы G, это отображение есть тождественный автоморфизм группы G. Но тогда отображение φ будет непрерывным изоморфизмом группы G на группу G'. Теорема 2 доказана.

На основании определяющих свойств S_1, S_2 и S_3 свободного произведения топологических групп, мы легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 3. *Операция взятия свободного произведения топологических групп вполне ассоциативна: если группа G есть свободное произведение топологических групп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ и если каждая группа A_α есть свободное произведение топологических групп $A_{\alpha\beta}$ $(\beta \in \mathfrak{M}_\alpha)$, то группа*

G будет также свободным произведением топологических групп $A_{\alpha\beta}$ $(\beta \in \mathfrak{M}_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{M})$.

Обратно, если группа G есть свободное произведение топологических групп $A_{\alpha\beta}$ $(\beta \in \mathfrak{M}_\alpha,\ \alpha \in \mathfrak{M})$, то для любого $\alpha \in \mathfrak{M}$ подгруппа A_α группы G, порождаемая элементами подгрупп $A_{\alpha\beta}$ $(\beta \in \mathfrak{M}_\alpha)$, будет свободным произведением этих подгрупп, а группа G будет свободным произведением топологических групп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$.

ТЕОРЕМА 4. *Если группа G есть свободное произведение топологических групп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M})$ и если $\mathfrak{M}_1$ — произвольное подмножество множества $\mathfrak{M}$, то подгруппа A и нормальный делитель N группы G, порожденные элементами подгрупп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M}_1)$, замкнуты в группе G.*

Доказательство. Обозначим через B подгруппу группы G, порожденную элементами подгрупп A_α $(\alpha \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1)$. Тогда, в силу теоремы 3, группа G есть свободное произведение топологических групп A и B, $G = A * B$.

Замкнутость подгруппы N вытекает из того факта, что эта подгруппа является полным прообразом единицы при естественном непрерывном гомоморфизме группы G на группу B.

Пусть теперь g — произвольный элемент группы G, не принадлежащий подгруппе A. Этот элемент может быть однозначно представлен в виде произведения abk, где $a \in A$, $b \in B$ и $k \in K$ (K — взаимный коммутант подгрупп A и B в группе G), причем по крайней мере один из элементов b и k отличен от единицы. Если $b \neq e$, то элемент g содержится в открытом в группе G множестве $(B \setminus e) \cdot N$, которое не пересекается с подгруппой A. Если же $b = e$, но $k \neq e$, то, согласно построению, проведенному в разделе 2° доказательства теоремы 1, в группе G найдется такая окрестность единицы U, что если $a_1 b_1 k_1 \in U$, то $k_1 \neq k^{-1}$. Но тогда окрестность $a \cdot U \cdot k$ элемента ak содержит только такие элементы $a_2 b_2 k_2$ группы G, у которых $k_2 \neq e$, а потому эта окрестность не пересекается с подгруппой A. Тем самым доказано, что множество $G \setminus A$ открыто в группе G, и, следовательно, подгруппа A замкнута.

Заметим в заключение, что конструкция свободного произведения топологических групп, рассмотренная в этой статье, в отличие от теории абстрактных групп, не включает в себя конструкции свободной топологической группы.

Вопрос о существовании некоторой рациональной конструкции, включающей в себя как свободные топологические группы, так и свободные произведения топологических групп в нашем смысле, остается пока открытым.

Поступило
30. X. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Курош А. Г., Теория групп, М. — Л., 1944.

[2] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. — Л., 1938.

[3] Марков А. А., О свободных топологических группах, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 9 (1945), 3—64.

[4] Граев М. И., Свободные топологические группы, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 12 (1948), 279—324.

[5] Kakutani S., Free topological groups and infinite direct product of topological groups, Proc. Imp. Acad., Tokyo, 20 (1944), 595—598.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 355—366

Г. С. САЛЕХОВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ — КОВАЛЕВСКОЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ В ОБЛАСТИ СКОЛЬ УГОДНО ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **И. Г. Петровским**)

В работе изучаются необходимые и достаточные условия, определяющие структурные свойства начальных данных Коши в некоторой замкнутой области $g \ni (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, для того, чтобы уравнение (1.1) по (действительному или комплексному) переменному t допускало аналитическое решение в окрестности $t = 0$, а также устанавливается природа этого решения относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

§ 1. Пусть задано линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \varepsilon t^m Dz = 0, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, m — целое число $\geqslant 0$,

$$D = \sum_{(\lambda)} A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s} \frac{\partial^\lambda}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \cdots \partial x_s^{\lambda_s}},$$

причем $A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s}$ — некоторые постоянные коэффициенты.

В настоящей работе для уравнения (1.1) изучается решение задачи Коши—Ковалевской в следующей постановке:

1. Какие необходимые и достаточные условия надо наложить на структурные свойства начальных данных

$$\left.\frac{\partial^k z}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1, \ldots,), \; * \tag{1.2}$$

определенных в некоторой замкнутой области $g \ni (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, для того, чтобы уравнение (1.1) (по действительному или комплексному) переменному t допускало аналитическое решение в окрестности $t = 0$?

2. Если такое решение существует, то какова будет при этом его природа в области существования относительно переменных $x_1, x_2, \ldots x_s$?

По характеру поставленной задачи область G существования решения уравнения (1.1) определяется следующими условиями:

1) $|t| < R$, где R — некоторое постоянное $\neq 0$. **

---

* Ради сокращения записи положено $\varphi_k(x) = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, а также в дальнейшем принято: $z(t, x) = z(t, x_1, x_2, \ldots, x_s)$.

** Величина R в дальнейшем будет уточнена.

2) Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_s$ изменяются в некоторой замкнутой области g, примыкающей к общей области G по гиперплоскости $t=0$. Будем предполагать решение уравнения (1.1) в области G регулярным, т. е. допускающим необходимые непрерывные производные соответственно наивысшим порядкам, входящим в дифференциальный оператор D.

Задача Коши—Ковалевской в вышеуказанной постановке была мною ранее изучена (1) для уравнения более частного типа, когда $\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \varepsilon t^m \frac{\partial^q z}{\partial x^q} = 0$ в области $G(|t|<R, a\leqslant x\leqslant b)$. Было показано, что при $m=0$, $p=1$, $q=2$ и $m=0$, $p=2$, $q=1$ из этих исследований непосредственно получаются известные результаты С. Ковалевской, (2), Ле Ру (3) и Хольмгрена (4), доказанные ими для уравнения теплопроводности. Все эти исследования в настоящей работе обобщаются на более широкий класс уравнений типа (1.1).

Точно так же, как это было указано ранее (1), заметим, что задача Коши—Ковалевской в указанной выше постановке является в некотором смысле обратной к классической задаче Коши—Ковалевской. В самом деле, если задача Коши—Ковалевской заранее предполагает аналитичность начальных данных в окрестности некоторой точки и доказывает существование также локально аналитического решения в некоторой области G, то в нашей постановке задачи для уравнения типа (1.1) требуется существование a priori аналитического решения по данному (главному) переменному t, ищется класс допустимых функций для начальных данных и выясняется природа относительно других переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

В частности, если предполагать, что $p\geqslant \max\lambda$, и считать начальные данные $\varphi_k(x)$ в окрестности некоторой точки аналитическими функциями, то для уравнения (1.1) из наших результатов будет вытекать теорема Коши—Ковалевской в нелокальной ее формулировке (см. § 3, следствие 4).

Решение задачи Коши—Ковалевской в вышеуказанной постановке тесно связано с классом бесконечно дифференцируемых, вообще говоря, неаналитических функций от многих переменных, указанных Жевреем (5), в следующем определении:

Действительная функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, имеющая в некоторой s-мерной области $g\ni(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ производные всех порядков, называется функцией класса α_k по x_k, если для любой системы целых положительных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ имеет место условие

$$\left|\frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1}\partial x_2^{n_2}\cdots\partial x_s^{n_s}}\right| \leqslant \frac{M n_1!^{\alpha_1} n_2!^{\alpha_2}\cdots n_s!^{\alpha_s}}{H_1^{n_1}H_2^{n_2}\cdots H_s^{n_s}}, \tag{1.3}$$

где $n=\sum_{i=1}^{s} n_i$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ — любые положительные числа, M и $H_1, H_2, \ldots, H_s$ — некоторые постоянные. Если $\max\alpha_i=\alpha$, то функция φ называется функцией класса α по совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_s$. Если $\alpha_i=1$, то функция φ будет аналитической по переменному x_i; если $\alpha_i<1$, то мы имеем дело с некоторой целой функцией, если же $\alpha_i>1$,

то функция φ относительно переменного x_i, вообще говоря, будет неаналитической функцией.

Если $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ есть функция класса α по совокупности $x_1, x_2, \ldots, x_s$, то, учитывая, что $n_1! n_2! \cdots n_s! \leqslant n!$, неравенство (1.3), можно, очевидно, заменить следующим:

$$\left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \cdots \partial x_s^{n_s}} \right| \leqslant \frac{Mn!^{\alpha}}{H^n},$$

где $H = \min H_i$ $(i = 1, 2, \ldots; s)$.

Будем говорить, что действительная, сколь угодно гладкая функция $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ относительно линейного дифференциального оператора D в области $g\ni(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ принадлежит к классу $\alpha > 0$, если в этой области имеет место условие

$$|D^n \varphi| \leqslant \frac{Mn!^{\alpha}}{H^n}.$$

§ 2. ЛЕММА 1. *Для решения уравнения* (1.1), *аналитического по* t *и регулярного относительно переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *в области* G, *при любом целом положительном* n *имеет место равенство*

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} Dz = D \frac{\partial^n z}{\partial t^n}. * \tag{2.1}$$

Доказательство. В силу предположения аналитичности решения уравнения (1.1) по переменному t в области G, имеем

$$z(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{z(\xi, x)\, d\xi}{\xi - t},$$

где через (c) обозначается произвольный спрямляемый контур, целиком лежащий внутри круга $|t| < R$. В силу регулярности решения уравнения (1.1) в области G относительно переменных $x_1, x_1, , \ldots, x_s$, очевидно, справедливо равенство

$$Dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{Dz(\xi, x)\, d\xi}{\xi - t},$$

откуда

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} Dz = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{Dz(\xi, x)\, d\xi}{(\xi - t)^{n+1}}. \tag{2.2}$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial^n z}{\partial t^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{(c)} \frac{z(\xi, x)\, d\xi}{(\xi - t)^{n+1}}.$$

* Вообще говоря, справедливость этого равенства может быть доказана для общего линейного уравнения

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^n} = \sum_{\lambda_0=0}^{r} \sum_{(\lambda)} A_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_s} \frac{\partial^{\lambda_0+\lambda} z}{\partial t^{\lambda_0} \partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \cdots \partial x_s^{\lambda_s}}.$$

Поэтому

$$D\frac{\partial^n z}{\partial t^n}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{(c)}\frac{Dz(\xi, x)\,d\xi}{(\xi-t)^{n+1}}. \tag{2.3}$$

Сравнивая равенства (2.2) и (2.3), убеждаемся в справедливости леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *в окрестности* $t=0$ *имело аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного* t, *необходимо и достаточно, чтобы начальные данные* (1.2) *в области* $g\ni(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ *относительно дифференциального оператора* D *принадлежали к классу* $\alpha\leqslant p$. *При этом*

1) *если* $\alpha=p$, *то решение будет аналитическим по* t *для* $|t|<R$, *где* R — *некоторое фиксированное число* $\neq 0$;

2) *если* $\alpha<p$, *то решение будет целой функцией относительно* t.

Доказательство. Во-первых, заметим, что если уравнение (1.1) допускает аналитическое решение по переменному t в любой замкнутой области $G'\in G$, то всегда существуют такие постоянные M и d, независимо от n и переменных $t, x_1, x_2, \ldots, x_s$, что всюду в области G' имеет место

$$\left|\frac{\partial^n z(t, x)}{\partial t^n}\right|\leqslant\frac{M\cdot n!}{d^n}\quad(n=0, 1, 2, \ldots). \tag{2.4}$$

В самом деле, пользуясь интегральной формулой Коши, имеем

$$\frac{\partial^n z(t, x)}{\partial t^n}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{(\gamma)}\frac{z(\xi, x)\,d\xi}{(\xi-t)^{n+1}}, \tag{2.5}$$

где через (γ) обозначается произвольный спрямляемый контур, лежащий целиком внутри некоторого кольца $R'\leqslant|t|<R$ и охватывающий круг $|t|\leqslant R'$. Пусть длина контура (γ) есть l. В силу того, что всякое решение уравнения (1.1) для любой замкнутой области $G'\in g$ ограничено независимо от переменных $t, x_1, x_2, \ldots, x_s$, имеем $|z(t, x)|\leqslant c$. Обозначим через d минимум расстояний точек круга $|t|\leqslant R'$ от точек контура (γ). Тогда, на основании (2.5), в области G' будем иметь

$$\left|\frac{\partial^n z(t, x)}{\partial t^n}\right|\leqslant\frac{Mn!}{d^n},$$

где $M=\frac{c\cdot l}{2\pi d}$. Дифференцируя последовательно обе части уравнения (1.1) по t, пользуясь леммой 1, и полагая каждый раз после дифференцирования $t=0$, будем иметь

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\varphi_n(x), & \text{если } n=0, 1, \ldots, p-1,\\ 0, & \text{если } n=p, p+1, \ldots, p+m-1,\\ \varepsilon m!\,C_{n-p}^m\,D\varphi_{n-(p+m)}(x), & \text{если } n=p+m,\ p+m+1, \ldots,\end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$\varphi_n(x)=\left.\frac{\partial^n z}{\partial t^n}\right|_{t=0}\quad(n=0, 1, 2, \ldots).$$

Согласно равенству (2.3), отсюда следует, что дифференциальный оператор D может быть применим к $\varphi_n(x)$ при любом индексе n. Поэтому из бесконечной последовательности рекуррентных уравнений (2.6) следует, что к начальным данным $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, p-1)$ в области g оператор D должен быть применим *неограниченное* число раз. Следовательно, каждая функция бесконечной последовательности $\varphi_n(x)$ $(n=p+m, p+m+1, \ldots)$ в области g определяется однозначно через начальные данные $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots p-1)$. На основании этого, пользуясь последовательностью уравнений (2.6), легко показать, что

$$\varphi_{nh+k}(x)=\left.\frac{\partial^{nh+k} z}{\partial t^{nh+k}}\right|_{t=0}=$$

$$=\begin{cases}\varepsilon^n (m!)^n \prod\limits_{\lambda=1}^{n} C^m_{\lambda h-p+k} D^n \varphi_k(x), & \text{если } k=0, 1, \ldots, p-1, \\ 0, & \text{если } k=p,\ p+1, \ldots, p+m-1,\end{cases} \tag{2.7}$$

где $h=p+m$, $n=0, 1, 2, 3, \ldots$.

Следовательно, формальное a priori аналитическое решение уравнения (1.1) в окрестности $t=0$ при заданных начальных данных $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, p-1)$ может быть записано в виде ряда:

$$z(t, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \varphi_n(x)}{n!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n t^{nh+k}}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} D^n \varphi_k(x). \ * \tag{2.8}$$

Но, согласно (2.4), имеем

$$\left|\frac{\partial^{nh+k} z(0, x)}{\partial t^{nh+k}}\right| \leqslant \frac{M(nh+k)!}{d^{nh+k}}.$$

Следовательно, на основании (2.7), в области g должно быть

$$|D^n \varphi_k(x)| \leqslant \frac{M(nh+k)!}{d^{nh+k}} \cdot \frac{1}{(m!)^n \prod\limits_{\lambda=1}^{n} C^m_{\lambda h-p+k}}$$

или

$$|D^n \varphi_k(x)| \leqslant \frac{M(nh+k)!}{d^{nh+k}} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+k]!}{[(\lambda-1)h+m+k]!}, \tag{2.9}$$

где $k=0, 1, \ldots, p-1$, $h=p+m$ и $n=0, 1, 2, \ldots$.

---

* Для $n=0$ надо считать

$$\prod_{\lambda=1}^{0} C^m_{\lambda h-p+k}=1, \quad D^0 \varphi_k(x)=\varphi_k(x), \quad \prod_{\lambda=1}^{0} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!}=1.$$

Заметим, что для любого целого положительного τ при $n \to \infty$ имеет место равенство

$$\sqrt[n]{\frac{[(n\tau)!]^{\delta}}{\frac{(nh+k)!}{d^{nh+k}} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+k]!}{[(\lambda-1)h+m+k]!}}} = c + \varepsilon_n > 0, \tag{2.10}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \;\; \delta = \frac{p}{\tau} \;\; \text{и} \;\; c = d^h \left(\frac{\tau}{h}\right)^p > 0.$$

Поэтому всегда можно найти такое положительное постоянное $H \neq 0$, что для любого $n = 0, 1, 2, \ldots$ будет справедливо неравенство $c + \varepsilon_n \geqslant \geqslant H^{\tau} > 0$. Тогда, на основании (2.9) и (2.10), имеем

$$|D^n \varphi_k(x)| \leqslant \frac{M[(n\tau)!]^{\delta}}{H^{n\tau}}, \text{*} \tag{2.11}$$

де $k = 0, 1, \ldots, p-1$; $n = 0, 1, 2, \ldots$; M, H — некоторые положительные числа, независимые от n.

Полагая в (2.11) $\tau = 1$ для всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$, принадлежащих области g, имеем

$$|D^n \varphi_k(x)| \leqslant \frac{M(n!)^p}{H^n}. \tag{2.12}$$

Таким образом, нами доказано, что для того чтобы уравнение (1.1) в окрестности $t = 0$ допускало аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного t, *необходимо*, чтобы начальные данные $\varphi_k(x)$ в области g были таковы, чтобы к ним дифференциальный оператор D был применим *неограниченное* число раз, и чтобы они относительно оператора D принадлежали к классу $\alpha \leqslant p$.

Докажем, что условие (2.12) является и *достаточным*. Для этого нам нужно показать, что при условии

$$|D^n \varphi_k(x)| \leqslant \frac{M(n!)^{\alpha}}{H^n} \quad (\alpha \leqslant p) \tag{2.13}$$

степенной ряд (2.8) имеет радиус сходимости $R \neq 0$. Составим мажорантный ряд:

$$|z(t, x)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} |D^n \varphi_k(x)| \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} \cdot \frac{|t|^{nh+k}}{(nh+k)!}.$$

---

* Хотя в доказательстве настоящей теоремы это неравенство используется при $\tau = 1$, однако в дальнейшем мы его используем также для некоторого целого положительного $\tau \geqslant 1$ (см. следствие 1).

На основании (2.13), в области G имеем

$$|z(t,x)| \leqslant M \sum_{k=0}^{p-1} H^{\frac{k}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^{\alpha}}{(nh+k)!} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} \cdot \left| \frac{t}{H^{\frac{1}{h}}} \right|^{nh+k}. \quad (2.14)$$

Радиус сходимости последнего степенного ряда относительно $|t|$ находим, пользуясь формулой Коши — Адамара и соотношением (2.10):

$$R = \frac{H^{\frac{1}{h}}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^{\alpha}}{(hh+k)!} \prod\limits_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!}}} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > p, \\ H^{\frac{1}{h}} h^{p} \neq 0, & \text{если } \alpha = p, \\ \infty, & \text{если } \alpha < p. \end{cases} \quad (2.15)$$

Дифференцируемость решения. Покажем, что ряд (2.8) в области его существования G, так же как и ряды, полученные из него дифференцированием p раз по t и применением к нему оператора D, сходится равномерно для всех $|t| < R$ и $g \ni (x_1, x_2, \ldots, x_s)$. В самом деле, дифференцируемость ряда (2.8) по переменному t очевидна по свойству степенных рядов. Далее, применение оператора D дает

$$Dz = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^{n}\, t^{nh+k}}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} D^{n+1} \varphi_k(x).$$

На основании (2.13), имеем

$$|Dz| \leqslant M \sum_{k=0}^{p-1} H^{\frac{k}{h}-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^{\alpha}}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} \left| \frac{t}{H^{\frac{1}{h}}} \right|^{nh+k}. \quad (2.16)$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{\alpha}{n}} = 1$, на основании (2.15), легко убеждаемся, что радиус сходимости степенного ряда (2.16) оказывается тем же самым R, что и для ряда (2.9).

Таким образом, построенный нами ряд (2.9), так же как и ряды, полученные из него дифференцированием p раз по t и применением к нему оператора D, в области G сходится равномерно. Следовательно, он является интегралом уравнения (1.1), удовлетворяющим заданным начальным данным $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$.

Единственность решения. Легко показать, что этот интеграл в области G при заданных начальных условиях будет единственным. В самом деле, если бы существовали два различные интеграла, удовлетворяющие одним и тем же начальным данным, тогда разность их давала бы новый интеграл, регулярный в рассматриваемой области и обращающийся в нуль вместе со своими производными до $p-1$ порядка по t на всей области $g \ni (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, примыкающий к области G по гиперплоскости $t = 0$. Следовательно, все частные производные его оказались бы нулями вдоль всей области $g \ni (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, но в виду того, что этот интеграл представляет собой аналитическую

функцию от t, он будет тождественно равен нулю во всей области G. Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

ТЕОРЕМА 2. *Решение уравнения* (1.1), *являющееся аналитическим по t в окрестности $t=0$, относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$ будет обладать тем свойством, что оператор D может быть применен к нему в области G неограниченное число раз и относительно этого оператора в некоторой замкнутой области $G' \in G$ решение принадлежит к классу $\alpha \leqslant p$.*

Доказательство. На основании (2.9), для любого целого положительного s

$$D^s z = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n t^{nh+k}}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} D^{n+s} \varphi_k(x), \tag{2.17}$$

где $h = p + m$ и $s = 0, 1, 2, \ldots$

Пользуясь неравенством (2.13), будем иметь

$$|D^s z| \leqslant M \sum_{k=0}^{p-1} H^{\frac{k}{h}-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(n+s)!]^\alpha}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} \cdot \left| \frac{t}{H^{\frac{1}{h}}} \right|^{nh+k}. \tag{2.18}$$

Но, так как

$$(n+s)! = n!\,(n+1)(n+2)\cdots(n+s)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\{(n+1)(n+2)\cdots(n+s)\}^\alpha} = 1,$$

то, на основании (2.15), легко убеждаемся, что радиус сходимости степенного ряда (2.17) оказывается тем же самым R, что и для степенного ряда (2.9).

Далее, учитывая неравенство

$$[(n+s)!]^\alpha \leqslant e^{(n+s)\alpha} (n!)^\alpha (s!)^\alpha,$$

согласно (2.18), имеем

$$|D^s z| \leqslant \frac{M\,(s!)^\alpha}{H_1^s} \sum_{k=0}^{p-1} H_1^{\frac{k}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(nh+k)!} \prod_{\lambda=1}^{n} \frac{[(\lambda-1)h+m+k]!}{[(\lambda-1)h+k]!} \left| \frac{t}{H_1^{\frac{1}{h}}} \right|^{nh+k}, \tag{2.19}$$

где $H_1 = He^{-\alpha}$ и $\alpha \leqslant p$.

Сравнивая (2.19) с (2.14), мы видим, что степенной ряд (2.19) имеет радиус сходимости $\rho = e^{-\frac{\alpha}{n}} R < R$. Но так как для любого $r < \rho$ этот степенной ряд является равномерно ограниченным независимо от s, то все сказанное доказывает справедливость высказанной теоремы.

§ 3. Рассмотрим некоторые следствия теорем 1 и 2. Если воспользоваться одной леммой, доказательство которой было дано ранее ([1]), то теоремы 1 и 2 для уравнения вида

$$\frac{\partial^p z}{\partial t^p} - \varepsilon t^m \frac{\partial^q z}{\partial x^q} = 0 \tag{3.1}$$

могут быть сформулированы в более сильной форме.

ЛЕММА 2.* *Если все производные бесконечное число раз дифференцируемой функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ для любого фиксированного целого положительного p удовлетворяют неравенству*

$$|f^{(np)}(x)| \leqslant \frac{\widetilde{M}[(np)!]^\alpha}{\widetilde{H}^{np}} \quad (\alpha > 0, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то для производных всех порядков справедливо неравенство

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M(n!)^\alpha}{H^n},$$

где M и H, как и $\widetilde{M}$ и $\widetilde{H}$, — некоторые положительные числа, причем H может быть выбрано сколь угодно близким к $\widetilde{H}$.

Полагая в неравенстве (2.11) $D = \frac{\partial^q}{\partial x^q}$ и $\tau = p$, на основании леммы 2 заключаем, что начальные данные Коши для уравнения (3.1) должны удовлетворять условию

$$|\varphi_k^{(n)}(x)| \leqslant \frac{M(n!)^\delta}{H^n},$$

где $\delta = \frac{p}{q}$. Величину дроби $\delta = \frac{p}{q}$ в дальнейшем будем называть *весом* уравнения (3.1). Тогда теорема I для уравнения (3.1) может быть сформулирована следующим образом:

Следствие 1. *Для того чтобы уравнение (3.1) в окрестности $t = 0$ допускало единственное аналитическое решение относительно (вещественного или комплексного) переменного t, необходимо и достаточно, чтобы начальные данные $\varphi_k(x)$ были бесконечно дифференцируемыми на $[a, b]$ и принадлежали к классу α в смысле Жеврея ([5]) не выше, чем вес уравнения (3.1), т. е. $\alpha \leqslant \delta$. При этом:*

1) *если $\alpha = \delta$, то решение будет аналитическим по t для $|t| < R \neq 0$;*

2) *если $\alpha < \delta$, то решение будет целой функцией относительно t.*

Если положить $m = 0$, $p = 1$ и $q = 2$, или $m = 0$, $p = 2$ и $q = 1$, то эта теорема дает известные классические результаты для уравнения теплопроводности.

Из теоремы 2 для уравнения (3.1) вытекает следующее

---

* См. ([1]).

С л е д с т в и е 2. *Любое решение уравнения* (3.1), *аналитическое по* t *в окрестности* $t=0$, *будет сколь угодно дифференцируемой функцией* x *в области* $G\{|t|<R, a\leqslant x\leqslant b\}$ *и функцией класса* $\alpha\leqslant\delta$ *относительно* x *в некоторой замкнутой области* $G'\{|t|\leqslant r<R,\ a\leqslant x\leqslant b\}\in G$.

Предположим, что начальные данные $\varphi_k(x)$ $(k=0, 1, \ldots, p-1)$ для уравнения (1.1) по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$ в замкнутой области $g\ni(x_1, x_2, \ldots, x_s)$ принадлежат классу α в смысле Жеврея, т. е.

$$\left|\frac{\partial^n \varphi_k(x)}{\partial x_1^{n_1}\,\partial x_2^{n_2}\ldots\partial x_s^{n_s}}\right|\leqslant\frac{Mn!^{\alpha}}{H^n}. \tag{3.2}$$

Пусть

$$A=\sum_{(\lambda)}|A_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s}| \text{ и } q=\max\lambda;$$

тогда, согласно (3.2), имеем

$$|D\varphi_k(x)|\leqslant\frac{MAq!^{\alpha}}{H^q}.$$

Очевидно,

$$|D^2\varphi_k(x)|\leqslant\frac{MA^2\,(2q)!^{\alpha}}{H^{2q}}.$$

Применяя метод математической индукции, получим

$$|D^n\varphi_k(x)|\leqslant\frac{MA^n\,(nq)!^{\alpha}}{H^{nq}}. \tag{3.3}$$

Так как

$$(nq)!^{\alpha}\leqslant e^{n\alpha q}\,(n!)^{\alpha q},$$

то неравенство (3.3) может быть заменено следующим:

$$|D^n\varphi_k(x)|\leqslant\frac{M\,(n!)^{\alpha q}}{H_1^n}, \tag{3.4}$$

где $H_1=HA^{-1}e^{-\alpha q}$.

Для уравнения (1.1) величину дроби $\delta=\frac{p}{q}$, где $q=\max\lambda$, назовем его весом*. Далее, если потребовать, чтобы $\alpha\leqslant\delta$, то условия теоремы 1 для уравнения (1.1), очевидно будут выполнены. Таким образом, для уравнения (1.1) может быть сформулировано следующее

С л е д с т в и е 3. *Для того чтобы уравнение* (1.1) *допускало аналитическое решение по* (*вещественному или комплексному*) *переменному* t *в окрестности* $t=0$, *достаточно, чтобы начальные данные его по совокупности переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *в области* g *принадлежали классу* α *не выше чем вес уравнения. При этом:*

1) *если* $\alpha=\delta$, *то решение будет аналитическим для* $|t|<R\neq 0$;

2) *если* $\alpha<\delta$, *то решение относительно* t *будет целой функцией.*

---

* Определение веса для общих систем линейных уравнений с частными производными было нами дано в работе ([6]).

Если предположить, что все начальные данные уравнения (1.1) в области $g \in (x_1, x_2, \ldots, x_s)$ по совокупности переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$ являются аналитическими функциями, т. е. $\alpha = 1$, и учесть, что ряд с аналитическими функциями, сходящийся равномерно в данной области, представляет также аналитическую функцию в этой области, то из следствия 3 будет вытекать следующее

Следствие 4. Если для уравнения (1.1) все начальные данные $\varphi_k(x)$ являются аналитическими функциями в области $g \ni (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, то решение его, аналитическое по (вещественному или комплексному) переменному t в окрестности $t = 0$, будет в области его существования также аналитической функцией по всем остальным переменным. При этом:

1) если вес уравнения (1.1) $\delta = 1$, то решение относительно t будет аналитическим для $|t| < R \neq 0$;

2) если $\delta > 1$, то решение будет целой функцией по t.

Очевидно, последнее следствие является частным случаем теоремы Коши — Ковалевской для уравнений типа (1.1), но в нелокальной ее формулировке.

4. В заключение заметим, что задача Коши—Ковалевской в той постановке, которая была дана в настоящей работе, вообще говоря, когда вес уравнения < 1, не может иметь решения для линейных уравнений с произвольными переменными коэффициентами, тем более, когда эти коэффициенты являются функциями не только главного аргумента t, а будут зависеть также от других переменных $x_1, x_2, \ldots, x_s$.

Для того чтобы представить, насколько при этом могут влиять структурные свойства коэффициентов и начальных данных уравнений на существование аналитического решения анормальных уравнений (т. е. когда $\delta < 1$), мы укажем на следующие любопытные примеры, построенные Рикье (7). Рикье показал, что дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[(1 + y + y^2 + \cdots + y^q) + (1 + y + y^2 + \cdots + y^{q+1}) \frac{\partial^q u}{\partial u^q} \right],$$

где μ — некоторое положительное постоянное, при $q \geqslant 2$ не может иметь аналитического решения с начальным условием $u(0, y) = 0$, причем этот результат справедлив равным образом и для уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu \left[1 + (1 + y) u + (1 + y + y^2 + y^3) \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu \left[1 + (1 + y + y^2) u + (1 + y) \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right], \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \mu \left[1 + (1 + y + y^2 + y^3) u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right], \end{aligned}\right\} \text{ когда } q \geqslant 2$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu \left[1 + (1 + y + y^2) u + \frac{\partial^q u}{\partial y^q} \right], \text{ когда } q \geqslant 3.$$

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии Наук СССР

Поступило
16. VI. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Салехов Г., О задаче Коши для одного класса уравнений с частными производными в области сколь угодно гладких функций, Изв. Казанского филиала Ак. Наук СССР (серия физ.-матем. и техн. наук), вып. 1 (1948), 63—74; Доклады Ак. Наук СССР, т. 59, № 5 (1948), 857—859.

[2] Kowalewsky S., Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Journ. f. die reine und angew. Mathem., Bd. 80 (1875), 1—32.

[3] Le Roux J., Sur les intégrales analitiques de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x}$, Bull. des Sciences mathém., t. XIX (1895), 127— 129.

[4] Holmgren E., Sur l'équation de la propagation de la chaleur, Arkiv för Matem., Astronomi och Fys., bd. 4, NN 14, 18, hafte 1—2, 3—4 (1908), 1—11, 1—28.

[5] Jevrey M., Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Ec. Norm., 35, Sér. 3, (1918), 129—190.

[6] Салехов Г., К проблеме Коши для линейных уравнений с частными производными в области бесконечно дифференцируемых функций, Успехи матем. наук, т. II, вып. 2 (18) (1947), 226—228.

[7] Riquier M., Sur l'application de la méthode des fonctions majorantes à certains systèmes différentielles, Comptes Rendus, Paris, CXXV (1897), 1018—1020.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 367—380

Е. С. ЛЯПИН

ПОЛУПРОСТЫЕ КОММУТАТИВНЫЕ АССОЦИАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

В статье исследуются строение и свойства полупростых коммутативных ассоциативных систем, т. е. систем, не имеющих других нормальных комплексов, кроме идеалов и отдельных элементов. Другими словами, система полупроста, если ее единственными гомоморфизмами являются изоморфизмы и идеальные гомоморфизмы.

Введение

Вопрос о простоте коммутативных ассоциативных систем (которые мы в последующем изложении будем для краткости называть просто *системами*) был рассмотрен нами в статье ([1]). Оказалось, что за исключением нескольких особо просто устроенных систем, все системы являются непростыми, т. е. содержат нетривиальные нормальные комплексы [([1]), п. 2.3]. При доказательстве указанного свойства в основном использовалось существование почти в каждой системе нетривиального идеала [([1]), п. 2.2]. Поэтому после завершения указанного исследования сразу возникает естественный вопрос, каковы те системы, которые не имеют других нормальных комплексов, кроме тривиальных и идеалов? Исследованию таких систем, которые мы называем полупростыми, и посвящена настоящая работа.

Необходимо указать, что в настоящей работе постоянно будут использоваться определения, результаты и обозначения статьи ([1]). Поэтому необходимо предположить, что читатель знаком с указанной статьей. Ссылки на соответствующие места статьи ([1]) будут осуществляться при помощи пометок вида [([1]); 1.2], что означает пункт 1.2 статьи ([1]).

§ 1. Полупростые системы

1.1. О п р е д е л е н и е. Система называется *полупростой*, если она не имеет других нормальных комплексов, кроме идеалов и отдельных элементов.

1.2 Полупростые системы могут быть также охарактеризованы при помощи своих гомоморфизмов.

Рассмотрим следующую конструкцию, подробно изученную в свое время Рисом ([2]).

Пусть $\mathfrak{P}$ — идеал системы $\mathfrak{A}$. Элементы $\mathfrak{A}$, не входящие в $\mathfrak{P}$, суть $X_\alpha, X_\beta, \ldots$. Определим систему $\overline{\mathfrak{A}}$, состоящую из элемента $\overline{P}$ и элементов

$\overline{X}_\alpha, \overline{X}_\beta, \ldots$ (фактор-система, по терминологии Риса). Действие в $\overline{\mathfrak{A}}$ определяем следующим образом:

1) если $X_\alpha X_\beta = X_\gamma$ в $\mathfrak{A}$, то в $\overline{\mathfrak{A}}$ полагаем $\overline{X}_\alpha \overline{X}_\beta = \overline{X}_\gamma$,

2) если $X_\alpha X_\beta \in \mathfrak{P}$ в $\mathfrak{A}$, то в $\overline{\mathfrak{A}}$ полагаем $\overline{X}_\alpha \overline{X}_\beta = \overline{P}$,

3) $\overline{P}\overline{X}_\alpha = \overline{X}_\alpha \overline{P} = \overline{P}\overline{P} = \overline{P}$.

Нетрудно убедиться, что действие в $\overline{\mathfrak{A}}$ ассоциативно, т. е. $\overline{\mathfrak{A}}$ является системой.

Очевидно, отображение φ системы $\mathfrak{A}$ на $\overline{\mathfrak{A}}$:

$$\varphi X_\alpha = \overline{X}_\alpha, \quad \varphi P = \overline{P} \quad (P \in \mathfrak{P})$$

является гомоморфизмом. Этот гомоморфизм вполне определяется с точностью до обозначений элементов, образующих систему $\overline{\mathfrak{A}}$, идеалом $\mathfrak{P}$. Будем называть такой гомоморфизм φ *идеальным гомоморфизмом системы* $\mathfrak{A}$, *порожденным идеалом* $\mathfrak{P}$. Отметим, что идеальный гомоморфизм, порожденный идеалом $\mathfrak{P}$, может быть определен при помощи понятий, употребляемых в моей статье о ядрах гомоморфизмов ([3]) как слабейший [([3]); 6.6] из тех гомоморфизмов, у которых $\mathfrak{P}$ есть полный прообраз одного из элементов образа. По терминологии, употребленной в ([4]), указанный гомоморфизм есть общий наибольший делитель всех таких гомоморфизмов, которые отображают все элементы $\mathfrak{P}$ в один элемент [([4]); 4. 3. 3].

После изоморфизма идеальный гомоморфизм есть простейший по своему строению и свойствам. Он осуществляет только простое «склеивание» между собой всех элементов некоторого идеала, превращая их тем самым в нуль системы (очевидно $\overline{P}$ есть нуль рассмотренной выше системы $\overline{\mathfrak{A}}$).

1.3. ТЕОРЕМА. *Полупростые системы и только они суть системы, не имеющие других гомоморфизмов, кроме идеальных и изоморфизмов.*

Доказательство.—1°. Если система $\mathfrak{A}$ не является полупростой, то она имеет нормальный комплекс $\mathfrak{K}$, не являющийся идеалом и содержащий более одного элемента. Согласно [([1]); 3.1], существует гомоморфизм ψ системы $\mathfrak{A}$ на систему $\mathfrak{A}'$, при котором $\mathfrak{K}$ есть полный прообраз некоторого элемента $X' \in \mathfrak{A}'$. Из самого определения идеального гомоморфизма следует, что ψ не является идеальным гомоморфизмом.

2°. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ есть полупростая система и φ — некоторый ее гомоморфизм на систему $\varphi\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. Обозначим через $\mathfrak{K}(X')$ полный прообраз элемента $X' \in \mathfrak{A}'$. Согласно [([1]); 3.1], $\mathfrak{K}(X')$ есть нормальный комплекс системы $\mathfrak{A}$, а так как $\mathfrak{A}$ полупроста, то $\mathfrak{K}(X')$ есть или идеал, или состоит из одного элемента. Если для всех $X' \in \mathfrak{A}'$ комплексы $\mathfrak{K}(X')$ состоят из одного элемента, то φ, очевидно, есть изоморфизм.

Если только для одного $X' \in \mathfrak{A}'$ комплекс $\mathfrak{K}(X')$ является идеалом, состоящим более чем из одного элемента, то φ является идеальным гомоморфизмом. Предположим, что $X', Y' \in \mathfrak{A}'$, комплексы $\mathfrak{K}(X')$ и $\mathfrak{K}(Y')$ суть идеалы. Тогда для всяких $X \in \mathfrak{K}(X')$ и $Y \in \mathfrak{K}(Y')$ имеет место:

$$(XY) \in \mathfrak{K}(X') \rightarrow \varphi(XY) = X', \quad (XY) \in \mathfrak{K}(Y') \rightarrow \varphi(XY) = Y',$$

т. е.

$$X' = \varphi(XY) = Y'.$$

1.4. В дальнейшем для нас будет важен вопрос о существовании единицы в рассматриваемых системах. Поэтому остановимся на нем подробнее.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная система. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}'$, состоящую из нового элемента E и всех элементов $\mathfrak{A}$. Действие в $\mathfrak{A}'$ определяем так, что результат перемножения элементов из $\mathfrak{A}$ совпадает с таковым в $\mathfrak{A}$, а для E полагаем:

$$E^2 = E, \quad EX = XE = X \quad (X \in \mathfrak{A}).$$

Очевидно, E есть единица новой системы $\mathfrak{A}'$. Будем говорить, что система $\mathfrak{A}'$ есть *система $\mathfrak{A}$ с внешне присоединенной к ней единицей.*

Из того, что система имеет не более одной единицы, непосредственно вытекает:

Если в системе $\mathfrak{B}$ обладающей единицей E, найдутся два нeединичных элемента X и Y таких, что $XY = E$, то $\mathfrak{B}$ не может быть получена путем внешнего присоединения единицы к какой-либо системе.

Если в системе $\mathfrak{B}$, обладающей единицей E, произведение двух неединичных элементов всегда отлично от единицы, то $\mathfrak{B}$ есть результат внешнего присоединения единицы к системе, состоящей из всех неединичных элементов $\mathfrak{B}$.

1.5. ТЕОРЕМА. *Если полупростая система обладает единицей, то она принадлежит к одному из следующих трех типов:*

I. *Циклическая группа, порядок которой есть простое число или единица.*

II. *Система второго порядка, являющаяся результатом внешнего присоединения единицы к единичной системе.*

III. *Система, которая может быть получена путем внешнего присоединения единицы к полупростой системе без единицы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ есть произвольная полупростая система с единицей, не принадлежашая ни к типу I, ни к типу II. Покажем, что $\mathfrak{A}$ принадлежит к типу III. Прежде всего покажем, что единица E системы $\mathfrak{A}$ присоединена внешним образом. Действительно, в противном случае, согласно 1.4, нашлись бы элементы X, $\overline{X} \in \mathfrak{A}$ ($X, \overline{X} \neq E$) такие, что $X\overline{X} = E$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех таких элементов $X \in \mathfrak{A}$, для каждого из которых найдется $\overline{X} \in \mathfrak{A}$ такой, что $X\overline{X} = E$. Покажем, что $\mathfrak{A}$ является нормальной подсистемой $\mathfrak{A}$. Пусть

$$X_1 \overline{X}_1 = X_2 \overline{X}_2 = E \quad (X_1, \overline{X}_1, X_2, \overline{X}_2 \in \mathfrak{A});$$

тогда

$$(X_1 X_2)(\overline{X}_1 \overline{X}_2) = E \to X_1 X_2 \in \mathfrak{N},$$

$$X_1 = Y X_2 \to Y (X_2 \overline{X}_1) = X_1 \overline{X}_1 = E \to Y \in \mathfrak{N}.$$

Поскольку система $\mathfrak{A}$ полупроста, ее нормальная подсистема $\mathfrak{N}$ должна быть идеалом, ибо нормальная подсистема есть нормальный комплекс [(1); 1.10. 1]. Но нормальная подсистема $\mathfrak{N}$ может быть идеалом лишь при $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}$ [(1); 1.10.6]. Из определения $\mathfrak{N}$ следует, что $\mathfrak{N}$ есть группа. Мы пришли к противоречию с предположением, что $\mathfrak{A}$ — не

группа. Следовательно, на самом деле $\mathfrak{N}=E$, т. е. по 1.4 $\mathfrak{A}$ есть результат внешнего присоединения единицы E к некоторой системе $\mathfrak{B}$.

Покажем, что $\mathfrak{B}$ не имеет единицы. Допустим противное. Пусть I есть единица системы $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность двух элементов E и I. Покажем, что $\mathfrak{M}$ есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$. Действительно, во-первых,

$$E^2=E, \quad EI=E, \quad I^2=I.$$

Во-вторых, $XE\in\mathfrak{M}$ возможно лишь при $X\in\mathfrak{M}$, так как $XE=X$. Также $XI\in\mathfrak{M}$ возможно лишь при $X\in\mathfrak{M}$, так как $E\in\mathfrak{M}$, а при $X\neq E$ имеет место $XI=X$. Отсюда, рассуждая аналогично предыдущему, получаем $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}$, что означает, что $\mathfrak{A}$ принадлежит типу II нашей теоремы.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что система $\mathfrak{B}$ полупростая. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{B}$, содержащий более одного элемента. Покажем, что $\mathfrak{K}$ является нормальным комплексом самой системы $\mathfrak{A}$. Действительно, если $X\in\mathfrak{B}$ и K_1, $K_2\in\mathfrak{K}$, то

$$XK_1\in\mathfrak{K}\rightarrow XK_2\in\mathfrak{K},$$

так как $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс $\mathfrak{B}$. Если же $X\overline{\in}\mathfrak{B}$, $X\in\mathfrak{A}$, то $X=E$ и тогда также $XK_2=K_2\in\mathfrak{K}$. Поскольку система $\mathfrak{A}$ полупроста, $\mathfrak{K}$ должен быть идеалом для $\mathfrak{A}$, а следовательно, и подавно идеалом для $\mathfrak{B}$.

1.6. После доказательства теоремы 1.5 естественно поставить вопрос: справедливо ли обратное утверждение? Иными словами, всякая ли система, принадлежащая одному из трех типов I, II, III, указанных в теореме 1.5, является полупростой? Положительный ответ для систем типа I и II очевиден. Что касается систем типа III, то сперва ограничимся случаем, когда $\mathfrak{A}$ есть результат внешнего присоединения единицы E к полупростой системе $\mathfrak{B}$, обладающей нулем, все элементы которой нульстепенны. Для этого случая мы также получим положительный ответ на наш вопрос.

Пусть $\mathfrak{K}$ — нормальный комплекс указанной выше системы $\mathfrak{A}$. Считаем, что $\mathfrak{K}$ содержит более одного элемента. Если $\mathfrak{K}\subset\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{K}$ является нетривиальным нормальным комплексом полупростой системы, а следовательно, ее идеалом. Поскольку $\mathfrak{A}$ получается из $\mathfrak{B}$ внешним присоединением единицы, $\mathfrak{K}$ в рассматриваемом случае будет, очевидно, идеалом и для $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{K}\overline{\subset}\mathfrak{B}$, то $\mathfrak{K}\ni E$. Пусть $K\in\mathfrak{K}$, $K\neq E$; тогда $K\in\mathfrak{B}$ и, как всякий элемент из $\mathfrak{B}$, нульстепенен, т. е. $K^n=O$ при некотором n. По свойству нормального комплекса, имеем

$$EK\in\mathfrak{K}\rightarrow K^2\in\mathfrak{K},$$
$$EK^2\in\mathfrak{K}\rightarrow K^3\in\mathfrak{K},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$EK^{n-1}\in\mathfrak{K}\rightarrow K^n=O\in\mathfrak{K}.$$

Здесь O является нулем системы $\mathfrak{B}$, но, очевидно, O будет нулем и для $\mathfrak{A}$. Следовательно, нормальный комплекс $\mathfrak{K}$ системы $\mathfrak{A}$ содержит 0 системы $\mathfrak{A}$. В этом случае $\mathfrak{K}$ есть идеал $\mathfrak{A}$ [(1); 1.10.7].

1.7. Что касается общего случая систем типа III из 1.5, то, вообще говоря, ответ на вопрос, поставленный в 1.6, оказывается отрицательным. Ограничимся пока приведением соответствующего примера.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть результат внешнего присоединения единицы E к системе третьего порядка $\mathfrak{B}$, состоящей из элементов B_1, B_2, O. Правило умножения в $\mathfrak{B}$ таково:

$$B_1^2 = B_1, \quad B_1B_2 = B_2^2 = O, \quad B_1O = B_2O = O^2 = O.$$

Система $\mathfrak{B}$ полупроста, ибо единственное ее подмножество, содержащее более одного элемента и не содержащее нуля O, есть (B_1, B_2). Но (B_1, B_2) не является нормальным комплексом, ибо $B_1 B_1 \in (B_1, B_2)$, но $B_1B_2 = O \bar{\in} (B_1, B_2)$.

Рассматриваемая система $\mathfrak{A}$ не является полупростой, ибо обладает неидеальным гомоморфизмом φ на систему, состоящую из элементов V_1 и V_2 с правилом умножения:

$$V_1^2 = V_1, \quad V_1V_2 = V_2^2 = V_2.$$

Гомоморфизм φ определяется так:

$$\varphi E = \varphi B_1 = V_1, \quad \varphi B_2 = \varphi O = V_2.$$

§ 2. Отношение делимости

2.1. Если элемент A системы $\mathfrak{A}$ делится на элемент $B \in \mathfrak{A}$, т. е. существует такой элемент $X \in \mathfrak{A}$, что $A = BX$, то будем употреблять обозначение:

$$A \vdash B.$$

Если, в частности, имеет место $A = AB$, то будем говорить, что B является *частной единицей* элемента A.

2.2. Отметим несколько простейших свойств отношения делимости.

2.2.1. Если система обладает нулем, то все ее элементы являются частными единицами нуля.

2.2.2. Если система обладает единицей, то для каждого ее элемента единица является частной единицей.

2.2.3. Если элемент X является частной единицей для самого себя, то все его степени равны между собою. В этом случае будем называть X *равностепенным элементом*.

2.2.4. Отношение $A \vdash A$ означает, что элемент A обладает частной единицей.

2.2.5. В системе с нулем нульстепенный элемент является частной единицей лишь для нуля.

Действительно, если $XY = X$ и $Y^n = O$, то, очевидно,

$$(X = XY) \to (X = XY^2) \to \cdots \to (X = XY^n = XO = O).$$

2.2.6. Если все элементы системы нульстепенны, то соотношение $X \vdash X$ имеет место лишь для нуля системы.

2.3. Отношение делимости $\vdash$, очевидно, транзитивно. Однако, вообще говоря, оно не является отношением частичной упорядоченности,

ибо вполне возможно одновременное выполнение соотношений: $X \vdash Y$, $Y \vdash X$, $X \neq Y$ (это, например, всегда имеет место в группах).

Если через $X \geqslant Y$ обозначить случай, когда $X = Y$ или Y есть частная единица X, то отношение $\geqslant$ конечно явилось бы отношением частичной упорядоченности.

2.4. Определение. *Если в системе для любых двух различных между собою элементов X и Y всегда имеет место одно и только одно из соотношений:*

$$X \vdash Y, \quad Y \vdash X,$$

то система называется линейной.

Таким образом, линейные системы можно также определить, как системы, в которых отношение делимости $\vdash$ в множестве всех элементов является отношением упорядоченности.

В группе всякие два элемента X и Y удовлетворяют одновременно обоим соотношениям $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$. В произвольной системе два элемента X и Y вообще говоря не обязаны удовлетворять ни одному из соотношений $X \vdash Y$, $Y \vdash X$. Таким образом, линейная система является некоторым весьма естественным промежуточным случаем между группой и произвольной системой. Было бы естественно поэтому называть линейную систему полугруппой, если бы возможность употребления этого термина не была полностью утеряна, благодаря многократному его использованию в различных несовпадающих между собою смыслах.

Линейные системы под названием линейных голоидов рассматривались уже Клейн-Барменом ([5]). В частности, Клейн-Бармен дал полное описание строения и классификацию всех таких конечных систем.

2.5. *Если линейная система имеет единицу, то эта единица присоединена внешним образом.*

Действительно, если X и Y — неединичные элементы, то и их произведение XY есть неединичный элемент, ибо $XY = E$ означало бы $E \vdash X$, что, благодаря линейности (2.4), несовместимо с $X \vdash E$ (1.4).

2.6. Рассмотрим один важный пример линейной системы. Пусть $\Sigma = (\alpha, \beta, \ldots)$ есть произвольная совокупность вещественных чисел, содержащая число 1 и замкнутая относительно действий сложения и вычитания (числовая аддитивная группа). Обозначим через $\mathfrak{R}_\Sigma$ совокупность элементов R_ν, где $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, $\nu \in \Sigma$, в которой рассматриваем следующие действия:

$$R_\alpha R_\beta = \begin{cases} R_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha + \beta \leqslant 1, \\ R_1, & \text{если } \alpha + \beta \geqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, $\mathfrak{R}_\Sigma$ есть линейная система с нулем (R_1) и единицей (R_0). Все ненулевые элементы $\mathfrak{R}_\Sigma$ нульстепенны.

Так как $R_\alpha R_\beta = R_0$ невозможно (кроме случая $\alpha = \beta = 0$), то, согласно 1.4, система $\mathfrak{R}_\Sigma$ есть результат внешнего присоединения единицы к системе, состоящей из всех $R_\alpha \in \mathfrak{R}_\Sigma$ ($\alpha > 0$). Эту последнюю систему обозначим через $\mathfrak{R}'_\Sigma$. Система $\mathfrak{R}'_\Sigma$ также линейна, причем все ее элементы нульстепенны.

Среди систем $\mathfrak{R}_\Sigma$ и $\mathfrak{R}'_\Sigma$ есть как бесконечные, так и конечные системы любых порядков. Именно, порядком n обладают система $\mathfrak{R}_\Sigma$, где Σ состоит из чисел вида $\frac{m}{n-1}$, и система $\mathfrak{R}'_\Sigma$, где Σ состоит из чисел вида $\frac{m}{n}$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

2.7. ТЕОРЕМА. *Для всякого $n > 0$ существуют: единственная линейная система порядка n, обладающая нулем и единицей, все неединичные элементы которой нульстепенны, и единственная линейная система порядка n, обладающая нулем, все элементы которой нульстепенны.*

Доказательство. Существование указанных систем следует из 2.6.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть линейная система порядка n, обладающая нулем O, все элементы которой нульстепенны. A есть первый элемент в отношении делимости. Сопоставим этому элементу A элемент $R_{\frac{1}{n}} \in \mathfrak{R}'_\Sigma$, где Σ есть совокупность чисел вида $\frac{m}{n}$ (2.6):

$$\varphi A = R_{\frac{1}{n}}.$$

Пусть X есть произвольный элемент из $\mathfrak{A}$, отличный от A. Так как $X \vdash A$, то $X = AX_1$. Если $X_1 \neq A$, то $X_1 \vdash A$, т. е. $X = A^2X_2$. Продолжаем процесс получения элементов X_k:

$$X = A^k X_k.$$

Элемент A, как и все элементы из $\mathfrak{A}$, нульстепенен, и так как порядок $\mathfrak{A}$ равен n, то во всяком случае $A^n = O$. Следовательно, процесс построения элементов X_k должен оборваться (в крайнем случае, если $X = O$, то $X = A^n$), т. е. для X найдется $m \leqslant n$ такое, что $X = A^m$. Полагаем $\varphi X = R_{\frac{m}{n}}$. Отображение φ системы $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{R}'_\Sigma$ есть изоморфизм. Действительно,

$$\varphi X = \varphi Y = R_{\frac{m}{n}} \quad (X, Y \in \mathfrak{A})$$

означает, что $X = A^m$ и $Y = A^m$, т. е. $X = Y$. Далее, если $\varphi X = R_m$, $\varphi Y = R_l$, то, очевидно,

$$\varphi(XY) = R_m R_l.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ есть линейная система порядка n, обладающая нулем O и единицей E, все неединичные элементы которой нульстепенны. Согласно 2.5, $\mathfrak{A}$ есть результат внешнего присоединения единицы E к системе $\mathfrak{B}$. Очевидно, $\mathfrak{B}$ линейна и все ее элементы нульстепенны, т. е. $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{R}'_\Sigma$, где Σ есть совокупность чисел вида $\frac{m}{n-1}$. Согласно 2.6, внешнее присоединение единицы к системе $\mathfrak{A}'$ даст систему, изоморфную $\mathfrak{R}_\Sigma$, где Σ есть совокупность чисел вида $\frac{m}{n-1}$.

Укажем, что справедливость доказанной теоремы вытекает также из исследований Клейн-Бармена ([5]).

§ 3. Неразложимые полупростые системы

3.1. При изучении строения полупростых систем очень удобно пользоваться понятием и свойствами взаимно-аннулирующей суммы систем, содержащимися в моей работе ([4]), § 5,6. Сейчас мы воспроизведем (только для случая коммутативных систем и, конечно, без доказательств) те из определений и свойств, которые необходимы для понимания дальнейшего.

Пусть неединичные системы $\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}_\beta, \ldots$, число которых больше одной, не имеют попарно общих элементов, за исключением элемента O, который содержится в каждой $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = \alpha, \beta, \ldots)$ и является в ней нулем. Определим в множестве $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_\nu \mathfrak{B}_\nu$ умножение. Если $X, Y \in \mathfrak{A}$ принадлежат одному и тому же $\mathfrak{B}_\nu$ и $XY = Z$ в этом $\mathfrak{B}_\nu$, то и в $\mathfrak{A}$ полагаем $XY = Z$. Если же X и Y принадлежат различным системам $\mathfrak{B}_\nu$, то в $\mathfrak{A}$ полагаем $XY = O$. Очевидно, относительно определенного таким образом действия $\mathfrak{A}$ представляет собою систему, которую назовем *взаимно-аннулирующей суммой систем* $\mathfrak{B}_\nu$ и будем обозначать:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots$$

Если некоторая система допускает разложение на взаимно-аннулирующую сумму, то будем называть ее *разложимой* и в противном случае — *неразложимой*.

Иногда мы будем говорить о несобственном разложении, понимая под этим разложение, состоящее из одного слагаемого.

3.2. Приведем следующие свойства взаимно-аннулирующих сумм, полученные в ([4]).

3.2.1. Каждая система разлагается единственным образом на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых слагаемых.

3.2.2. Непустое подмножество $\mathfrak{D}$ системы $\mathfrak{A}$ назовем *анти-идеалом*, если $X\mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}$ пусто для любого $X \in \mathfrak{A}$. Антиидеал является нормальным комплексом системы, который никогда не есть ни идеал, ни нормальная подсистема.

3.2.3. Единственными нормальными комплексами взаимно-аннулирующей суммы

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots$$

являются:

1) нормальные комплексы отдельных слагаемых $\mathfrak{B}_\nu$;

2) идеалы $\mathfrak{A}$, каждый из которых имеет вид $\mathfrak{P}_\alpha \cup \mathfrak{P}_\beta \cup \cdots$, где $\mathfrak{P}_\nu$ — идеал $\mathfrak{B}_\nu$ или пустое множество;

3) анти-идеалы $\mathfrak{A}$, каждый из которых имеет вид $\mathfrak{D}_\alpha \cup \mathfrak{D}_\beta \cup \cdots$, где $\mathfrak{D}_\nu$ есть антиидеал $\mathfrak{B}_\nu$ или пустое множество.

3.2.4. Система, обладающая единицей, неразложима.

Действительно, в разложимой системе $\mathfrak{A}$ для всякого элемента $A \in \mathfrak{A}$ найдется такой ненулевой элемент $A' \in \mathfrak{A}$, что произведение AA' равно нулю системы. Однако для единицы системы такое свойство, очевидно, невозможно.

3.3. Приступим к изучению строения полупростых систем. Благодаря теореме 1.5, главное внимание мы должны обратить на полупростые

системы без единицы. Начнем с рассмотрения неразложимых полупростых систем без единицы.

ТЕОРЕМА. *Неединичные линейные системы с нулем, все элементы которых нульстепенны, и только эти системы, являются неразложимыми полупростыми системами без единицы.*

Доказательство. — 1°. Покажем сперва, что неединичная линейная система $\mathfrak{A}$, обладающая нулем O, такая, что все ее элементы нульстепенны, обладает требуемыми свойствами. Единицы система $\mathfrak{A}$ не имеет, так как в неединичной системе единица не является нульстепенным элементом. $\mathfrak{A}$, конечно, не разложима, ибо в случае $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \oplus \mathfrak{B}'$ для $B \in \mathfrak{B}$ и $B' \in \mathfrak{B}'$ $(B, B' \neq O)$, очевидно, было бы невозможно ни $B \vdash B'$, ни $B' \vdash B$. Пусть $\mathfrak{K}$ есть произвольный нормальный комплекс системы $\mathfrak{A}$ содержащий более одного элемента. Пусть

$$X, Y \in \mathfrak{K}, \quad X \neq Y, \quad X \vdash Y$$

(ввиду линейности $\mathfrak{A}$), т. е. $X = YZ$, $Z \in \mathfrak{A}$. Нульстепенность Z означает, что при некотором $n > 0$ имеет место $Z^n = O$. Тогда из определеления нормального комплекса следует

$$X = YZ \in \mathfrak{K} \to YZ^2 = XZ \in \mathfrak{K} \to YZ^3 = XZ^2 \in \mathfrak{K} \to \cdots$$
$$\cdots \to YZ^{n-1} = XZ^{n-2} \in \mathfrak{K} \to O = YZ^n = XZ^{n-1} \in \mathfrak{K}.$$

Следовательно, $\mathfrak{K}$ есть идеал [(1); 1,10.7].

2°. Пусть теперь $\mathfrak{A}$ есть произвольная полупростая система без единицы, неразложимая на взаимно-аннулирующую сумму. В дальнейшем мы можем ограничиться случаем, когда порядок $\mathfrak{A}$ больше двух. Действительно, среди систем первого и второго порядков не имеет единицы лишь система, состоящая из элементов W и O со следующим правилом умножения [(1); 1.13)]:

$$W^2 = O, \quad WO = O, \quad O^2 = O.$$

Очевидно, эта система неразложима, не имеет единицы, линейна и обладает нулем, причем все ее элементы нульстепенны.

Приступим к доказательству того, что наша система $\mathfrak{A}$ (порядка, большего двух) имеет нуль и все ее элементы нульстепенны. Согласно [(1) : 4,4], для этого достаточно показать, что $\mathfrak{A}$ не имеет других нормальных подсистем, кроме себя самой.

Предположим, что в $\mathfrak{A}$ существует нормальная подсистема $\mathfrak{N}$, причем $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{A}$. Так как система $\mathfrak{A}$ полупроста, то $\mathfrak{N}$, как нормальный комплекс, не являющийся идеалом, может состоять лишь из одного элемента $N \in \mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{N}$ есть подсистема, то элемент N должен быть равностепенным: $N^2 = N$.

Рассмотрим следующее отображение ψ системы $\mathfrak{A}$ в себя:

$$\psi A = AN \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Отображение ψ есть гомоморфизм. Действительно,

$$\psi(A_1 A_2) = A_1 A_2 N = (A_1 N)(A_2 N) = (\psi A_1)(\psi A_2).$$

Так как $\mathfrak{A}$ — полупростая система, то, согласно 1.3, ψ должно являться изоморфизмом или идеальным гомоморфизмом. Первая возможность отпадает, так как система $\mathfrak{A}$ не имеет единицы, в то время как в системе $\psi\mathfrak{A}$ элемент $\psi N = N^2 = N$, очевидно, является единицей. Итак, ψ есть идеальный гомоморфизм (1.2). Обозначим через $\mathfrak{P}$ идеал, порождающий этот идеальный гомоморфизм. $\mathfrak{P}$ содержит более одного элемента, ибо ψ не является изоморфизмом. С другой стороны, $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{A}$, ибо равенство $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$ означало бы что $\psi\mathfrak{A}$ состоит из одного элемента, а именно: $\psi\mathfrak{A} = N$ (так как $\psi N = N$). Но тогда $\psi A = AN = N$ для любого $A \in \mathfrak{A}$ и, так как N один образует нормальную подсистему, то $A = N$, т. е. $\mathfrak{A} = N$.

Обозначим через $\mathfrak{Q}$ совокупность всех таких элементов $Q \in \mathfrak{A}$, что $\psi Q = Q$. Очевидно, $\mathfrak{Q}$ есть идеал. Действительно,

$$\psi(XQ) = XQN = X(\psi Q) = XQ \quad (X \in \mathfrak{A},\ Q \in \mathfrak{Q}).$$

Рассмотрим произвольный элемент $A \in \mathfrak{A}$, $A \overline{\in} \mathfrak{P}$. Так как

$$\psi(\psi A) = (AN)N = AN = \psi A,$$

то, по определению идеального гомоморфизма, порожденного идеалом $\mathfrak{P}$ (1.2), имеет место $\psi A = A$. Следовательно, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{Q}$.

Обозначим через U нуль системы $\psi\mathfrak{A}$. Очевидно, имеет место

$$\psi U = \psi(UQ) = UQN = U(\psi Q) = U \quad (Q \in \mathfrak{Q} \subset \psi\mathfrak{A}).$$

Отсюда следует, что, с одной стороны, $U \in \mathfrak{Q}$ и с другой — $U \in \mathfrak{P}$. Легко видеть, что у $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ нет других общих элементов. Действительно, если $X \in \mathfrak{Q}$, то $\psi X = X$, если же $X \in \mathfrak{P}$, то $\psi X = U$. Итак, мы получили разложение $\mathfrak{A}$ на сумму двух идеалов:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P} \cup \mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{P} \cap \mathfrak{Q} = U, \quad U \in \mathfrak{A}.$$

Непосредственно из определения идеала отсюда следует, что для любых $P \in \mathfrak{P}$ и $Q \in \mathfrak{Q}$ имеет место: $PQ = U$ и, в частности, $PU = QU = U$. Все это вместе взятое и означает, что имеет место разложение $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму: $\mathfrak{A} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{Q}$. Это разложение, полученное благодаря предположению о том, что $\mathfrak{A}$ обладает нормальной подсистемой, отличной от самой $\mathfrak{A}$, противоречит предположению о неразложимости $\mathfrak{A}$.

Теперь докажем, что рассматриваемая система линейна. Предположим, что для некоторых $X, Y \in \mathfrak{A}$ $(X \neq Y)$ имеет место одновременно $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$. Это означает, что существуют элементы $Z, Z' \in \mathfrak{A}$, такие, что

$$X = YZ, \quad Y = XZ', \quad X = X(ZZ'), \quad Y = Y(ZZ').$$

Выше мы показали, что все элементы $\mathfrak{A}$ нульстепенны. Но тогда из нульстепенности (ZZ') следует, что $X = O$ и $Y = O$.

Предположим, что для некоторых $X, Y \in \mathfrak{A}$ $(X \neq Y)$ не имеет места ни $X \vdash Y$, ни $Y \vdash X$. В этом случае совокупность $\mathfrak{K}$ двух элементов

X и Y является анти-идеалом (3.2.2). Действительно, ни $AX = Y$, ни $AY = X$ ($A \in \mathfrak{A}$) невозможно, по предположению. $AX = X$ означало бы, благодаря нульстепенности A, что $X = O$ (2.2.5) и, следовательно, $X \vdash Y$. По той же причине невозможно $AY = Y$. Однако существование в $\mathfrak{A}$ анти-идеала, состоящего из двух элементов, противоречит полупростоте $\mathfrak{A}$, ибо анти-идеал есть нормальный комплекс, не являющийся идеалом (3.2.2).

§ 4. Разложение полупростых систем на взаимно-аннулирующие суммы

4.1. После исследования неразложимых полупростых систем естественно перейти к вопросу о разложении полупростых систем на взаимно-аннулирующие суммы.

ТЕОРЕМА. *Полупростая система разлагается единственным образом на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых полупростых систем.*

Доказательство. Как мы уже знаем (3.2.1), полупростая система $\mathfrak{A}$ может быть разложена, и притом единственным образом, на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых систем: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots$.

Теорема будет доказана, если мы покажем, что все $\mathfrak{B}_\nu$ полупросты.

Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс системы $\mathfrak{B}_\nu$, содержащий более одного элемента. Согласно (3.2.3), $\mathfrak{K}$ является нормальным комплексом $\mathfrak{A}$, и так как $\mathfrak{A}$ полупроста, то $\mathfrak{K}$ есть идеал $\mathfrak{A}$. Но тогда $\mathfrak{K}$, конечно, будет идеалом для $\mathfrak{B}_\nu$.

4.2. Теоремы 3.3 и 4.1 позволяют полностью выяснить строение полупростых систем с единицей.

ТЕОРЕМА. *Линейные системы с нулем и единицей, все неединичные элементы которых нульстепенны, суть единственные полупростые системы с единицей, не являющиеся группой.*

Доказательство. Линейные системы, упомянутые в теореме, являются полупростыми, на основании 1.4, 1.6, 3.3.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть полупростая система с единицей, не являющаяся группой. Согласно 1.5, $\mathfrak{A}$ есть результат внешнего присоединения единицы E к полупростой системе $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ есть единичная система, то $\mathfrak{A}$, конечно, принадлежит к числу систем, упомянутых в теореме. Пусть $\mathfrak{B}$ неединична, а следовательно, по 1.5 — полупростая система без единицы. Согласно 4.1, $\mathfrak{B}$ разлагается на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых полупростых систем: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots$. Предположим, что одно из слагаемых $\mathfrak{B}_\nu$ обладает единицей $I \neq O$. Покажем, что в таком случае совокупность $\mathfrak{N}$ двух элементов E и I есть нормальная подсистема $\mathfrak{A}$. Действительно, во-первых

$$E^2 = E \in \mathfrak{N}, \quad EI = I \in \mathfrak{N}, \quad I^2 = I \in \mathfrak{N}$$

и, во-вторых,

$$(XE \in \mathfrak{N}) \rightarrow X = XE \in \mathfrak{N},$$

$$(YI \in \mathfrak{N},\ Y \neq E) \rightarrow Y \in \mathfrak{B}_\nu \rightarrow Y = YI \in \mathfrak{N}.$$

Так как полупростая система $\mathfrak{A}$ не имеет нетривиальных нормальных подсистем, то слагаемые $\mathfrak{B}_\nu$ не имеют единиц. Согласно 3.3, каждая $\mathfrak{B}_\nu$ есть неединичная линейная система с нулем, все элементы которой нульстепенны.

Предположим, что рассматриваемое разложение системы $\mathfrak{B}$ собственное, т. е. что количество слагаемых в разложении больше одного. Обозначим через $\mathfrak{Q}$ совокупность двух элементов $B_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$, $B_\beta \in \mathfrak{B}_\beta$ $(B_\alpha, B_\beta \neq O)$. Покажем, что $\mathfrak{Q}$ есть анти-идеал $\mathfrak{A}$. Действительно, $XB_\alpha \in \mathfrak{Q}$ означает, что $X \in \mathfrak{B}_\alpha$ и, следовательно, $XB_\alpha = B_\alpha$. Но в 2.2.5 мы показали, что это невозможно. Так как полупростая система не может иметь анти-идеалов, содержащих более одного элемента (3.2.2), то разложение $\mathfrak{B}$ должно быть не собственным. Итак, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\alpha$, т. е. $\mathfrak{B}$ есть линейная система с нулем, все элементы которой нульстепенны. Отсюда, очевидно, следует, что система $\mathfrak{A}$, получающаяся из $\mathfrak{B}$ путем внешнего присоединения единицы, есть также линейная система с нулем, причем все ее неединичные элементы нульстепенны.

4.3. ТЕОРЕМА. *Собственная взаимно-аннулирующая сумма линейных систем, обладающих единицей и нулем, каждый неединичный элемент которых нульстепенен, есть полупростая система, каждый элемент которой обладает частной единицей.*

Обратно, всякая разложимая полупростая система, каждый элемент которой обладает частной единицей, разлагается единственным образом на взаимно-аннулирующую сумму вышеуказанного типа.

Доказательство.— 1°. Рассмотрим взаимно-аннулирующую сумму

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \ldots,$$

в которой каждая система $\mathfrak{B}_\nu$ линейна и имеет единицу E_ν, причем все элементы $\mathfrak{B}_\nu$, отличные от E_ν, нульстепенны. Из 4.2 мы знаем, что все $\mathfrak{B}_\nu$ полупросты. Всякий элемент из $\mathfrak{A}$ принадлежит какому-нибудь $\mathfrak{B}_\nu$. Но для $B_\nu \in \mathfrak{B}_\nu$ имеет место $B_\nu E_\nu = B_\nu$, т. е. B_ν обладает частной единицей. Пусть $\mathfrak{K}$ есть некоторый нормальный комплекс $\mathfrak{A}$, состоящий более чем из одного элемента. Так как элементы $\mathfrak{K}$ обладают частными единицами, то $\mathfrak{K}$ не может быть анти-идеалом (3.2.2.). Тогда, согласно 3.2.3, $\mathfrak{K}$ или является идеалом $\mathfrak{A}$, или есть нормальный комплекс некоторой $\mathfrak{B}_\nu$. Но в последнем случае, благодаря полупростоте $\mathfrak{B}_\nu$, $\mathfrak{K}$ является идеалом $\mathfrak{B}_\nu$, а следовательно, и идеалом $\mathfrak{A}$. Следовательно, $\mathfrak{A}$ есть полупростая система.

2°. Пусть $\mathfrak{A}$ есть разложимая полупростая система, каждый элемент которой обладает частной единицей, и пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots$ есть разложение этой системы на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых слагаемых. Мы знаем (4.1), что такое разложение единственно, и что все $\mathfrak{B}_\nu$ полупросты. Выясним, что представляет собою произвольное слагаемое $\mathfrak{B}_\nu$ этой суммы. Очевидно, $\mathfrak{B}_\nu$ не есть группа, ибо $\mathfrak{B}_\nu$ обладает нулем. Так как каждый элемент системы $\mathfrak{B}_\nu$ обладает частной единицей, то не все элементы $\mathfrak{B}_\nu$ нульстепенны (2.2.6). Отсюда, по 3.3, следует, что неразложимая полупростая система $\mathfrak{B}_\nu$ обладает единицей. Следовательно, согласно 4.2, $\mathfrak{B}_\nu$ есть линейная система с нулем и единицей, все неединичные элементы которой нульстепенны.

4.4. ТЕОРЕМА. *Собственная взаимно-аннулирующая сумма линейнных систем $\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots$, где все элементы $\mathfrak{L}$ нульстепенны, а каждая система $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = \alpha, \beta, \ldots)$ обладает единицей, причем все неединичные*

элементы системы $\mathfrak{B}_\nu$ нульстепенны, есть полупростая система, среди элементов которой есть элементы, не имеющие частных единиц.

Обратно, всякая разложимая полупростая система, среди элементов которой есть элементы, не имеющие частных единиц, разлагается единственным образом на взаимно-аннулирующую сумму вышеуказанного типа.

Доказательство.—1°. Рассмотрим взаимно-аннулирующую сумму, указанную в первой части теоремы. Как известно (2.2.6), ненулевые элементы системы $\mathfrak{L}$ не имеют частных единиц. Покажем, что $\mathfrak{A}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{K}$ есть нормальный комплекс системы $\mathfrak{A}$, обладающий более чем одним элементом. Если $\mathfrak{K}$ принадлежит одному из слагаемых нашей взаимно-аннулирующей суммы, то он должен являться в ней идеалом, ибо все указанные слагаемые полупросты (3.3), (4.2). В этом случае $\mathfrak{K}$ есть идеал и самой системы $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{K}$ содержит элементы из нескольких различных слагаемых нашей взаимно-аннулирующей суммы, то среди элементов $\mathfrak{K}$ есть элементы, обладающие частными единицами, т. е. $\mathfrak{K}$ не является анти-идеалом (3.2.2). Следовательно (3.2.3), $\mathfrak{K}$ есть идеал системы $\mathfrak{A}$.

2°. Пусть $\mathfrak{A}$ есть разложимая полупростая система, среди элементов которой есть элементы, не имеющие частных единиц. Рассмотрим разложение $\mathfrak{A}$ на взаимно-аннулирующую сумму неразложимых полупростых систем (4.1). Не все слагаемые данной суммы обладают единицей, ибо в таком случае каждый элемент из $\mathfrak{A}$ имел бы частную единицу. Предположим, что имеется хотя бы два слагаемых $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$, не обладающих каждое единицей. Согласно (3.3), $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ являются линейными системами с нульстепенными элементами. Пусть $X \in \mathfrak{L}$, $Y \in \mathfrak{L}'$ $(X, Y \neq O)$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{K}$ — совокупность двух элементов X и Y является анти-идеалом $\mathfrak{A}$. Действительно, $XZ = Y$ невозможно, ибо X и Y принадлежат различным слагаемым взаимно-аннулирующей суммы. Также невозможно и $XZ = X$ (2.2.6). Но система $\mathfrak{A}$ полупроста и не может иметь анти-идеалов (3.2.2). Итак, разложение $\mathfrak{A}$ имеет вид:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{B}_\alpha \oplus \mathfrak{B}_\beta \oplus \cdots,$$

где $\mathfrak{L}$ линейна и не имеет единицы, откуда следует, что все ее элементы нульстепенны (3.3). Каждая из полупростых систем $\mathfrak{B}_\nu$ имеет единицу, т. е., согласно 4.2, является линейной системой, все неединичные элементы которой нульстепенны.

§ 5. Классификация полупростых систем

5.1. Совокупность теорем 3.3, 4.2, 4.3, 4.4 дает полную классификацию полупростых систем. Каждая полупростая система принадлежит одному и только одному из типов, рассмотренных в этих теоремах. Внутри каждого типа системы классифицируются естественным образом, благодаря единственности разложения систем на взаимно-аннулирующие суммы неразложимых слагаемых.

Для конечных полупростых систем, используя 2.2, можно без труда дать таблицу, указывающую количество различных неизоморфных между собою полупростых систем любого конечного порядка. Мы начинаем

нашу таблицу с систем порядка 3, ибо четыре системы порядков 1 и 2 простые и уже были рассмотрены нами раньше [([1]); 1.13].

Типы систем	Количество систем данного типа порядка n ($n > 2$)
1. Полупростые системы, являющиеся группами	1 (если n — простое число), 0 (если n — непростое число)
2. Полупростые системы с единицей, не являющиеся группами	1
3. Полупростые неразложимые системы без единицы	1
4. Разложимые полупростые системы, у которых каждый элемент обладает частной единицей	$f(n-1)-1$
5. Разложимые полупростые системы, у которых не каждый элемент обладает частной единицей	$\sum_{k=1}^{n-2} f(k)$

Здесь через $f(m)$ обозначено количество различных разбиений натурального числа m на различные суммы натуральных чисел:

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
$f(m)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	40...

Поступило
27. IV. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ляпин Е. С., Простые коммутативные ассоциативные системы, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 275—282.

[2] Rees D., On semi-groups, Proc. Combridge Phil. Soc. 36 (1940), 387—400.

[3] Ляпин Е. С., Ядра гомоморфизмов ассоциативных систем, Матем. сборник, 20 (62) : 3 (1947), 497—515.

[4] Ляпин Е. С., Нормальные комплексы ассоциативных систем, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 179—192.

[5] Klein-Barmen F., Über gewisse Halbverbände und kommutative Semigruppen, Math. Zeitschrift, 48 (1942), 275—288, 715—734.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 381—404

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЦИКЛИЧЕСКИ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

В статье излагается теория экстремальных свойств циклически монотонных функций, основные результаты которой были опубликованы автором без доказательств в 1928 г.

Введение. Согласно определению, данному мною в статье ([1]), непрерывная функция $f(x)$ (имеющая непрерывные производные всех порядков) называется *циклически монотонной* ($f(x) \in Ц(a, b)$) на данном отрезке (a, b), если $f(x)$ и ни одна из ее производных $f^{(i)}(x)$ не меняет знака на всём отрезке (a, b), причем для всех $i \geqslant 0$

$$f^{(i)}(x) f^{(i+2)}(x) \leqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{A}$$

Геометрически это означает, что все производные $f^{(i)}(x)$ представляются монотонными линиями, вогнутыми в сторону отрезка (a, b). Если $a=0$, $b=1$, то мы обычно будем писать просто $f(x) \in Ц$ вместо $f(x) \in Ц(0,1)$.

В статье ([1]) для функций $f(1) \in Ц(a, b)$ доказано (как следствие из соответствующего общего свойства регулярно-монотонных функций) неравенство

$$\left| f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leqslant \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \left(\frac{2}{b-a}\right)^k,$$

откуда следует, что всякая функция $f(x) \in Ц(a, b)$ есть целая функция конечной степени p, где

$$p \leqslant \frac{2}{b-a}. \tag{1}$$

В моем докладе ([2]), сделанном в 1928 г. на Международном конгрессе математиков в Болонье, формулировано несколько теорем, из которых между прочим вытекает (не допускающее усовершенствования) уточнение неравенства (1), а именно:

$$p \leqslant \frac{\pi}{2(b-a)}.$$

Целью настоящей статьи является доказательство, уточнение и некоторое развитие этих результатов моего болонского доклада, а также тех связанных с ними, высказанных там же теорем, которые относятся к функциям класса $\mathfrak{N}(a, b)$, обладающих свойством, что $f(x) \in \mathfrak{N}(a, b)$, если она бесконечно дифференцируема на отрезке (a, b) и обращается

в нуль по крайней мере в одной точке этого отрезка, как и все ее производные.

§ 1. Из определения функций $f(x) \in Ц(a, b)$ видно, что если для некоторого $i = n - 1$ существует внутренняя точка $x = x_0$ $(a < x_0 < b)$, где неравенство (A) обращается в равенство $(f^{(n-1)}(x_0) f^{(n+1)}(x_0) = 0)$, то $f^{(n+1)}(x) = 0$ тождественно, т. е. $f(x)$ является многочленом степени $\leqslant n$ (на отрезке (a, b)). Действительно, если $f^{(n-1)}(x) \geqslant 0$, то функция $y(x) = f^{(n-1)}(x)$, для которой $y''(x)$ знакопостоянна и монотонна, не может обращаться в нуль во внутренней точке, не будучи тождественно равной нулю.

Образцом циклически монотонных функций $(f(x) \in Ц)$, отличных от многочленов, являются тригонометрические функции* $f(x) = \sin\frac{\pi}{2}x$ и $\varphi(x) = \cos\frac{\pi}{2}x$. Для первой из них

$$f(0) = f^{(2k)}(0) = f^{(2k+1)}(1) = 0,$$

для второй

$$\varphi(1) = \varphi^{(2k)}(1) = \varphi^{(2k+1)}(0) = 0$$

при всех целых $k \geqslant 0$. Докажем, что и, наоборот, справедлива

ЛЕММА 1. *Если функция $f(x) \in Ц$ и, так же как и все ее производные, имеет корень на отрезке $(0,1)$, то она совпадает (на отрезке $(0,1)$) с одной из функций: $B\sin\frac{\pi}{2}x$, либо $B\cos\frac{\pi}{2}x$ (B — произвольная постоянная).*

Действительно, учитывая, что $f(x)$ не может быть многочленом (так как всякий многочлен характеризуется тем, что одна из его последовательных производных есть отличная от нуля постоянная), заключаем, что уравнение $f^{(n)}(x) = 0$ для каждого $n \geqslant 0$ имеет только один корень, который равен 0 или 1. Предположим сначала, что $f(x) f'(x) > 0$ (при $0 < x < 1$); в таком случае, вследствие (A),

$$f'(x) f''(x) < 0, \quad f''(x) f'''(x) > 0$$

и вообще

$$f^{(2k)}(x) f^{(2k+1)}(x) > 0 \text{ и } f^{(2k+1)}(x) f^{(2k+2)}(x) < 0$$

при $0 < x < 1$ и $\alpha_{2k} = 0$, $\alpha_{2k+1} = 1$, где α_n — корень $f^{(n)}(x)$. Пусть $f(1) = B$; я говорю, что

$$f(x) = B\sin\frac{\pi}{2}x.$$

---

* Все циклически монотонные функции принадлежат одному из четырех типов регулярной монотонности [1], которые вполне определяются знаками $(f(x), f'(x))$ на отрезке $(0,1)$:

$$\sin\frac{\pi}{2}x\,(+,+); \quad -\sin\frac{\pi}{2}x\,(-,-); \quad \cos\frac{\pi}{2}x\,(+,-); \quad -\cos\frac{\pi}{2}x\,(-,+).$$

В самом деле, из того что $f^{(2k)}(0)=0$ $(0\leqslant k)$ следует, что целая функция конечной степени $f^*(x)$, с которой $f(x)$ совпадает на отрезке (0,1), есть нечетная функция, т. е.

$$f^*(-x)=-f^*(x), \tag{2}$$

а вследствие $f^{(2k+1)}(1)=0$ имеем также

$$f^*(1+x)=f^*(1-x). \tag{3}$$

Из (2) и (3) заключаем, что $f^*(x)$ есть периодическая функция с периодом 4, так как

$$f^*(x-2)=-f^*(2-x)=-f^*(x)=f^*(-x)=f^*(x+2)$$

Следовательно,

$$f^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{2}x=a_1\sin\frac{\pi}{2}x,$$

так как степень $f^*(x)$, вследствие (1), не выше $2<\pi$. Поэтому

$$f(x)=f^*(x)=B\sin\frac{\pi}{2}x \quad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{4}$$

Аналогичным образом в случае $f(x)f'(x)<0$ найдем, что $f(x)=$ $=B\cos\frac{\pi}{2}x$, где $B=f(0)$.

Следствие 1. *Целая функция $f(x)$ степени $p<\pi$, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими производными четного порядка при $x=0$, между тем как ее производные всех нечетных порядков имеют корнем $x=1$, равна $B\sin\frac{\pi}{2}x$.*

Примечание. Если функция (бесконечно непрерывно дифференцируемая) удовлетворяет в промежутке (a, b) условию (А), не принадлежа на всем отрезке (a, b) к $Ц(a, b)$, т. е., если существует точка $x=x_0$ $(a<x_0<b)$, где хоть одна производная $f^{(i)}(x)$, обращаясь в нуль, меняет знак, то, в силу (А), тем же свойством будут обладать производные $f^{(j)}(x)$ для всех неотрицательных $j\equiv i \pmod 2$. Поэтому если есть еще одна точка $x_1 (a<x_1<b)$, где $f^{(k)}(x_1)$ (пусть x_1 — такая ближайшая точка справа от x_0) меняет знак, то непременно $k-i\equiv 1 \pmod 2$ для всех $k\geqslant 0$; следовательно, $f(x)\in Ц(x_0, x_1)$ и удовлетворяет условиям леммы 1, так что

$$f(x)=B\sin\frac{\pi(x-x_1)}{2(x_1-x_0)} \quad \text{или} \quad B\cos\frac{\pi(x-x_1)}{2(x_1-x_0)}$$

и имеет период $T=4(x_1-x_0)$. При этом на всем отрезке (a, b) функция $f(x)$ сохраняет тот же вид (отсюда следует, в частности, что, кроме x_0, второй точки x_1 не может быть, если $f(x)$ — многочлен).

Принимая во внимание, что на полуоси функция $f(x)$ не может быть циклически монотонной (если не считать линейной функции $ax+b$, для которой условие (А) вырождается в тривиальное равенство), заключаем, что функция $f(x)$, удовлетворяющая на полуоси условию (А), имеет по крайней мере два нуля, откуда вытекает любопытное

Следствие. *Единственной* функцией, удовлетворяющей условию* (A) *на полуоси (тем более на всей оси), является тригонометрическая функция* $B\sin(cx+a)$ *при любых значениях постоянных* B, c, a.

Например, функция $f(x)=\sin x$ однозначно определена условием (A) на $(-\infty, +\infty)$, тем, что в промежутке $(0,\pi)$ она не меняет знака, обращаясь в нуль в его концах, и тем, что максимум ее в этом промежутке равен единице.

§ 2. Среди многочленов $P_m(x)\in Ц$ степени m особо важную роль играют многочлены, которые характеризуются тем свойством, что их последовательные производные обращаются в нуль в концах промежутка (0,1). В таком случае, как легко видеть, из условия (A) вытекает, что если $P_m^{(k)}(\alpha_k)=0$ для всех $k<m$, то возможны только два случая:

1) $\alpha_k=0$ при $k\equiv 0 \pmod 2$; $\alpha_k=1$ при $k\equiv 1 \pmod 2$, либо

2) $\alpha_k=1$ при $k\equiv 0 \pmod 2$; $\alpha_k=0$ при $k\equiv 1 \pmod 2$.

Эти многочлены с точностью до линейного преобразования переменной совпадают с классическими многочленами, которые по другому поводу были введены Эйлером. Мы будем обозначать указанные выше многочлены через $S_m(x)$ в первом случае, т. е. при $\alpha_{2k}=0$, и через $C_m(x)$, когда $\alpha_{2k+1}=0$, и будем называть их для краткости**, соответственно, циклически монотонными S-многочленами и C-многочленами; при этом нормируем их дополнительным условием, что

$$S_m^{(m)}(x)=C_m^{(m)}(x)=1, \tag{5}$$

т. е. вообще они относятся к классу многочленов $P_m(x)\in Ц$ вида

$$P_m(x)=\frac{x^m}{m!}+p_1x^{m-1}+\cdots+p_m.$$

Таким образом, коэффициенты $p_1,\ldots,p_m$ в случае $S_m(x)$ и $C_m(x)$ определяются соответственно требованиями

$$\begin{gathered} S_m(0)=S_m^{(2k)}(0)=S_m^{(2k\pm1)}(1)=0, \\ C_m(1)=C_m^{(2k)}(1)=C_m^{(2k\pm1)}(0)=0 \end{gathered} \tag{6}$$

для производных всех порядков, меньших чем m. Следовательно,

$$\begin{gathered} S_m(x)=\int\limits_0^x dx_1\int\limits_1^{x_1}dx_2\cdots\int\limits_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}}dx_m \quad \left(\alpha_{m-1}=\begin{cases}0, & \text{при } m \text{ нечетном}\\ 1, & \text{при } m \text{ четном}\end{cases}\right), \\ C_m(x)=(-1)^m S_m(1-x)=\int\limits_1^x dx_1\int\limits_0^{x_1}dx_2\cdots\int\limits_{\bar\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}}dx_m \quad (\bar\alpha_{m-1}+\alpha_{m-1}=1). \end{gathered} \tag{7}$$

---

* Функция $ax+b$ при всяком данном x (и фиксированных a и b) есть предел $N\sin\frac{ax+b}{N}$ при $N\to\infty$.

** S-многочлены соответствуют тем же типам регулярной монотонности, что $\pm\sin\frac{\pi}{2}x$, а C-многочлены соответствуют $\pm\cos\frac{\pi}{2}x$ на (0,1).

Из (7) следует, что

$$S'_m(x) = C_{m-1}(x), \qquad C'_m(x) = S_{m-1}(x). \tag{8}$$

Поэтому вообще

$$\begin{aligned} S_m^{(2k)}(x) &= S_{m-2k}(x), & C_m^{(2k)}(x) &= C_{m-2k}(x), \\ S_m^{(2k+1)}(x) &= C_{m-2k-1}(x), & C_m^{(2k+1)}(x) &= S_{m-2k-1}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда видно, что в случае нечетного $m = 2k+1$

$$S_m(x) = S_{2k+1}(x)$$

будет нечетной функцией от x, которую можем записать в виде

$$S_m(x) = \frac{x^m}{m!} + \frac{E_2^{(m)} x^{m-2}}{2!\,(m-2)!} + \cdots + \frac{E_{m-3}^{(m)} x^3}{3!\,(m-3)!} + \frac{E_{m-1}^{(m)} x}{(m-1)!},$$

а так как

$$S_{m-2}(x) = S''_m(x) = \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{E_2^{(m)} x^{m-4}}{2!\,(m-4)!} + \cdots + \frac{E_{m-3}^{(m)} x}{(m-3)!},$$

то отсюда заключаем, что числа $E_{2h}^{(m)}$ при всех $2h < m$ не зависят от верхнего индекса m; поэтому, отбрасывая верхний индекс, имеем для всех нечетных $m = 2k+1$

$$S_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{E_2 x^{2k-1}}{2!\,(2k-1)!} + \cdots + \frac{E_{2k} x}{(2k)!} \tag{10}$$

и, вследствие (8),

$$C_{2k}(x) = S'_{2k+1}(x) = \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{E_2 x^{2k-2}}{2!\,(2k-2)!} + \cdots + \frac{E_{2k}}{(2k)!}. \tag{11}$$

Полагая $E_{2s+1} = 0$ для всех нечетных индексов, можно записать символически равенства (10) и (11) в виде

$$S_{2k+1}(x) = \frac{1}{(2k+1)!}\left[\frac{(x+E)_{2k+1} + (x-E)_{2k+1}}{2}\right] = \frac{1}{(2k+1)!}(x+E)_{2k+1}, \tag{10 bis}$$

$$C_{2k}(x) = \frac{1}{(2k)!}\left[\frac{(x+E)_{2k} + (x-E)_{2k}}{2}\right] = \frac{1}{(2k)!}(x+E)_{2k}, \tag{11 bis}$$

заменяя везде в формуле бинома Ньютона степени E^s числами E_s. Принимая во внимание, что $C_{2k}(1) = 0$, получаем символические равенства

$$(1+E)_{2l} = 0 \tag{12}$$

для последовательного определения целых чисел E_{2s} (все числа $E_{2s+1} = 0$). В частности,

$$1 + E_2 = 0,\ 1 + 6E_2 + E_4 = 0,\ 1 + 15E_2 + 15E_4 + E_6 = 0, \ldots,$$

откуда

$$E_2 = -1,\ E_4 = 5,\ E_6 = -61, \ldots .$$

Для дальнейшего особый интерес представляют величины

$$L_m = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_m(x)| = |S_m(1)| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |C_m(x)| = |C_m(0)|. \tag{13}$$

Из равенства (11) и из того (см. (7)), что $C_{2k}(x) = S_{2k}(1-x)$, получаем

$$C_{2k}(0) = S_{2k}(1) = \frac{E_{2k}}{(2k)!}, \tag{14}$$

так что

$$L_{2k} = \frac{|E_{2k}|}{(2k)!}. \tag{15}$$

Кроме того, учитывая, что $C_{2k}^{(2k)}(x) = 1$, из условия (A) заключаем, что $C_{2k}(x)(-1)^k \geqslant 0$, поэтому вообще

$$(-1)^k E_{2k} > 0. \tag{16}$$

Из (7) и (10 bis) получаем

$$S_{2k+1}(1) = -C_{2k+1}(0) = \frac{(1+E)_{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{E^*_{2k+1}}{(2k+1)!}. \tag{17}$$

Целые числа $E^*_m = (1+E)_m$ назовем коэффициентами Эйлера второго рода*. Так как $S_1(x) = x \geqslant 0$, то вообще, вследствие (A),

$$E^*_{2k+1}(-1)^k > 0; \tag{18}$$

с другой стороны, так как $C_{2k}(1) = 0$, то

$$E^*_{2k} = (1+E)_{2k} = 0 \quad (k > 0, \quad E^*_0 = 1). \tag{19}$$

Учитывая (19), символическое равенство (17), определяющее E^*_{2k+1} можно также записать в немного более простой для вычислений форме:

$$E^*_{2k+1} = (1+E)(1+E)_{2k} = E(1+E)_{2k}. \tag{17 bis}$$

Отсюда

$$E^*_1 = 1, \ E^*_3 = 2E_2 = -2, E^*_5 = 4E_2 + 4E_4 = 16,$$

$$E^*_7 = 6E_2 + 20E_4 + 6E_6 = -272, \ldots .$$

Из (17) получаем значение

$$L_{2k+1} = \frac{|E^*_{2k+1}|}{(2k+1)!}. \tag{20}$$

Из (11) следует также

$$S_{2k}(x) = C_{2k}(1-x) = \frac{(1-x+E)_k}{2k!} = \frac{(E^*-x)_{2k}}{2k!} = \frac{(x-E^*)_{2k}}{2k!} =$$

$$= \frac{x^{2k}}{2k!} - \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} - \frac{E^*_3 x^{2k-3}}{3!(2k-3)!} - \ldots - \frac{E^*_{2k-1}x}{(2k-1)!};$$

дифференцируя, получаем

$$C_{2k-1}(x) = \frac{(x-E^*)_{2k-1}}{(2k-1)!} = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} - \frac{x^{2k-2}}{(2k-2)!} - \frac{E^*_3 x^{2k-4}}{3!(2k-4)!} - \ldots - \frac{E^*_{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

* Эти числа, как видно из формул (32), связаны простыми равенствами с числами B_{2k} Бернулли:

$$E^*_{2k-1} = \frac{B_{2k}(2^{4k} - 2^{2k})}{2k}.$$

Таким образом,

$$C_{2k-1}(x)=\frac{(x-E^*)_{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad C_{2k}(x)=\frac{(x-E)_{2k}}{2k!},$$
$$S_{2k-1}(x)=\frac{(x-E)_{2k-1}}{(2k-1)!}, \quad S_{2k}(x)=\frac{(x-E^*)_{2k}}{2k!}. \tag{21}$$

Замечая, что при любом $h<2k$

$$\frac{1}{2}[C_{2k}^{(h)}(1)+C_{2k}^{(h)}(-1)]=0,$$

так как $C_{2k}^{(h)}(x)$ есть функция, нечетная для h нечетного и четная для h четного, и в последнем случае $C_{2k}^{(h)}(1)=0$, согласно (6), заключаем, что

$$\frac{1}{2}[C_{2k}(x+1)+C_{2k}(x-1)]=\frac{x^{2k}}{2k!}. \tag{22}$$

Дифференцируя (22), получим

$$\frac{1}{2}[S_{2k-1}(x+1)+S_{2k-1}(x-1)]=\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{23}$$

Вспоминая далее, что $C_{2k}(x)=S_{2k}(1-x)$, из (22) получим

$$\frac{1}{2}[S_{2k}(-x)+S_{2k}(2-x)]=\frac{1}{2}[S_{2k}(x)+S_{2k}(x+2)]=\frac{x^{2k}}{2k!} \tag{24}$$

и, дифференцируя (24), найдем

$$\frac{1}{2}[C_{2k-1}(x)+C_{2k-1}(x+2)]=\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{25}$$

§ 3. Представим многочлены $S_m(x)$ и $C_m(x)$ в промежутке $(0,1)$ рядами Фурье с периодом $T=4$ вида

$$S_m(x)=\sum_{h=0}^{\infty} b_{h,m}\sin\frac{\pi}{2}(2h+1)x,$$
$$C_m(x)=(-1)^m S_m(1-x)=(-1)^m\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h b_{h,m}\cos\frac{\pi}{2}(2h+1)x \tag{26}$$
$$(0\leqslant x\leqslant 1).$$

Принимая во внимание, что первая из периодических функций

$$S_m^*(x)=\sum_{h=0}^{\infty} b_{h,m}\sin\frac{\pi}{2}(2h+1)x,$$
$$(-\infty<x<\infty) \tag{27}$$
$$C_m^*(x)=(-1)^m\sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h\cos\frac{\pi}{2}(2h+1)x,$$

нечетная относительно $x=0$ и четная относительно $x=1$, а вторая, $C_m^*(x)$, наоборот, является четной относительно $x=0$ и нечетной относи-

сительно $x=1$, отметим, что равенства (26) применимы к многочленам $S_m(x)$ и $C_m(x)$ в несколько бо́льших промежутках, а именно:

$$S_{2k-1}(x)=S^*_{2k-1}(x),\quad C_{2k}(x)=C^*_{2k}(x)\quad (-1)\leqslant x\leqslant 1)$$

и (28)

$$S_{2k}(x)=S^*_{2k}(x),\quad C_{2k-1}(x)=C^*_{2k-1}(x)\quad (0\leqslant x\leqslant 2).$$

Таким образом,

$$b_{h,\,m}=2\int_0^1 S_m(x)\sin\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x\,dx,$$

в частности,

$$b_{h,\,0}=2\int_0^1 \sin\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x\,dx=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2h+1},$$

так что

$$S^*_0(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x}{2h+1}. \tag{29}$$

Последовательно интегрируя (29) и учитывая, что $C_{2k-1}(1)=S_{2k}(0)=0$, получим

$$\left.\begin{aligned} C_{2k-1}(x)&=2(-1)^k\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x}{(2h+1)^{2k}},\\ S_{2k}(x)&=2(-1)^k\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x}{(2h+1)^{2k+1}}\end{aligned}\right\}\ (0\leqslant x\leqslant 2) \tag{30}$$

и аналогично

$$\left.\begin{aligned} C_{2k}(x)&=2(-1)^k\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\cos\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x}{(2h+1)^{2k+1}},\\ S_{2k-1}(x)&=2(-1)^{k-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h\sin\frac{\pi}{2}(2h+1)\,x}{(2h+1)_{2k}}.\end{aligned}\right\}\ (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{31}$$

Таким образом, наибольшие по модулю значения $C_m(x)$ и $S_m(x)$ равны $(k\geqslant 0)$

$$\begin{aligned} S_{2k}(1)&=C_{2k}(0)=\frac{E_{2k}}{2k!}=2(-1)^k\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)^{2k+1}},\\ S_{2k+1}(1)&=-C_{2k+1}(0)=\frac{E^*_{2k+1}}{(2k+1)!}=2(-1)^k\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+2}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^{2k+2}}.\end{aligned} \tag{32}$$

В частности,

$$S_0 = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{2h+1}, \quad S_1(1) = 1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^2},$$

$$S_2(1) = -\frac{1}{2} = -\frac{16}{\pi^3}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)^3},$$

$$S_3(1) = \frac{E_3^*}{3!} = -\frac{1}{3} = -\frac{32}{\pi^4}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^4}$$

и т. д.

Полагая

$$H_{2k} = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{(-1)^h}{(2h+1)^{2k+1}}, \quad H_{2k+1} = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^{2k+2}}, \tag{33}$$

имеем для всех $m \geqslant 0$

$$L_m = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1} H_m. \tag{34}$$

Следовательно, учитывая, что $\lim\limits_{m=\infty} H_m = 1$, получаем для всех $m \to \infty$

$$L_m = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |S_m(x)| \sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1}. \tag{35}$$

При этом для нечетного $m = 2k+1 \quad (k > 0)$

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1}\left(1 + \frac{1}{3^{m+1}}\right) < L_m < 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1}\left(1 + \frac{2}{3^{m+1}}\right), \tag{36}$$

так как *

$$1 + \frac{1}{3^{2k+2}} < H_{2k+1} < 1 + \frac{2}{3^{2k+2}}.$$

Для четных $m = 2k \geqslant 0$ имеем

$$2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1}\left(1 - \frac{1}{3^{m+1}}\right) < L_m < 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{m+1}, \tag{36bis}$$

так как

$$1 - \frac{1}{3^{2k+1}} < H_{2k} < 1.$$

---

* Левая часть неравенства (36) очевидна для всех нечетных m; правая часть равнозначна неравенству

$$\frac{1}{3^{2k+2}} > \sum_{h=2}^{\infty}\frac{1}{(2h+1)^{2k+2}},$$

которое справедливо для всех $k \geqslant 1$, если оно верно для $k = 1$; но для $k = 1$ непосредственным вычислением проверяем, что

$$\pi^4 < 96\left(1 + \frac{2}{81}\right) = 98\frac{10}{27}.$$

Из равенств (33) видим также *, что

$$\frac{\pi}{4} < H_0 < H_2 < \cdots < H_{2k} < \cdots < 1 < \cdots < H_{2k+1} < \cdots < H_1 = \frac{\pi^2}{8}. \quad (37)$$

Следствие 2. *При всяком данном значении числа* x

$$\lim_{m=\infty} \frac{S_m(x)}{S_m(1)} = \sin\frac{\pi}{2}x, \quad \lim_{m=\infty} \frac{C_m(x)}{C_m(0)} = \cos\frac{\pi}{2}x. \quad (38)$$

Высказанное утверждение непосредственно вытекает из равенств (31) и (30), соответственно, для промежутков $(-1, +1)$ и $(0,2)$; но легко убедиться, что указанные предельные равенства справедливы при любом конечном действительном или комплексном значении x. Оба равенства (38) между собой равнозначны; для определенности, рассмотрим второе для четного $m = 2k$. Тогда из (11bis) находим, что

$$\lim_{k=\infty} \frac{C_{2k}(x)}{C_{2k}(0)} = \lim_{k=\infty} \frac{(E+x)_{2k}}{E_{2k}} = 1 + \lim_{k=\infty} \frac{2k!}{E_{2k}} \sum_{s=1}^{k} \frac{E_{2k-2s}}{(2k-2s)!} \cdot \frac{x^{2s}}{2s!}.$$

Поэтому из (32) следует, что

$$\lim_{k=\infty} \frac{C_{2k}(x)}{C_{2k}(0)} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi x}{2}\right)^4 - \cdots = \cos\frac{\pi}{2}x,$$

т. е. предельное равенство (38) справедливо для всех x.

§ 4. Переходим к выводу основных экстремальных свойств функций $f(x) \in Ц$. Для этого нам полезно будет немного расширить этот класс, назвавши функцию $f(x) \in Ц_n$ циклически монотонной порядка $n > 1$, если $f(x)$ имеет на отрезке 01 знакопостоянные производные всех порядков $\leqslant n$, удовлетворяющие неравенству (A) (при $0 \leqslant i \leqslant n-2$).

ЛЕММА 2. *Если***

$$f^{(m)}(x) = F(x) \quad (m > 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1), \quad (39)$$

---

* Неравенства (37) для H_{2k+1} очевидны; что касается неравенств для H_{2k}, где

$$H_{2k} = 1 - \left[\left(\frac{1}{3^{2k+1}} - \frac{1}{5^{2k+1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(2h+1)^{2k+1}} - \frac{1}{(2h+3)^{2k+1}}\right) + \cdots\right],$$

то достаточно заметить, что $\frac{1}{(2h+1)^x} - \frac{1}{(2h+3)^x}$ при $h \geqslant 1$ и $x \geqslant 1$ есть убывающая функция от x, так как ее производная по x равна

$$-\frac{\lg(2h+1)}{(2h+1)^x} + \frac{\lg(2h+3)}{(2h+3)^x} < 0$$

(вследствие того, что $\frac{\lg N}{N}$ убывает с возрастанием $N \geqslant 3$).

** т. е. $f^{(m-1)}(x) = \int^{x} F(x)\,dx$.

где $F(x)$ — данная знакопостоянная функция, то функция $f(x)$, наименее уклоняющаяся от нуля на отрезке 01 среди функций $f(x) \in Ц_m$, обращается в нуль, так же как и ее производные $f^{(k)}(x)$ $(0 \leqslant k < m)$, в одном из концов α_k отрезка 01 (при этом, вследствие циклической монотонности, концы α_k последовательно чередуются).

Положим для определенности, что $f(x) \geqslant 0$ и что наибольшее значение $f(x)$ достигается при $x = 1$, т. е. $f'(x) \geqslant 0$; тогда, вследствие условия (A), имеем вообще

$$f^{(i)}(x) \leqslant 0 \text{ для } i = 4n + 2 \quad \text{или } i = 4n + 3$$

и

$$f^{(i)}(x) \geqslant 0 \text{ для } i = 4n \qquad \text{или } i = 4n + 1$$

при всех $i \leqslant m$; возможно малым нужно сделать $f(1)$.

Очевидно, что $f(0) = 0$, так как если $f(0) = c > 0$, то функция $f(x) - \alpha \in Ц_m$, где $0 < \alpha < c$, удовлетворяя тому же требованию (39), уклоняется от нуля меньше, чем $f(x)$. Остается доказать невозможность предположения, что $f^{(k)}(x)$ будет первой из последовательных производных $(k < m)$, которая не равна нулю в конце α_k, так что для всех $i < k$ имеем, вследствие вышесказанного, $f^{(i)}(0) = 0$ $(\alpha_i = 0$ при i четном) и $f^{(i)}(1) = 0$ $(\alpha_i = 1$ при i нечетном). Для этого строим циклически монотонный многочлен $P_k(x) = \pm S_k(x)$ степени k, который вполне определяется условиями, что $P_k(0) = P_k^{(i)}(\alpha_i) = 0$ при всех $i < k$ и $P_k^{(k)}(x) = \pm 1$, где $+1$ берется при $k \equiv 0$ или 1, а -1 соответствует $k \equiv 2$, $k \equiv 3$ по $\operatorname{mod} 4$. Таким образом, $P_k(x) > 0$ при $0 < x \leqslant 1$, и функция

$$f_1(x) = f(x) - \alpha P_k(x),$$

удовлетворяющая (39), будет при достаточно малом $\alpha > 0$ циклически монотонной порядка m, так как

$$f_1^{(i)}(x) f^{(i)}(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant m),$$

причем

$$0 < f_1(1) = f(1) - \alpha P_k(1) < f(1),$$

так что, вопреки предположению, мы получили бы, что функция $f(x)$ не является наименее уклоняющейся от нуля.

Из леммы 2 непосредственно вытекает (если положить $F(x) = \pm 1$) алгебраическая экстремальная

ТЕОРЕМА 1. *Из всех многочленов степени m, циклически монотонных на отрезке 01, вида*

$$P(x) = \pm \frac{x^m}{m!} + p_1 x^{m-1} + \cdots + p_m \tag{40}$$

наименее уклоняются от нуля на 01 многочлены $\pm S_m(x)$ и $\pm C_m(x)$, причем это наименьшее уклонение равно величине

$$L_m = |S_m(1)| = |C_m(0)| \tag{32 bis}$$

(определенной формулами (32)).

Следствие 3. *Среди циклически монотонных многочленов* (40) *многочлены* $\pm S_m(x)$ *и* $\pm C_m(x)$ *обладают также наименее уклоняющимися от нуля производными любого порядка* $i < m$ *и это наименьшее уклонение равно* L_{m-i}.

§ 5. Из леммы 2 получаем также

Следствие 4. *Если* $f(x) \in Ц_n$ $f_1(x) \in Ц_n$ *и для некоторого* $m \leqslant n$

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant |f_1^{(m)}(x)| \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

то наименьшее уклонение функций $f(x)$ *не превышает наименьшего уклонения функций* $f_1(x)$.

Действительно, не нарушая общности, можем положить $f^{(m)}(x) \geqslant 0$, $f_1^{(m)}(x) \geqslant 0$, так что

$$f_1^{(m)}(x) = f^{(m)}(x) + \varphi^{(m)}(x),$$

где $\varphi^{(m)}(x) \geqslant 0$. Но, если $f(x)$ есть наименее уклоняющаяся функция, то

$$f(x) = \int\limits_{\alpha_0}^{x} dx_1 \cdots \int\limits_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}} f^{(m)}(x_m)\, dx_m = \int\limits_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}}^{x} f^{(m)}(x)\,(dx)^m$$

и так как знак $\varphi(x) = \int\limits_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}}^{x} \varphi^{(m)}(x)\,(dx)^m$ (как и ее производных) тот же, что и знак $f(x)$ (и ее соответственных производных), то

$$f_1(x) = \int\limits_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}}^{x} [f^{(m)}(x) + \varphi^{(m)}(x)]\,(dx)^m \in Ц_m, \quad |f_1(x)| \geqslant |f(x)|.$$

Поэтому справедливо также

Следствие 5. *Из всех функций* $f(x) \in Ц$, *удовлетворяющих для некоторого* $m > 0$ *условию*

$$|f^{(m)}(x)| \geqslant 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{41}$$

наименее уклоняются от нуля на 01 *многочлены Эйлера* $\pm S_m(x)$ *и* $\pm C_m(x)$, *так что для всех этих функций*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \geqslant L_{2k} = \frac{|E_{2k}|}{2k!} \quad \text{при } m = 2k,$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \geqslant L_{2k+1} = \frac{E^*_{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{при } m = 2k+1. \tag{42}$$

Отсюда получим важное

Следствие 6. *Если* $f(x) \in Ц$ *и*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| = N_m,$$

то

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \geqslant L_{m+1} N_m.$$

В самом деле, учитывая, что максимум $|f^{(m)}(x)|$ достигается в конце отрезка 01, положим для определенности, что $N = f^{(m)}(1) > 0$; тогда

вогнутость линии $Y = f^{(m)}(x)$ направлена книзу и, каково бы ни было $f^{(m+1)}(x) \geqslant 0$, по лемме 2 максимум $|f(x)|$ будет наименьшим, если $f^{(m)}(0) = 0$. Остюда следует, что линия $Y = f^{(m)}(x)$ лежит не ниже прямой $Y = Nx$, проходящей через начало координат и точку $(1, N)$, совпадая с этой прямой, если $f^{(m+1)}(x) = N$ постоянна, так что, благодаря следствию 4, максимум $|f(x)|$ будет наименьшим, если $f^{(m+1)}(x) = N$, т. е. для $f(x) = NS_{n+1}(x)$.

Утверждение следствия 6 можно записать в виде неравенства

$$M = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| \geqslant L_{m+1} \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| = L_{m+1} N_m \quad (f(x) \in Ц),$$

которое равнозначно неравенству

$$N_m = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M}{L_{m+1}}. \tag{43}$$

Из неравенства (43) следует общая экстремальная

ТЕОРЕМА 2. *Всякая функция $f(x) \in Ц$ является на отрезке 01 целой функцией конечной степени $p \leqslant \frac{\pi}{2}$; при этом, если*

$$|f(x)| \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

то для любого нечетного $m = 2k + 1$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M}{L_{m+1}} = \frac{M(2k+2)!}{|E_{2k+2}|} \tag{44}$$

и для любого четного $m = 2k$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M}{L_{m+1}} = \frac{M(2k+1)!}{|E^*_{2k+1}|} \tag{44 bis}$$

и знак равенства фактически осуществляют функции

$$f(x) = \pm \frac{MS_{m+1}(x)}{L_{m+1}} \quad и \quad \varphi(x) = \pm \frac{MC_{m+1}(x)}{L_{m+1}}.$$

Действительно, неравенства (44) и (44 bis) являются воспроизведением неравенства (43) с выделением случаев m четного и m нечетного. Таким образом, принимая во внимание неравенства (36) и (36 bis), имеем для всех $m > 0$

$$|f^{(m)}(x)| < \frac{M}{1 - \frac{1}{3^{m+2}}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{\pi^2}{8} \sim M \left(\frac{\pi}{2}\right)^m \frac{\pi^2}{8} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{45}$$

откуда следует, что $f(x)$ — целая функция степени $p \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Следствие 7. *Всякая функция $f(x) \in Ц(a, b)$ есть целая функция конечной степени $p \leqslant \frac{\pi}{2b}$ (на отрезке $0, b$). В частности, $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ есть целая функция степени $p \leqslant 1$, и в этом случае при условии*

$$|f(x)| \leqslant M \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

имеем также для любого $m>0$ $\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$

$$|f^{(m)}(x)|\leqslant\frac{M}{L_{m+1}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^m=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{M}{H_{m+1}}\to\frac{\pi^2}{8}M. \tag{46}$$

В последнем случае верхняя грань $|f^{(m)}(x)|>M$ для всех $m>0$ и, согласно (37), приближается к своему пределу $M\frac{\pi^2}{8}$ по недостатку для четных m и по избытку для нечетных m. *Максимальные значения* $|f^{(m)}(x)|$ *при каждом* m *осуществляются различными фунциями* $M\dfrac{S_{m+1}\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{S_{m+1}(1)}$; *пределом же этих функций*, на основании следствия 2, *является тригонометрическая функция* $M\sin x$. При этом модули всех производных имеют один и тот же максимум, равный M.

§ 6. Из теоремы 2 без труда получается

ТЕОРЕМА 3. *Условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция* $f(x)$ *была целой функцией степени* p, *состоит в том, чтобы она могла быть представлена на любом отрезке длины* $d<\frac{\pi}{2p}$ *в виде разности двух циклически монотонных функций одинакового типа, но не могла быть представлена в виде такой разности на отрезке длины* $d_1>\frac{\pi}{2p}$.

Действительно, последнее утверждение вытекает непосредственно из следствия 7, согласно которому функция, циклически монотонная на отрезке длины d_1, должна быть степени $p_1\leqslant\frac{\pi}{2d_1}$. Для доказательства первого утверждения достаточно принять, что степень нашей функции $f(x)$ равна $p=1-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — некоторое фиксированное произвольно малое число, и представить ее как разность двух функций $G_1(x)$ и $G_2(x)$, циклически монотонных на отрезке $\left(\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$. Согласно определению степени, возможно указать такое число M_0, что при любых $k\geqslant 0$

$$|f^{(k)}(x)|<M_0\quad\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

После этого определим постоянную A так, чтобы иметь $A\sin\frac{\varepsilon}{2}\geqslant M_0$, и положим

$$G_1(x)=A\sin x.$$

В таком случае $G_1(x)$ будет циклически монотонной на отрезке $\left(\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$ и при любом $k\geqslant 0$

$$\min_{\frac{\varepsilon}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi-\varepsilon}{2}}|G_1^{(k)}(x)|=A\sin\frac{\varepsilon}{2}\geqslant M_0.$$

Поэтому

$$G_2(x)=G_1(x)-f(x)$$

будет циклически монотонной того же типа, что и $G_1(x)$ на отрезке $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi-\varepsilon}{2}\right)$, так как $G_1^{(k)}(x)\,G_2^{(k)}(x) \geqslant 0$ при всех $k \geqslant 0$, и, следовательно,

$$f(x) = G_1(x) - G_2(x) \tag{47}$$

представлена в требуемом виде.

Отсюда, в частности, вытекает

Следствие 8. *Для того чтобы функция $f(x)$ была представима при любых данных a, b в виде* (47), *где $G_1(x) \in Ц(a, b)$, $G_2(x) \in Ц(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была целой функцией нулевой степени.*

Среди требуемых представлений (47) целой функции $f(x)$ степени p особого внимания заслуживает то, которое вполне определяется значениями производных $f^{(k)}(x)$ всех порядков $k \geqslant 0$, взятых в концах отрезка (a, b) так, что *производные четных порядков даны в одном конце, а нечетных — в другом.* Для определенности положим $a = 0$, $b = 1$ и пусть, следовательно, $p < \frac{\pi}{2}$.

Составим формально бесконечный ряд по S-многочленам

$$F(x) = f(0) + f'(1)\,S_1(x) + \cdots + f^{(2k)}(0)\,S_{2k}(x) +$$

$$+ f^{(2k+1)}(1)\,S_{2k+1}(x) + \cdots = \sum_0^\infty f^{(m)}(\alpha_m)\,S_m(x), \tag{48}$$

где $\alpha_{2k} = 0, \alpha_{2k+1} = 1$.

Вследствие условия $p < \frac{\pi}{2}$, найдется такое значение $\theta < 1$ и соответствующая ему постоянная M_0, что

$$|f^{(m)}(x)| < M_0 \left(\frac{\pi\theta}{2}\right)^m \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{49}$$

откуда, принимая во внимание (35), заключаем, что ряд (48) абсолютно и равномерно сходится на отрезке 01; поэтому, учитывая ранее установленные свойства S-многочленов, абсолютно и равномерно сходящимися будут также и ряды, получаемые при последовательном почленном дифференцировании ряда (48), и $F^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(0)$, $F^{(2k+1)}(1) = f_{(2k+1)}(1)$. Вспоминая далее, что все S-многочлены принадлежат к типу регулярности $\pm \sin x \, (S_m(x)\,S_m'(x) \geqslant 0)$, мы можем, каковы бы ни были знаки $f^{(2k)}(0)$ и $f^{(2k+1)}(1)$, перегруппировать так члены ряда (48), чтобы представить его в виде

$$F(x) = G_1(x) - G_2(x), \tag{47 bis}$$

где функции $G_1(x) \in Ц$ и $G_2(x) \in Ц$ включают только положительные члены и, следовательно, принадлежат к типу регулярности $+\sin x$.

Для того чтобы убедиться в том, что при $p < \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = F(x),$$

нужно заметить еще, что

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{n} f^{(m)}(\alpha_m) S_m(x) =$$

$$= \int_0^x dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \ldots \int_{\alpha_n}^{x_n} f^{(n+1)}(x_{n+1})\, dx_{n+1},$$

а следовательно, в силу (49),

$$|R_{n+1}(x)| \leqslant M_0 \left(\frac{\pi}{2}\theta\right)^{n+1} |S_{n+1}(1)| < \frac{4M_0}{\pi}\theta^{n+1} \quad (0 \leqslant x < 1)$$

стремится к нулю при $n \to \infty$.

Теорема 3, как и теоремы 1 и 2, была высказана мною в докладе(2), упомянутом во введении. Вопрос об условиях, каким должна удовлетворять функция $f(x)$ степени p для того, чтобы она была представима в виде (47), где $G_1(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2p}\right)$, $G_2(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2p}\right)$, там не был рассмотрен. Укажем здесь, полагая, для определенности, $p = 1$, вытекающее из предыдущего

Следствие 9. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) *ряд*

$$\sum_{m=0}^{\infty} |f^{(m)}(\alpha_m)| \quad \left(\alpha_{2k} = 0,\ \alpha_{2k+1} = \frac{\pi}{2}\right) \tag{50}$$

сходится *,

2) $\varlimsup \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}} |f^{(m)}(x)| = 0$,

то $f(x) = F(x)$ должна быть целой функцией степени не выше первой и может быть представлена в виде (47), где $G_1(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $G_2(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ получаются, как выше, из соответствующего промежутку $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ абсолютно сходящегося ряда (48) (т. е. (48 bis)).

Первое условие (сходимость ряда (50)) необходимо и достаточно для того, чтобы существовала функция $F(x)$, данная абсолютно сходящимся рядом (48 bis) (так как для $F(x)$ второе условие вытекает из первого). Однако соблюдение обоих условий не необходимо для (47), как это видно из примера функции

$$f(x) = \sin x \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

которая не удовлетворяет второму условию (так как $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}} |f^{(m)}(x)| = 1$ при всех $m \geqslant 0$, а соответствующий ряд (48 bis) дает $F(x) = 0$).

Также можно получить

Следствие 10. *Если целая функция $f(x)$ степени $p < 2$ удовлетворяет только условию* (50), *то* $p \leqslant 1$, *и*

$$f(x) = F(x) + A \sin x, \tag{51}$$

---

* Или, если сходимость (50) имеет место для $\alpha_{2k} = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_{2k+1} = 0$.

где

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f^{(m)}(\alpha_m) S_m\left(\frac{2}{\pi}x\right) \quad \left(\alpha_{2k} = 0,\ \alpha_{2k+1} = \frac{\pi}{2}\right). \qquad (48\,\text{bis})$$

Действительно, $f(x) - F(x) = \varphi(x)$ удовлетворяет условию $\varphi^{(2k)}(0) = \varphi^{(2k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ и так как степень ее $p < 2$, то, в силу следствия 1, $\varphi(x) = A\sin x$.

Следствие 11. *Для того чтобы* $f^{(m)}(\alpha_m)$ *могли быть значениями производных* $f^{(m)}(x)$ *в точках* $\alpha_{2k} = 0$, $\alpha_{2k+1} = \frac{\pi}{2}$ *функции* $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *типа* $\pm\sin x$, *необходимо* и достаточно, чтобы ряд* (50) *был сходящимся; в таком случае* $f(x)$ *имеет форму* (51).

Достаточность вытекает из следствия 10. Чтобы убедиться в необходимости сходимости ряда (50), замечаем, что во всяком случае мы должны иметь при любом $n > 0$

$$f(x) = \sum_{m=0}^{n} f^{(m)}(\alpha_m) S_m\left(\frac{2x}{\pi}\right) + \int_0^x dx_1 \ldots \int_{\alpha_n}^{x_n} f(x_{n+1})\, dx_{n+1},$$

где слагаемые в правой части одинакового знака. Поэтому при расходимости (50) $|f(x)|$ был бы бесконечен.

Отсюда следует, что *условие* (50) *является также необходимым для того, чтобы функция степени* $p = 1$ *допускала представление* (51).

Отметим вытекающее из следствия 11

Добавление к следствию 7. *Если* $f(x) \in Ц\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $|f(x)| \leqslant M$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, *то*

$$\overline{\lim_{m=\infty}}\ |f^{(m)}(x)| \leqslant M,$$

причем знак равенства осуществляется лишь тогда, когда

$$f(x) = \pm M \sin x \quad \text{или} \quad f(x) = \pm M\cos x.$$

Обобщая несколько представление функций конечной степени в вид (47), нетрудно показать, что представление в виде абсолютно сходящегося ряда

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b), \qquad (52)$$

---

* Кроме явно необходимого (по определению) условия одинакового знака членов ряда (48 bis) при $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (т. е. $f(0)\cdot f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqslant 0$, $f^{(2k)}(0)\, f^{(2k+2)}(0) \leqslant 0$, $f^{(2k-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot f^{(2k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqslant 0$).

где $G_k(x) \in Ц(a, b)$, после соответствующей группировки членов приводится к виду

$$f(x) = G_1(x) - G_2(x) + G_3(x) - G_4(x),$$

где $G_1(x)$ и $G_2(x)$ типа $\sin x$, а $G_3(x)$ и $G_4(x)$ типа $\cos x$.

Поэтому из следствия 11 заключаем, что *условием, необходимым и достаточным для того, чтобы $f(x)$ степени $p = 1$ допускала представление* (52) $\left(a = 0,\ b = \frac{\pi}{2}\right)$, *служит возможность такого представления $f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, чтобы ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left| \varphi_1^{(2k)}(0) \right| + \left| \varphi_1^{(2k+1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| + \left| \varphi_2^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right| + \left| \varphi_2^{(2k+1)}(0) \right| \right\}$$

был сходящимся.

Более удобную для приложений формулировку имеет

Следствие 12. *Для того чтобы функция $f(x)$ степени $p = 1$ допускала представление* (52), *необходимо, чтобы $f(x)$ была равна $\varphi(x) + A \sin x + B \cos x$, где $\lim\limits_{m=\infty} |\varphi^{(m)}(x)| = 0$; тем более, необходимо, чтобы*

$$\overline{\lim_{m=\infty}} |f^{(m)}(x)| \geqslant \infty \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

§ 7. Перейдем к рассмотрению бесконечно дифференцируемых функций $f(x) \in \mathfrak{R}(a, b)$, *удовлетворяющих условию, что $f(x)$, как и все ее производные, имеют по крайней мере один корень на отрезке* (a, b). Если $a = 0$, $b = 1$, то мы будем писать коротко $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(0, 1)$; кроме того, будем рассматривать вспомогательные классы функций $\mathfrak{R}_m(a, b)$, имеющих производные до порядка m включительно, с корнем на отрезке (a, b).

ЛЕММА 3. *Если $f(x) = \mathfrak{R}_{m-1}$ и*

$$f^{(m)}(x) = F(x) \geqslant 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{39 bis}$$

то наибольшее значение

$$|f(x_0)| = M(\mathfrak{R}_{m-1},\ \ F(x);\ x_0)$$

в любой данной точке x_0 $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1)$ достигается функцией

$$f(x;\ \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}) = \int_{\alpha_0}^{x} dx_1 \int_{\alpha_1}^{x_1} dx_2 \ldots \int_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}} F(x_m)\, dx_m = \int_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}}^{x} F(x)(dx)^m,$$

где $\alpha_i = 0$ или 1 — концы отрезка, знакопостоянной, как и ее m производных на отрезке* 01, *и*

$$M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x)) = \max_{0 \leqslant x_0 \leqslant 1} |f(x_0)| = |f(1 - \alpha_0;\ \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})|.$$

В самом деле, если $f(x)$ не знакопостоянна, то $f(x) \pm \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ достаточно малом удовлетворяет тем же требованиям, причем одно из двух значений

$$|f(x_0) \pm \varepsilon| > |f(x_0)|.$$

Если $f(x)$ не меняет знака во внутреннем нуле $x = \xi$, то при $m > 1$ то же замечание применимо к знакопостоянной функции $f(x) \pm \varepsilon(x - \xi)$, а при $m = 1$ знакопостоянство $f(x)$ возможно лишь при $f(\alpha_0) = 0$. Итак, примем, что наше утверждение верно для $f(x)$ и для всех ее

* Концы α_i вообще могут зависеть от x_0.

производных порядков $i<k<m$, так что k есть наименьшее целое число, для которого $f^{(k)}(\xi)=0$ $(0<\xi<1)$, причем ни на одном из отрезков $(0, \xi)$ и $(\xi, 1)$ не имеем тождественно $f^{(k)}(x)=0$. Построим многочлен $P(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})$ степени k, который со своими производными порядков $i<k$ обращается в нуль в тех же концах α_i отрезка, что $f(x)$ и ее производные, но $P^{(k)}(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})=1$, так что

$$P(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})=\int_{\alpha_0}^{x} dx_1 \ldots \int_{\alpha_{k-1}}^{x_{k-1}} dx_k = \int_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}}^{x} (dx)^k.$$

В таком случае, если $f^{(k)}(x)$ незнакопостоянна, то

$$f_1(x)=f(x)\pm\varepsilon P(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1})=\int_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}}^{x} [f^{(k)}(x)\pm\varepsilon](dx)^k$$

также удовлетворяет (39 bis), и при $\varepsilon>0$ достаточно малом и при надлежащем выборе знака мы имели бы $|f_1(x_0)|>|f(x_0)|$. Если $f^{(k)}(x)$ знакопостоянна и $f^{(k)}(x)=0$ в некоторой внутренней точке $x=\xi$, то рассмотрения требует лишь случай, когда $k<m-1$; в этом случае

$$f_1(x)=\int_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}}^{x} [f^{(k)}(x)\pm\varepsilon(x-\xi)](dx)^k$$

также удовлетворяет условиям леммы и $|f_1(x_0)|\geqslant|f(x_0)|$ при соответствующем знаке ε, между тем как $f_1^{(k)}(x)$ незнакопостоянна.

Следствие 13. *Если* $\varphi(x)\in\mathfrak{R}_{m-1}$ *и*

$$\varphi^{(m)}(x)=\Phi(x)\geqslant F(x)\geqslant 0 \quad (0\leqslant x\leqslant 1),$$

то при всяком x_0 $(0\leqslant x_0\leqslant 1)$

$$M(\mathfrak{R}_{m-1}, \Phi(x); x_0)\geqslant M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x); x_0)$$

и тем более

$$M(\mathfrak{R}_{m-1}, \Phi(x))\geqslant M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x)). \tag{53}$$

Действительно, пусть

$$f(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})=\int_{\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}}^{x} F(x)(dx)^m$$

осуществляет $M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x); x_0)$ при некоторой последовательности нулей в концах α_i отрезка 01; при этом

$$(-1)^{\alpha_0+\cdots+\alpha_{m-1}} f(x; \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1})\geqslant 0,$$

какою бы функцией $F_1(x)=\Phi(x)-F(x)\geqslant 0$ мы ни заменили $F(x)$. Следовательно,

$$M(\mathfrak{R}_{m-1}, \Phi(x); x_0)\geqslant|\varphi(x_0)|=\int_{\alpha_0 \ldots \alpha_{m-1}}^{x_0} \Phi(x)(dx)^m\geqslant$$
$$\geqslant M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x); x_0).$$

Первое дополнение к лемме 3. *Если* $f(x) \in \mathfrak{R}_{m-1}$ *удовлетворяет всем условиям леммы* 3, *кроме ограничения* $F(x) \geqslant 0$, *то*

$$\max |f(x_0)| = M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x); x_0)$$

в любой точке x_0 $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1)$ *достигается, когда* $f(x)$ *и все ее производные* $f^{(i)}(x)$ *порядков* $i < m$ *знакопостоянны, причем в случае* $m \geqslant 2$ $f(x), \ldots, f^{(m-2)}(x)$ *обращаются в нуль в концах* $\alpha_0, \ldots, \alpha_{m-2}$ *отрезка* 01.

В самом деле, свойство нулей $f(x)$ и ее производных до порядка $m-2$ было доказано независимо от условия $F(x) \geqslant 0$; доказательство необходимости знакопостоянства $f^{(m-1)}(x)$ также независимо от условия $F(x) \geqslant 0$.

Второе дополнение к лемме 3. *При соблюдении всех условий леммы* 3

$$M(\mathfrak{R}_{m-1}, F(x)) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$$

достигается, когда все концы α_i $(0 \leqslant i \leqslant m-1)$ *последовательно чередуются; в случае нарушения требования* $F(x) \geqslant 0$ *то же чередование концов* α_i *должно иметь место для всех* $i \leqslant m-2$.

В самом деле, мы можем ограничиться первым случаем, когда $f^{(m)}(x) = F(x) \geqslant 0$, так как во втором случае тем же свойством знакопостоянства обладает $f^{(m-1)}(x)$. Положим, далее, для определенности, $\alpha_{m-1} = 0$, т. е.

$$f^{(m-1)}(x) = \int_0^x F(t)\,dt \geqslant 0.$$

В таком случае, вследствие монотонного возрастания $f^{(m-1)}(x)$, имеем при $y = 1 - x$

$$-f_1^{(m-2)}(x) = \int_x^1 f^{(m-1)}(t)\,dt \geqslant \int_0^y f^{(m-1)}(t)\,dt = f_0^{(m-2)}(y) \geqslant 0,$$

где $f_1(x)$ соответствует $\alpha_{m-2} = 1 \mp \alpha_{m-1}$, а $f_0(x)$ соответствует $\alpha_{m-2} = 0 = \alpha_{m-1}$. Замечая, что, вообще,

$$M(\mathfrak{R}_n, F(x)) = M(\mathfrak{R}_n, F(1-x)) \tag{54}$$

и принимая во внимание следствие 13, заключаем, что

$$M(\mathfrak{R}_{m-2}, f_1^{(m-2)}(x)) \geqslant M(\mathfrak{R}_{m-2}, f_0^{(m-2)}(x)),$$

причем знак равенства исключается при $m > 2$.

Таким образом, если, в частности, положить $F(x) = 1$, получается

ТЕОРЕМА 4. *Если многочлен степени* $m > 0$

$$P_m(x) = \pm \frac{x^m}{m!} + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m \in \mathfrak{R}_{m-1}, \tag{55}$$

т. е. если $P_m(x)$ *имеет по крайней мере один корень на отрезке* 01, *как и все его производные* $P_m^{(i)}(x)$ *порядков* $i < m$, *то*

$$|P_m(x)| \leqslant L_m,$$

причем значения L_m достигаются только для многочленов Эйлера $\pm S_m(x)$, $\pm C_m(x)$ (*при* $m > 2$).

Отсюда следует

ТЕОРЕМА 5. *Если для некоторого* m

$$| f^{(m)}(x) | \leqslant 1 \tag{57}$$

и $f(x) \in \mathfrak{N}_n$ $(m \leqslant n+1)$, *то*

$$| f(x) | \leqslant L_m. \tag{56 bis}$$

Действительно, в случае $f^{(m)}(x)$ знакопостоянного наше утверждение прямо вытекает из следствия 13, если же $f^{(m)}(x)$ имеет внутренний корень, то для получения наибольшего максимума $| f(x) |$ нужно, чтобы $f^{(m-1)}(x)$ была знакопостоянна. В таком случае, если $f^{(m-1)}(\beta) = 0$ $(0 < \beta < 1)$, то

$$| f^{(m-1)}(x) | \leqslant | x - \beta | .$$

Но так как максимум $| f(x) |$ будет наибольшим, если $f^{(m-2)}(x) = 0$ при $x = 0$ или 1, то, полагая, например, $f^{(m-2)}(0) = 0$, имеем

$$0 \leqslant f^{(m-2)}(x) \leqslant \int_0^x | t - \beta | \, dt,$$

так что соответствующее значение

$$| S_m^{(m-2)}(x) | = \int_0^x (1-t)\, dt = x - \frac{x^2}{2} \geqslant f^{(m-2)}(x). \tag{58}$$

Другая формулировка* теоремы 5. *Если* $f(x) \in \mathfrak{N}_n$ (*в частности, если* $f(x) \in \mathfrak{N}_\infty = \mathfrak{N}$) *и*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f(x) | = 1, \tag{59}$$

то

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} | f^{(m)}(x) | \geqslant \frac{1}{L_m} \sim \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^m \tag{60}$$

для всех $m \leqslant n+1$. *При этом, когда* $m = n+1$, *то знак равенства* (60) *осуществляется для соответствующих многочленов Эйлера степени* m.

Примечание. Теорема 4 может быть дополнена следующим образом: $\max | P_m(x_0) |$ *в данной точке* x_0 $(0 \leqslant x_0 \leqslant 1)$, *где* $P_m(x) \in \mathfrak{N}_{m-1}$ *вида* 55, *осуществляется либо многочленом Эйлера* $S_m(x)$, *либо многочленом* $C_m(x)$ $\left(\text{при } x_0 = \frac{1}{2} \text{ этот максимум равен} \left| S_m\left(\frac{1}{2}\right) \right| = \left| C_m\left(\frac{1}{2}\right) \right| \right)$.

Из теоремы 4, которая впервые была указана в докладе (2), вытекает

Следствие 14. *Если целая функция конечной степени* $f(x)$ *и ее производные* $f^{(n)}(x)$ *всех порядков имеют по крайней мере по одному*

* В докладе (2) теорема 5 высказана не вполне точно.

корню a_n *на некотором отрезке* (a, b) *длины* d *и степень ее* $p < \frac{\pi}{2d}$, *то имеем тождественно* $f(x) = 0$; *напротив, функция* $f(x)$ *степени* $p = \frac{\pi}{2d}$ *может быть при этом отлична от нуля* $\left(\text{например, } \sin\frac{\pi x}{2d}\right)$.

Таким образом, в отличие от случая, когда корни a_n могут быть комплексны, *если корни* a_n *вещественны* и $|a_n| \leqslant \frac{\pi}{4}$, то соответствующая этим корням функция $f(x)$ степени $p \leqslant 1$ тождественно равна нулю*.

§ 8. В заключение я хочу обратить внимание на некоторые обобщения изложенных выше результатов. Прежде всего отметим, что лемма 2 при помощи аналогичных рассуждений распространяется на все типы регулярно монотонных функций с той лишь разницей, что нули α_i последовательных производных, которые для осуществления экстремума всегда должны совпадать с одним из концов соответствующего отрезка, вместо того чтобы последовательно чередоваться, должны *для каждого типа чередоваться так, чтобы обеспечить принадлежность функции к требуемому типу регулярной монотонности.* Отсюда вытекает также соответствующее обобщение теоремы 1:

Среди всех многочленов $P_n(x)$ *степени* $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, *где* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — *типовые числа, определяющие тип регулярной монотонности*

$$P_n(x) = \pm\frac{x^n}{n!} + p_1 x^{n-1} + \cdots + p_n \tag{40 bis}$$

на отрезке 01, *наименее уклоняется от нуля тот из многочленов* $P_n(x)$, *который обращается в нуль при* $x = 0$, *как и все его производные порядков* $i < n$ $(\sigma_{2h} \leqslant i < \sigma_{2h+1})$, *где* $\sigma_m = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$, *а производные порядков* $j < n$ $(\sigma_{2h+1} \leqslant j < \sigma_{2h+2})$ *имеют корень* $x = 1$.

Например, если все $\lambda_{2k} = 1$, $\lambda_{2k+1} = \lambda$, то мы получим тип монотонности**, приводящийся к циклической при $\lambda = 1$. В этом случае наименее уклоняющиеся от нуля многочлены $P_n(x)$ *выражаются символически в виде* (полагая, для определенности, $n + 1 \equiv 0$ по модулю $\lambda + 1$)

$$P_n(x) = \frac{(x + G)_n}{n!}, \tag{61}$$

где $G_i \geq 0$ только при $i \equiv 0 \pmod{\lambda + 1}$. Например, в случае $\lambda = 2$ $(n = 3k + 2)$, при $i = 3m$ и $i = 3m + 1$ $P_n^{(i)}(0) = 0$ и $P_n^{(j)}(1) = 0$ при $j =$

---

* Соответствующая постоянная w (Уиттекера) в случае комплексных корней a_n известна ([3]) лишь приближенно $(0{,}7199 < w < 0{,}7338)$.

** Условие (A) заменяется теперь условием $f^{(i-1)}(x) \cdot f^{(i+\lambda)}(x) \leqslant 0$ $(i > 0)$, которое дополняется начальным требованием $f(x)\, f^{(i)}(x) \geqslant 0$ для всех $i \leqslant \lambda$ (при $\lambda = 1$ соответствующему типу $\pm \sin x$).

$= 3m + 2$, а последовательные значения $G_{3k} \gtrless 0$ определяются из уравнений

$$P''_{3k+2}(1) = \frac{(1+G)_{3k}}{(3k)!} = 0,$$

т. е.

$$1 + G_3 = 0,\ 1 + \frac{6!}{3!\,3!} G_3 + G_6 = 0,\ \ 1 + \frac{9!}{3!\,6!}(G_3 + G_6) + G_9 = 0 \text{ и т. д.,} \tag{62}$$

откуда

$$G_3 = -1,\ G_6 = 19,\ G_9 = -84 \cdot 18 - 1 = -1513 \text{ и т. д.}$$

Наименьшее уклонение, соответствующее этому типу монотонности (для $n = 3k + 2$) достигается многочленом (61) при $x = 1$, и, следовательно, равно

$$R_{3k+2} = \frac{(1+G)_{3k+2}}{(3k+2)!}. \tag{63}$$

Для вычисления асимптотического значения R_{3k+2} положим $G_{3k} = (3k)!\, c_k$, так что для определения c_k из (62) получим уравнения

$$c_k + \frac{1}{3!} c_{k-1} + \frac{1}{6!} c_{k-2} + \cdots + \frac{1}{3k!} = 0, \tag{62 bis}$$

откуда, полагая

$$F(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{3k}}{3k!} + \cdots = \frac{1}{3}\left[e^x + 2e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right], \tag{64}$$

заключаем, что ($c_0 = 1$)

$$\frac{1}{F(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{3k}. \tag{65}$$

Обозначая через $\rho > 0$ модуль наименьшего корня уравнения* $F(x) = 0$, находим асимптотические значения для

$$|c_k| = \frac{|G_{3k}|}{(3k)!} \sim \frac{A}{\rho^3}, \tag{66}$$

где A — конечная, не зависящая от ρ постоянная. Отсюда следует, что

$$R_n = O\left(\frac{1}{\rho}\right)^n \text{ и } \frac{1}{R_n} = O(\rho^n),$$

а потому функция рассматриваемого типа регулярной монотонности ($\lambda = 2$) на отрезке (0,1) должна быть конечной степени $p \leqslant \rho$. Кроме того, функция $F(\rho x)$ степени ρ фактически принадлежит этому типу на (0,1).

---

* $\frac{\pi}{\sqrt{3}} < \rho < 2$.

Напомню, что в статье ([1]) показано, что регулярно монотонные функции, все типовые числа которых λ_i ограничены, должны быть целыми функциями конечной степени. Там же и в докладе ([2]) было высказано утверждение, что из всех типов регулярной монотонности, циклическая монотонность обеспечивает наиболее медленный рост модулей последовательных производных, т. е. наиболее ограничивает степень соответствующей функции (в рассмотренном выше примере мы имеем, действительно, что $\rho > \frac{\pi}{2}$). Общее доказательство этого утверждения основано на лемме 3 (с ее добавлениями), откуда следует, что *наименьшее уклонение регулярно монотонных многочленов вида* (40 bis) *имеет наибольшее значение, если корни соответствующего многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, и его последовательных производных последовательно чередуются с концах отрезка, что́ характеризует циклическую монотонность.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., О некоторых свойствах регулярно монотонных функций, Сообщ. Харьк. матем. общ., сер. 4, т. 2 (1928), 1—11.

[2] Bernstein S., Sur les fonctions régulièrement monotones, Atti Congresso Intern. Mat., Bologna, t. 2 (1930), 267—275.

[3] Boas P., An upper bound for the Gontcharoff constant, Duke Math. Journal, 15 (1948), 953—954.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 405—412

И. И. ИБРАГИМОВ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧЛЕНАМИ ФУНКЦИЙ $[ax+b|x|]|x|^s$ НА ОТРЕЗКЕ $[-1, +1]$

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе устанавливается асимптотическое выражение наилучшего (равномерного) приближения функции

$$V_s(x, a, b) = (ax + b|x|)|x|^s$$

на отрезке $[-1, +1]$ посредством многочлена степени n, где a и b — любые вещественные числа и $s > -1$.

С. Н. Бернштейн (¹) еще в 1913 г. доказал, что существует предел

$$\lim_{h\to\infty} 2nE_{2n}(|x|) \approx 0{,}282\ldots,$$

где $E_n(f)$ обозначает наилучшее приближение функции f при помощи многочлена степени n на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Далее, в 1938 г. им было доказано, что если $s > 0$ есть любое не целое число, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^s E_n(|x|^s) = \mu(s).$$

Кроме того, при $s > 2$ для $\mu(s)$ имеет место неравенство

$$\left(1 - \frac{1}{s-1}\right)\frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s) < \mu(s) < \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s).$$

Отсюда следует, что при $s\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство

$$\mu(s) \approx \frac{1}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\Gamma(s).$$

В настоящей работе мы получаем подобные результаты для более общей функции

$$V_s(x, a, b) = (ax + b|x|)|x|^s \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

где a, b — любые вещественные числа и $s > -1$.

Именно, отправляясь от равенства (§ 2)

$$V_s(x, a, b) - P_n(x) = -\frac{4}{\pi n^{s+1}}\left\{b\cos\frac{\pi s}{2}\cos nx\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u + e^{-u})(u^2 + n^2x^2)} + \right.$$

$$\left. + a\sin\frac{\pi s}{2}\sin nx\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u - e^{-u})(u^2 + n^2x^2)}\right\} + \frac{\varepsilon_n(x)}{n^{s+1}}, \qquad \text{(I)}$$

где $P_n(x)$ есть некоторый многочлен степени n, а $\varepsilon_n(x)$ равномерно стремится к нулю на отрезке $[-1, +1]$ при $n \to \infty$, мы показываем, что постоянная

$$\lim_{n\to\infty} n^{s+1} E_n \{V_s(x, a, b)\} = \lambda(s+1, a, b) \tag{II}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\left(1 - \frac{1}{s}\right) \frac{\omega(s, a, b)}{\pi} \Gamma(s+1) < \lambda(s+1, a, b) < \frac{\omega(s, a, b)}{\pi} \cdot \Gamma(s+1), \tag{III}$$

где

$$\omega(s, a, b) = \sqrt{a^2 \sin^2 \frac{\pi s}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\pi s}{2}}.$$

При этом мы пользуемся методом С. Н. Бернштейна ([2]). Из (III) вытекает асимптотическое равенство:

$$\lambda(s+1, a, b) \approx \frac{1}{\pi} \omega(s, a, b) \Gamma(s+1) \quad (s \to \infty). \tag{IV}$$

Этому посвящен § 2.

Заметим, что существование предела (II) непосредственно вытекает из результатов С. Н. Бернштейна, опубликованных в его заметке ([4]) п. 3, так как функция $V_s(x, a, b)$, очевидно, равна

$$V_s(x, a, b) = \begin{cases} (a+b) x^{s+1}, & \text{если } x > 0, \\ (b-a) |x|^{s+1}, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Из этих результатов следует, что

$$\lambda(s+1, a, b) = A_1(V_s),$$

где $A_1(f)$ означает наилучшее приближение $f(x)$ на всей вещественной оси при помощи целых функций первой степени.

§ 1. Вывод основной формулы (I)

Формула (I), на которой базируется нахождение асимптотического значения наилучшего приближения многочленами функции

$$V_s(x, a, b) = (ax + b|x|)|x|^s$$

на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выводится из двух формул:

$$|x|^{s+1} - P_{n_1}^{(1)}(x) =$$

$$= \frac{4(-1)^m \cos \frac{\pi s}{2} T_{n_1}(x)}{\pi \cdot n_1^{s+1}} \int_0^\infty \frac{u^s\, du}{(e^u + e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{n_1^2 x^2}\right)} + \frac{\varepsilon'_{n_1}(x)}{n_1^{s+1}} \quad (n_1 = 2m). \tag{1}$$

и

$$x|x|^s - P_{n_2}^{(2)}(x) =$$

$$= \frac{4(-1)^m \sin\frac{\pi s}{2} T_{n_2}(x)}{\pi \cdot n_2^{s+1}} \int_0^\infty \frac{u^s\,du}{(e^u - e^{-u})\left(1 + \frac{u^2}{n_2^2 x^2}\right)} + \frac{\varepsilon''_{n_2}(x)}{n_2^{s+1}} \quad (n_2 = 2m+1). \quad (2)$$

При этом нужно иметь в виду, что

$$T_{n_1}(x) = \cos 2m \arccos x = (-1)^m \cos n_1 \arcsin x,$$

$$T_{n_2}(x) = \cos(2m+1)\arccos x = (-1)^m \sin n_2 \arcsin x$$

и

$$\varepsilon'_{n_1}(x) \to 0, \quad \varepsilon''_{n_2}(x) \to 0 \quad \text{при } n_1, n_2 \to \infty$$

равномерно относительно x из сегмента $[-1, +1]$.

Формула (1) доказана С. Н. Бернштейном [(5), стр. 100], а формула (2) доказана мною (6).

Формула (2) имеет тот недостаток, что она справедлива для $s > 0$, между тем как функция $x|x|^s$ непрерывна для $s > -1$. Соответствующую формулу для случая $s > -1$ мы сейчас получим, несколько видоизменяя ход рассуждений, имевший место при получении формулы (2).

В упомянутой выше статье (6) было получено равенство

$$\varphi(x) = x|x|^s - P_n(x) =$$

$$= \frac{4(-1)^m \sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} T_n(x) \int_0^\infty \frac{t^s\,dt}{\left(1 + \frac{t^2}{x^2}\right)[(t+\sqrt{t^2+1})^n + (t-\sqrt{t^2+1})^n]},$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Вычтем из обеих частей этого равенства многочлен степени n

$$\frac{4(-1)^m \sin\frac{\pi s}{2} \cdot T_n(x)}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^s\,dt}{[(t+\sqrt{t^2+1})^n + (t-\sqrt{t^2+1})^n]}.$$

Тогда получим

$$x|x|^s - Q_n(x) =$$

$$= -\frac{4(-1)^m \sin\frac{\pi s}{2}}{\pi} \cdot T_n(x) \int_0^\infty \frac{t^{s+2}\,dt}{(x^2+t^2)\ [(t+\sqrt{t^2+1})^n + (t-1\sqrt{t^2+1})^n]},$$

где $Q_n(x)$ — многочлен степени n.

Полагая, как и в статье (6), во-первых $t + \sqrt{t^2+1} = \sigma$, а затем $\sigma = 1 + \frac{u}{n}$, получим

$$x|x|^s - Q_{n_2}(x) = -\frac{4(-1)^m \sin\frac{\pi s}{2} T_{n_2}(x)}{\pi \cdot n_2^{s+1}} \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(u^2 + n_2^2 x^2)\ (e^u - e^{-u})} + \frac{\varepsilon''_{n_2}(x)}{n_2^{s+1}} \quad (3)$$

($n_2 = 2m+1$ есть нечетное число).

Очевидно, формула (3) имеет смысл для $s > -1$. Далее, пользуясь равенством

$$\int_0^\infty \frac{u^s\,du}{(e^u+e^{-u})\left(1+\frac{u^2}{n_1^2x^2}\right)} - \int_0^\infty \frac{u\;du}{e^u+e^{-u}} = -\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+n_1^2x^2)},$$

перепишем формулу (1) С. Н. Бернштейна следующим образом:

$$|x|^{s+1} - P_{n_1}(x) =$$

$$= -\frac{4(-1)^m\cos\frac{\pi s}{2}T_{n_1}(x)}{\pi\cdot n_1^{s+1}}\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+n_1^2x^2)} + \frac{\varepsilon'_{n_1}(x)}{n_1^{s+1}}. \tag{4}$$

Умножив (3) на b, (4) на a и затем складывая, получим

$$V_s(x,\ a,\ b) - P_{n_s}(x) = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{b\cos\frac{\pi s}{2}\cos n_1\arcsin x}{n_1^{s+1}}\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+n_1^2x^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a\sin\frac{\pi s}{2}\sin n_2\arcsin x}{n_2^{s+1}}\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u-e^{-u})\,(u^2+n_2^2x^2)}\right\} + \frac{\varepsilon_m(x)}{(2m)^{s+1}}. \tag{5}$$

Далее, имея в виду, что

$$|\cos n_1\arcsin x - \cos n_1 x| < n_1|\arcsin x - x| = O(n_1x^3),$$

$$|\sin n_2\arcsin x - \sin n_2 x| < n_2|\arcsin x - x| = O(n_2x^3),$$

$$\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+n^2x^2)} = O\left(\frac{1}{n^2x^2}\right),\quad \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u-e^{-u})\,(u^2+n^2x^2)} = O\left(\frac{1}{n^2x^2}\right),$$

находим

$$\cos n_1\arcsin x\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+n_1^2x^2)} =$$

$$= \cos n_1 x\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+n_1^2x^2)} + O\left(\frac{x}{n_1}\right),$$

$$\sin n_2\arcsin x\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,cu}{(e^u-e^{-u})\,(u^2+n_2^2x^2)} =$$

$$= \sin n_2 x\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u-e^{-u})\,(u^2+n_2^2x^2)} + O\left(\frac{x}{n_2}\right).$$

Поэтому формула (5) может быть еще преобразована:

$$V_s(x,a,b) - P_{n_s}(x) = -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{b\cos\frac{\pi s}{2}\cos n_1x}{n_1^{s+1}}\int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})\,(u^2+n_1^2x^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{a\sin\frac{\pi s}{2}\sin n_2x}{n_2^{s+1}}\int_0^\infty \frac{u^{s+2}du}{(e^u-e^{-u})\,(u^2+n_2^2x^2)}\right\} + \frac{\varepsilon_m(x)}{(2m)^{s+1}}, \tag{6}$$

где $\varepsilon_m(x)$ стремится к нулю равномерно при $m \to \infty$ для всех x из сегмента $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Наконец, имея в виду, что

$$|\cos(n_1+1)x - \cos n_1 x| \leqslant |x|,$$

а также неравенства

$$|x| \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+n^2x^2)} \begin{cases} < \dfrac{c}{n^2|x|} < \dfrac{c}{n} & \text{для } |x| > \dfrac{1}{n}, \\ < |x| \displaystyle\int_0^\infty \frac{u^s\,du}{e^u+e^{-u}} < \dfrac{c}{n} & \text{для } |x| < \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

получим, полагая $n_2 = n_1 + 1 = n$,

$$\cos n_1 x \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+n_1^2x^2)} = \cos nx \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+n_1^2x^2)} + O\left(\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \cos nx \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+n^2x^2)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, формула (6) окончательно принимает следующий вид:

$$V_s(x, a, b) - P_n(x) = \frac{\Psi_s(nx)}{n^{s+1}} + \frac{\varepsilon_n(x)}{n^{s+1}}, \tag{7}$$

где

$$\Psi_s(t) = -\frac{4}{\pi}\left\{b \cos\frac{\pi s}{2} \cos t \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u+e^{-u})(u^2+t^2)} + \right.$$

$$\left. + a \sin\frac{\pi s}{2} \sin t \int_0^\infty \frac{u^{s+2}\,du}{(e^u-e^{-u})(u^2+t^2)}\right\}. \tag{8}$$

При этом $P_n(x)$ есть многочлен степени $n = \max(n_1, n_2)$, а $\varepsilon_n(x)$ равномерно стремится к нулю при неограниченном возрастании n для всех x из сегмента $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Из формулы (7), на основании предложения С. Н. Бернштейна (2), следует:

$$\lim_{n\to\infty} n^{s+1} E_n(V_s) = \lim_{n\to\infty} E_n(\Psi_s(nx)) = \lim_{n\to\infty} E_n(\Psi_s(x), n) = A_1(\Psi_s),$$

где $A_1(\Psi_s)$ обозначает наилучшее приближение Ψ_s на всей вещественной оси посредством целых функций степени один.

§ 2. Об асимптотическом значении $\lambda(s+1, a, b)$

Перейдем к получению асимптотического выражения

$$\lambda(s+1, a, b) = A_1(\Psi_s).$$

Для этой цели рассмотрим функцию

$$\Phi(t)=\frac{b}{\pi}\cos\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}u^s\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}\,du+$$

$$+\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^\infty\frac{(t^2-u^2)\sin t-2ut\cos t}{u^2+t^2}\,e^{-u}u^s\,du.$$

Если положить

$$\omega(s, a, b)=\sqrt{a^2\sin^2\frac{\pi s}{2}+b^2\cos^2\frac{\pi s}{2}},$$

$$\sin\alpha=\frac{b\cos\frac{\pi s}{2}}{\omega(s, a, b)},\quad \cos\alpha=\frac{a\sin\frac{\pi s}{2}}{\omega(s, a, b)},$$

то функцию $\Phi(t)$ можно записать в более компактной форме:

$$\Phi(t)=\frac{1}{\pi}\omega(s, a, b)\int\limits_0^\infty e^{-u}u^sR(t, u)\,du, \tag{9}$$

где

$$R(t, u)=\sin\left(t+\alpha-2\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{t}\right),$$

откуда следует, что

$$|\Phi(t)|<\frac{1}{\pi}\omega(s, a, b)\Gamma(s+1). \tag{10}$$

Функция

$$\xi(t)=\Phi(t)-\Psi_s(t)=$$

$$=\frac{b}{\pi}\cos\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-u}u^{s+2}}{1+e^{-2u}}\left[\frac{1+e^{-2u}}{u^2}\cdot\frac{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t}{u^2+t^2}+\frac{4\cos t}{u^2+t^2}\right]du+$$

$$+\frac{a}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-u}u^{s+2}}{1-e^{-2u}}\left[\frac{1-e^{-2u}}{u^2}\cdot\frac{(t^2-u^2)\sin t-2ut\cos t}{u^2+t^2}-\frac{4\sin t}{u^2+t^2}\right]du$$

является целой функцией первой степени. В этом можно легко убедиться, если принять во внимание, что при любом u и $t=ui$ имеем

$$(1-e^{-2u})\{(t^2-u^2)\sin t-2ut\cos t\}-4u^2\sin t=0,$$

$$(1+e^{-2u})\{(t^2-u^2)\cos t+2ut\sin t\}-4u^2\cos t=0.$$

Отсюда следует, в силу (10), что

$$\lambda(s+1, a, b)=A_1(\Psi_s)=A_1(\Phi)\leqslant\sup|\Phi(t)|\leqslant\frac{1}{\pi}\omega(s, a, b)\Gamma(s+1). \tag{11}$$

Займемся получением нижней границы $\lambda(s+1, a, b)$.

Заметим, что имеет место тождество:

$$\frac{(t^2-u^2)\sin(t+\alpha)-2ut\cos(t+\alpha)}{t^2+u^2}=$$

$$=\frac{[t^2-(s+1)^2]\sin(t+\alpha)-2t(s+1)\cos(t+\alpha)}{t^2+(s+1)^2}+$$

$$+\frac{2t}{t^2+(s+1)^2}\cdot\frac{t[(s+1)^2-u^2]\sin(t+\alpha)-(s-u+1)[u(s+1)-t^2]\cos(t+\alpha)}{t^2+u^2}$$

и поэтому

$$\int_0^\infty \frac{(t^2-u^2)\sin(t+\alpha)-2ut\cos(t+\alpha)}{t^2+u^2}e^{-u}u^s\,du=$$

$$=\frac{[t^2-(s+1)^2]\sin(t+\alpha)-2t(s+1)\cos(t+\alpha)}{t^2+(s+1)^2}\Gamma(s+1)+\varphi_s(t), \qquad (12)$$

где

$$\varphi_s(t)=\frac{2t}{t^2+(s+1)^2}\int_0^\infty\frac{t[(s+1)^2-u^2]\sin(t+\alpha)-(s-u+1)[u(s+1)-t^2]\cos(t+\alpha)}{t^2+u^2}\cdot e^{-u}u^s\,du.$$

Таким образом, вследствие (12), из равенства (9) на основании результата С. Н. Бернштейна (7), в силу которого наилучшее приближение функции $\sin\left(t+\alpha-2\operatorname{arc\,tg}\frac{s+1}{t}\right)$ при помощи целых функций степени 1 равно единице, находим:

$$\lambda(s+1,a,b)=A\{\Phi(t)\}>\frac{1}{\pi}\omega(s,a,b)\Gamma(s+1)-\frac{1}{\pi}\omega(s,a,b)\max|\varphi_s(t)|.(13)$$

Далее, имея в виду тождество

$$\frac{t[s+1+u]\sin(t+\alpha)-[(s+1)u-t^2]\cos(t+\alpha)}{u^2+t^2}=$$

$$=\frac{2(s+1)t\sin(t+\alpha)-[(s+1)^2-t^2]\cos(t+\alpha)}{t^2+(s+1)^2}+\frac{1+s-u}{(u^2+t^2)[t^2+(s+1)^2]}\cdot$$

$$\cdot\{t[(s+1)(2u+s+1)-t^2]\sin(t+\alpha)-[u(s+1)^2-t^2(u+2s+2)]\cos(t+\alpha)\},$$

находим следующее выражение для функции $\varphi_s(t)$:

$$\varphi_s(t)=\frac{2t}{[t^2+(s+1)^2]^2}\{2t(s+1)\sin(t+\alpha)-[(s+1)^2-t^2]\cos(t+\alpha)\}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty e^{-u}u^s(1+s-u)\,du+\frac{2t}{[t^2+(s+1)^2]^2}\int_0^\infty\frac{e^{u}u^s(1+s-u)^2}{u^2+t^2}\cdot$$

$$\cdot\{t[(s+1)(2u+s+1)-t^2]\sin(t+\alpha)-[u(s+1)^2-t^2(u+2s+2)]\cos(t+\alpha)\}\,du. \qquad (14)$$

Заметим, что первый из интегралов в правой части равенства (14) равен нулю, и, с другой стороны,

$$|t[(s+1)(2u+s+1)-t^2]\sin(t+\alpha)-$$

$$-[u(s+1)^2-t^2(u+2s+2)]\cos(t+\alpha)|\leqslant[t^2+(s+1)^2]\sqrt{u^2+t^2}.$$

Из равенства (14) получаем неравенство:

$$|\varphi_s(t)|<\frac{2t}{t^2+(s+1)^2}\int_0^\infty\frac{e^{-u}u^s(s+1-u)^2\,du}{\sqrt{u^2+t^2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{s+1}\int_0^\infty\frac{e^{-u}u^s(s+1-u)^2\,du}{\sqrt{u^2+t^2}}<\frac{1}{s+1}\int_0^\infty e^{-u}u^{s-1}(s+1-u)^2\,du=$$

$$=\frac{\Gamma(s+1)}{s+1}(s+2-s-1)=\frac{\Gamma(s+1)}{s+1}.$$

Итак, неравенство (13) принимает вид:

$$\lambda(s+1, a, b) > \frac{1}{\pi}\omega(s, a, b)\Gamma(s+1)\left(1-\frac{1}{s+1}\right). \quad (15)$$

Из неравенств (11) и (15) вытекает, что при $s\to\infty$ имеет место асимптотическое равенство:

$$\lambda(s+1, a, b) = \lim n^{s+1}E_n([ax+b|x|]|x|^s) \approx$$
$$\approx \frac{1}{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\frac{\pi s}{2}+b^2\cos^2\frac{\pi s}{2}}\cdot\Gamma(s+1) \quad (s\to\infty).$$

Таким образом, мы пришли к следующему заключению:

ТЕОРЕМА. *Если $s>-1$ есть любое нецелое число, то для константы*

$$\lambda(s+1, a, b) = \lim_{n\to\infty} n^{s+1}E_n([ax+b|x|]|x|^s)$$

справедливо неравенство

$$\left(1-\frac{1}{s+1}\right)\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\frac{\pi s}{2}+b^2\cos^2\frac{\pi s}{2}}\cdot\Gamma(s+1) <$$
$$< \lambda(s+1, a, b) < \frac{1}{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\frac{\pi s}{2}+b^2\cos^2\frac{\pi s}{2}}\cdot\Gamma(s+1).$$

Кроме того, при достаточно большом s имеет место асимптотическое равенство

$$\lambda(s+1, a, b) \approx \frac{1}{\pi}\sqrt{a^2\sin^2\frac{\pi s}{2}+b^2\cos^2\frac{\pi s}{2}}\cdot\Gamma(s+1).$$

Азербайджанский госуд. педагог.
институт им. В. И. Ленина

Поступило
5.V.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bernstein S., Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés, Acta math., 37 : 1 (1913), 1 — 57.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени, Известия Ак. Наук СССР, серия матем. 2 (1938), 169—190.

[3] Бернштейн С. Н., Новый вывод и обобщение некоторых формул наилучшего приближения, Доклады Ак. Наук СССР, том LIV, № 8 (1946), 667—668.

[4] Бернштейн С. Н., О приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. V, Доклады Ак. Наук СССР, том LIV, № 6 (1946), 479—482.

[5] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, М.— Л., 1937.

[6] Ибрагимов И. И., Об асимптотическом значении наилучшего приближения функций, имеющих вещественную особую точку, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 429—460.

[7] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. II, Доклады Ак. Наук СССР, т. LI, № 7 (1946), 458—488.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 413—420

А. О. ГЕЛЬФОНД

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОЛИНОМАХ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

В статье дана конструкция обобщенных полиномов С. Н. Бернштейна и доказаны две теоремы о сходимости этих полиномов к непрерывной функции как при условиях Липшица (оценка скорости сходимости), так и только при условии непрерывности.

Хорошо известна весьма существенная роль, которую играют полиномы С. Н. Бернштейна в различных вопросах анализа и, в частности, в проблеме моментов. Это обстоятельство делает весьма интересной задачу построения и исследования поведения полиномов типа С. Н. Бернштейна для системы функций $1, \{x^\alpha \ln^k x\}$, $\alpha > 0, k \geqslant 0$. Ряд общих соображений по поводу этой задачи был высказан С. Н. Бернштейном в его монографии «Экстремальные свойства полиномов» (1).

Настоящая заметка посвящена построению и исследованию свойств полиномов С. Н. Бернштейна для функций вышеуказанного вида. В основе идеи построения этих полиномов лежит одно интерполяционное тождество, причем следует отметить, что схема доказательства основной теоремы I по существу та же, что и у С. Н. Бернштейна в доказательстве его теоремы для обычных полиномов.

ЛЕММА I. *Пусть* $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n$ *будут произвольные числа. Тогда имеет место тождество*

$$\frac{1}{z-\beta_0} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{(\beta_{k+1}-\beta_0)\cdots(\beta_n-\beta_0)}{(z-\beta_k)\cdot(z-\beta_{k+1})\cdots(z-\beta_n)}. \tag{1}$$

Действительно,

$$(z-\beta_1)\cdots(z-\beta_n) = \sum_{k=0}^{n} A_k (z-\beta_0)\cdots(z-\beta_{k-1}); \quad A_n = 1, \tag{2}$$

где, как показывает весьма элементарный подсчет вычетов в тождестве

$$\frac{(z-\beta_{k+1})\cdots(z-\beta_n)}{z-\beta_0} = \sum_{s=0}^{n} A_s \frac{(z-\beta_0)\cdots(z-\beta_{s-1})}{(z-\beta_0)\cdots(z-\beta_k)},$$

$$A_k = (-1)^{n-k} (\beta_{k+1}-\beta_0)\cdots(\beta_n-\beta_0).$$

Из равенства (2) непосредственно следует тождество (1). В дальнейшем любой линейный агрегат функций вида $x^\alpha \ln^\nu x$ мы будем назы-

вать полиномом. Введем в рассмотрение полиномы $p_{k,n}(x)$. Положим при x действительном и $x>0$

$$p_{k,n}(x)=\frac{(-1)^{n-k}}{2\pi i}\int_C\frac{x^z dz}{(z-\alpha_k)\cdots(z-\alpha_n)},\quad \alpha_s\geqslant 0,\quad s=k,\ldots n, \tag{3}$$

где все α_s действительны, а C есть окружность $|z|=1+\sum_{s=k}^{n}\alpha_s$. Тогда, на основании теории вычетов, $p_{k,n}(x)$ всегда будет иметь вид

$$p_{k,n}(x)=\sum\beta_{s,\nu_s}x^{\alpha_s}\ln^{\nu_s}x,\quad \nu_s\leqslant\mu_s-1, \tag{4}$$

где μ_s — кратность точки α_s в нашей совокупности. В частном случае, когда все α_s различны, полином $p_{k,n}(x)$ будет иметь вид

$$p_{k,n}(x)=-\sum_{s=k}^{n}\frac{x^{\alpha_s}}{(\alpha_k-\alpha_s)\cdots(\alpha_n-\alpha_s)}\,. \tag{5}$$

Итак, на основании определения (3), мы видим, что полином $p_{k,n}(x)$ только постоянным множителем отличается от разделенной разности порядка $n-k$ для функции x^z. Воспользовавшись хорошо известным из теории конечных разностей представлением разделенной разности, будем иметь, что

$$p_{k,n}(x)=\frac{(-1)^{n-k}}{2\pi i}\int_C\frac{x^z dz}{(z-\alpha_k)\cdots(z-\alpha_n)}=$$

$$=\frac{x^\xi}{(n-k)!}\ln^{n-k}\frac{1}{x},\quad 0\leqslant\xi\leqslant\max_{k\leqslant s\leqslant n}\alpha_s. \tag{6}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$p_{k,n}(x)\geqslant 0,\quad x\geqslant 0,\quad k=0,1,\ldots,n. \tag{7}$$

Предположим, что нам заданы какие-то действительные числа $\alpha_s\geqslant 0$, $s=k,\ldots,n$, причем быть равным нулю может только одно $\alpha_\nu=\min\alpha_s$.

Положим $C_k=\prod_{\substack{s=k\\ s\neq\nu}}^{n}\alpha_s$. Тогда всегда $C_k>0$. Расположим числа α_s в порядке неубывания и добавим к ним еще одно число $\beta_0=0$. Тогда мы будем иметь последовательность чисел $\beta_0\leqslant\beta_1\leqslant\beta_2\leqslant\cdots\leqslant\beta_{n-k+1}$, причем совокупность чисел $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n-k+1}$ будет совпадать с совокупностью чисел $\alpha_k,\ldots,\alpha_n$

Умножим обе части тождества (1) на $\frac{x^z}{2\pi i}$ и проинтегрируем обе его части по замкнутому контуру C, внутри которого будут лежать все точки β_s, $s=0,1,\ldots,n-k+1$. Мы получим тождество

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^z}{z}\,dz = \sum_{s=0}^{n-k+1}(-1)^{n-k+1-s}\,\frac{\beta_{s+1}\cdots\beta_{n-k+1}}{2\pi i}\int_C \frac{x^z dz}{(z-\beta_s)\cdots(z-\beta_{n-k+1})}, \tag{8}$$

откуда следует тождество

$$1=\sum_{s=0}^{n-k+1}\beta_{s+1}\cdots\beta_{n-k+1}\bar{p}_{s,\,n-k+1}(x). \tag{9}$$

Но на основании неравенств (7) все слагаемые справа в этом тождестве неотрицательны и, кроме того, $\bar{p}_{1,\,n-k+1}(x)$ для чисел β совпадает с $p_{k,n}(x)$ для чисел α. Поэтому мы имеем неравенство

$$q_{k,n}(x)=\prod_{\substack{s=k\\ s\neq\nu}}^{n}\alpha_s p_{k,n}(x)\leqslant 1,\quad \min_{k\leqslant s\leqslant n}\alpha_s=\alpha_\nu. \tag{10}$$

Отсюда непосредственно следует

ЛЕММА II. *Если среди неотрицательных чисел* α_s, $s=k,\ldots,n$, *имеется не более одного, равного нулю, то при* $x=0$ *имеют место неравенства*

$$0\leqslant q_{k,n}(x)=c_k\frac{(-1)^{n-k}}{2\pi i}\int_\gamma \frac{x^z dz}{(z-\alpha_k)\cdots(z-\alpha_n)}\leqslant 1, \tag{11}$$

где γ — *окружность* $|z|=1+\sum_{s=k}^{n}\alpha_s$ *и* $c_k=\prod_{\substack{s=k\\ s\neq\nu}}^{n}\alpha_s$.

Пусть теперь задана последовательность чисел, расположенных в порядке неубывания, именно $0=\alpha_0<\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\ldots$, $\lim\alpha_n=\infty$. Положим

$$\tau_{k,n}=\left[\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)\cdots\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)\right]^{\frac{1}{\alpha_1}},\quad \tau_{n,n}=1,\quad k=0,1,\ldots,n. \tag{12}$$

Заметим, что при $\alpha_k=k$ $\tau_{k,n}=\dfrac{k}{n}$.

Я буду называть полином $B_n(f,x)$, отвечающий данной функции $f(x)$, полином типа Бернштейна, если

$$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}f(\tau_{k,n})\,q_{k,n}(x), \tag{13}$$

где полиномы $q_{k,n}(x)$ определяются для последовательности чисел $\alpha_0=0<\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_n\leqslant\cdots$ равенствами

$$q_{k,n}(x)=(-1)^{n-k}\frac{\alpha_{k+1}\cdots\alpha_n}{2\pi i}\int_{|z|=1+\alpha_n}\frac{x^z dz}{(z-\alpha_k)\cdots(z-\alpha_n)}. \tag{14}$$

Основной теоремой относительно этих полиномов является теорема о сходимости их к функции $f(x)$.

ТЕОРЕМА I. *Если $f(x)$ ограничена на отрезке $[0, 1]$ и непрерывна на внутреннем отрезке $[a', b']$, а последовательность чисел $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ убовлетворяет условиям*

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \cdots; \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty, \quad \sum_1^\infty \frac{1}{\alpha_n} = \infty,$$

то последовательность полиномов $B_n(f, x)$, определенных равенствами (13), *равномерно сходится к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, $a' < a < b < b'$.*

Заметим, что георема будет справедлива, если вместо $\tau_{k,n}$, определенных равенствами (12), взять любые числа $\lambda_{k,n}$, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{n=\infty} \max_{0\leqslant k\leqslant n} |\tau_{k,n} - \lambda_{k,n}| = 0. \tag{15}$$

Эта теорема в частном случае, когда $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n < \cdots$, была доказана J .J. Hirschman'ом и D. V. Widder'ом ([2]) другим методом, опирающимся существенно на теорему Вейерштрасса, что не дает возможности находить порядок приближения $f(x)$ обобщенными полиномами С. Н. Бернштейна. Приводимое ниже доказательство является прямым доказательством обобщенной теоремы Мюнца (без теоремы Вейерштрасса).

Доказательство. Тождество (9) при замене всех β_k на α_k дает непосредственно тождество

$$1 = \sum_{k=1}^n q_{k,n}(x). \tag{16}$$

Далее, полагая в тождестве (1) $\beta_0 = \alpha_1$ и $\beta_k = \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$, умножая его на $\frac{x^z}{2\pi i}$ и интегрируя обе его части по контуру $|z| = 1 + \alpha_n$, мы получим опять, так же как и раньше, что

$$x^{\alpha_1} = -\sum_{k=0}^n \frac{(\alpha_{k+1}-\alpha_1)\cdots(\alpha_n-\alpha_1)}{2\pi i} \int_C \frac{x^z dz}{(\alpha_k - z)\cdots(\alpha_n - z)} = \sum_{k=0}^n \tau_{k,n}^{\alpha_1} q_{k,n}(x). \tag{17}$$

Наконец, полагая в тождестве (1) $\beta_0 = 2\alpha_1$, $\beta_k = \alpha_k$, $k = 1, \ldots, n$, мы получим также, что

$$x^{2\alpha_1} = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_n}\right) q_{k,n}(x) +$$

$$+ \alpha_1 \prod_{s=1}^n \left(1 - \frac{2\alpha_1}{\alpha_s}\right) \overline{q}_{k,n}(x), \tag{18}$$

где $\overline{q}_{k,n}(x)$ есть также полином, удовлетворяющий условиям (11).

Положим теперь

$$\tau'_{k,n} = \prod_{s=k+1}^{n}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_s}\right), \quad 0\leqslant k\leqslant n-1, \quad \tau'_{n,n}=1,$$

$$\rho_n = \prod_{k=\nu}^{n}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\right), \quad \rho'_n = \prod_{k=\nu}^{n}\left(1-\frac{2\alpha_1}{\alpha_k}\right), \quad \alpha_{\nu-1}\leqslant 3\alpha_1<\alpha_\nu, \tag{19}$$

и рассмотрим сумму $S'_2(x)$:

$$S'_2(x) = \sum_{k=0}^{n}(x^{2\alpha_1} - 2\tau^{\alpha_1}_{k,n}x^{\alpha_1} + \tau'_{k,n})\, q_{k,n}(x). \tag{20}$$

На основании тождеств (16), (17) и (18), мы будем иметь неравенство

$$|S'_2(x)| = |\tau'_{0,n}|\,|q_{0,n}(x) - \alpha_1\overline{q}_{0,n}(x)\,| < c_0\rho'_n < c_0\rho_n^2, \tag{21}$$

так как полиномы $q_{0,n}(x)$ и $\overline{q}_{0,n}(x)$ неотрицательны и при $0\leqslant x\leqslant 1$ не превышают единицы, где c_0 — постоянная.

Рассмотрим сумму $S_2^{(n)}(x)$:

$$S_2^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(x^{\alpha_1} - \tau^{\alpha_1}_{k,n})^2\, q_{k,n}(x) = S'_2(x) + S_2^{(n)}(x) - S'_2(x) =$$

$$= S'_2(x) + \sum_{k=0}^{n-1}[\tau^{2\alpha_1}_{k,n} - \tau'_{k,n}]\, q_{k,n}(x). \tag{22}$$

Из этих равенств мы получаем оценку

$$0 < S_2^{(n)}(x) < c\rho_n^2 + \max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|\tau^{2\alpha_1}_{k,n} - \tau'_{k,n}|. \tag{23}$$

Далее мы будем иметь, что при $k<\nu-1$

$$|\tau^{2\alpha_1}_{k,n} - \tau'_{k,n}| < c_1\rho_n^2, \quad \alpha_{\nu-1}\leqslant 3\alpha_1<\alpha_\nu \tag{24}$$

и при $n-1\geqslant k\geqslant \nu-1$

$$0<\tau^{2\alpha_1}_{k,n} - \tau'_{k,n} = \prod_{s=k+1}^{n}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2 - \prod_{s=k+1}^{n}\left[\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2 - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_s^2}\right] <$$

$$< \frac{\alpha_1^2}{\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right)^2}\sum_{k+1}^{n}\frac{1}{\alpha_s^2}\prod_{k+1}^{n}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2 < c_2\sum_{k+1}^{n}\frac{1}{\alpha_s^2}\prod_{k+1}^{n}\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2 <$$

$$< \frac{c_3}{\alpha_{k+1}}\, e^{-2\alpha_1\sum\limits_{k+1}^{n}\frac{1}{\alpha_s}}, \tag{25}$$

так как

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k - b_k) \geqslant \prod_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{n}b_k\prod_{k=1}^{n}a_k, \quad a = \min_{1\leqslant k\leqslant n} a_k > 0, \tag{26}$$

если $a_k \geqslant b_k \geqslant 0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Это последнее неравенство очевидно при $n=1$ и доказывается без всякого труда по индукции.

Но, в силу расходимости ряда $\sum \frac{1}{\alpha_k}$ и условия $\lim\limits_{k=\infty} \alpha_k = \infty$, мы будем иметь, что

$$\lim_{n=\infty} \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \frac{1}{\alpha_{k+1}} e^{-2\alpha_1 \sum\limits_{k+1}^{n} \frac{1}{\alpha_s}} = 0. \tag{27}$$

Неравенства (23), (24) и (25) показывают, что

$$\lim_{n=\infty} S_2^{(n)}(x) = 0, \tag{28}$$

так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_k} = \infty$ и $\lim\limits_{k=\infty} \alpha_k = \infty$.

Рассмотрим разность

$$f(x) - B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} [f(x) - f(\tau_{k,n})] q_{k,n}(x) =$$

$$= \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\tau_{k,n}| \leqslant \delta}}^{n} [f(x) - f(\tau_{k,n})] q_{k,n}(x) + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-\tau_{k,n}| > \delta}}^{n} [f(x) - f(\tau_{k,n})] q_{k,n}(x). \tag{29}$$

Отсюда непосредственно имеем неравенства

$$|f(x) - B_n(f, x)| < \max_{\substack{|x-y| \leqslant \delta \\ a' \leqslant x \leqslant y \leqslant b'}} |f(x) - f(y)| + \frac{2M}{\alpha_1^2 \delta^2} S_2^{(n)}(x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{30}$$

$$n \geqslant n_0(\varepsilon),$$

где M есть максимум $|f(x)|$ на $[0,1]$, причем $f(x)$ непрерывна на $[a', b']$ и $S_2^{(n)}(x)$ стремится равномерно на $[0,1]$ к нулю с ростом n.

Этим наша теорема доказана. Пусть теперь числа $\lambda_{k,n}$ удовлетворяют условиям (15). Тогда нетрудно заметить, что

$$S_3^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (x^{\alpha_1} - \lambda_{k,n}^{\alpha_1})^2 q_{k,n}(x) < \rho_2^{(n)}(x) + c \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |\tau_{k,n} - \lambda_{k,n}|, \tag{31}$$

где c не зависит от x, k и n.

Отсюда следует опять, что $S_3^{(n)}(x)$ стремится к нулю вместе с ростом n равномерно по x.

Совершенно так же, как и раньше, мы получаем неравенство

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f(\lambda_{k,n}) q_{k,n}(x) \right| < \max_{\substack{|x-y| \leqslant \delta \\ a' \leqslant x \leqslant y \leqslant b'}} |f(x) - f(y)| + \frac{c_1 M}{\delta^2} S_3^{(n)}(x), \tag{32}$$

что и доказывает равномерную на $[a, b]$ сходимость этих полиномов к $f(x)$.

Дадим оценку скорости сходимости наших полиномов к $f(x)$, если $f(x)$ удовлетворяет условиям Липшица, другими словами, если

на $[0, 1]$

$$|f(x_1) - f(x_2)| < k\,|x_1 - x_2|^{\lambda}, \quad 0 < \lambda \leqslant 1, \tag{33}$$

где k — постоянная. Для этой цели рассмотрим сумму

$$S_1^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} |x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1}|^{\lambda} q_{k,n}(x). \tag{34}$$

Пользуясь хорошо известными неравенствами Гельдера, мы непосредственно получим оценку:

$$S_1^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[(x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1})^2 q_{k,n}(x)\right]^{\frac{\lambda}{2}} q_{k,n}^{1-\frac{\lambda}{2}}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{k=0}^{n} (x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1})^2 q_{k,n}(x)\right]^{\frac{\lambda}{2}} \left[\sum_{k=0}^{n} q_{k,n}(x)\right]^{1-\frac{\lambda}{2}} = [S_2^{(n)}(x)]^{\frac{\lambda}{2}}, \tag{35}$$

где $S_2^{(n)}(x)$ определена равенством (22).

Воспользовавшись неравенствами (23), (24) и (25) для суммы $S_2^{(n)}(x)$, мы непосредственно получим неравенство для $S_1^{(n)}(x)$, именно

$$S_1^{(n)}(x) \leqslant [S_2^{(n)}(x)]^{\frac{\lambda}{2}} < c_4 \left[\rho_n^2 + \max_{\nu \leqslant k+1 \leqslant n} \sum_{k+1}^{n} \frac{1}{\alpha_s^2} \prod_{s=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^2\right]^{\frac{\lambda}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant c_4 \left[\rho_n^{\lambda} + \max_{\nu \leqslant k+1 \leqslant n} \left(\sum_{k+1}^{n} \frac{1}{\alpha_s^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \prod_{s=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^{\lambda}\right], \tag{36}$$

где ν определено неравенствами (19), а c_4 — постоянная, не зависящая ни от x, ни от n.

ТЕОРЕМА II. *Если $f(x)$ на $[0,1]$ удовлетворяет условию (33), то имеет место неравенство*:

$$|f(x) - B_n(f, x)| < c_5 k \left[\rho_n^{\lambda} + \max_{\nu \leqslant k+1 \leqslant n} \left(\sum_{k+1}^{n} \frac{1}{\alpha_s^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \prod_{k+1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^{\lambda}\right]. \tag{37}$$

Действительно, в силу соотношения (29) и неравенства (33),

$$|f(x) - B_n(f, x)| < k \sum_{0}^{n} |x - \tau_{k,n}|^{\lambda} q_{k,n}(x). \tag{38}$$

Но при $\alpha_1 > 0$ мы будем иметь неравенство

$$|x - \tau_{k,n}| < |x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1}| \max_{0 \leqslant k \leqslant x} \left|\frac{x - \tau_{k,n}}{x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1}}\right| < c_5 |x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1}|, \tag{39}$$

откуда и следует окончательно, что

$$|f(x) - B_n(f, x)| < c_5 k \sum_{k=0}^{n} |x^{\alpha_1} - \tau_{k,n}^{\alpha_1}|^{\lambda} q_{k,n}(x) <$$

$$< c_6 k \left[\rho_n^{\lambda} + \max_{\nu \leqslant k+1 \leqslant n} \left(\sum_{k+1}^{n} \frac{1}{\alpha_s^2}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \prod_{s=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_s}\right)^{\lambda}\right]. \tag{40}$$

Этим теорема II доказана.

Полученная оценка в случае, когда $\alpha_k = k$ для всех k, совпадает с оценкой приближения функции полиномами С. Н. Бернштейна.

Поступило
5.V. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов, Серия «Математика в монографиях», М., 1937, 64—71.
[2] Hirschman I. I. and Widder D. V., Generalized Bernstein polynomials, Duke Mathem. Journ., v. 16, N 3 (1949), 433—437.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
11 (1950), 421—442

З. И. КОЗЛОВА

О НАКРЫТИЯХ НЕКОТОРЫХ A-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

Работа является продолжением статьи автора ([5]). Рассматривается вопрос о накрытии плоского A-множества $\mathcal{E} \subset I_{xy}$, пересекаемого параллелями к оси ординат по множествам абсолютно первого класса подкласса не выше $\alpha < \Omega$, плоским B-множеством H, обладающим тем же свойством.

В настоящей работе мы будем рассматривать множества, лежащие в пространстве произведений двух бэровских пространств $I_{xy} = I_x \times I_y$, которое в дальнейшем будем называть плоскостью; множества, лежащие в этом пространстве, будем называть плоскими множествами.

Для каждого плоского множества $\mathcal{E} \subset I_{xy}$ будем рассматривать семейство всех линейных множеств $P_x \cdot \mathcal{E}$, где P_x обозначает множество всех точек плоскости с постоянной абсциссой x. Нас будут интересовать некоторые взаимоотношения между свойствами плоского множества $\mathcal{E}$ и свойствами всех его сечений $P_x \cdot \mathcal{E}$, а именно: в том случае, когда $\mathcal{E}$ является плоским A-множеством, а все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ обладают некоторым структурным свойством K, то существует ли B-множество H, содержащее $\mathcal{E}$ и такое, что все множества $P_x \cdot H$ обладают тем же свойством K? Задачи такого рода часто называются задачами о *накрытии* A-множеств.

Ряд задач о накрытии A-множеств был решен ранее.

Именно, в случае, когда свойство K таково: «состоять не более чем из одной точки», возможность накрытия была доказана В. И. Гливенко ([1]), ([2]).

В случае, когда свойство K таково: «состоять из счетного множества точек», возможность накрытия была доказана Н. Н. Лузиным [([2]), стр. 247].

Случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ состоят не более чем из n точек, для любого фиксированного натурального числа n, был рассмотрен П. С. Новиковым ([3]).

В дальнейшем теорема П. С. Новикова была обобщена на ряд случаев:

1) Случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ состоят из конечного, но быть может неограниченного числа точек, был рассмотрен А. А. Ляпуновым ([4]).

2) Случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ являются вполне упорядоченными вверх множествами, был рассмотрен А. А. Ляпуновым ([4]).

3) Случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ являются вполне упорядоченными вверх множествами порядка $< \alpha$, где α — трансфинитное число $< \Omega$, был рассмотрен мной ([5]).

4) Случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ являются приводимыми * множествами порядка $< \alpha$, где $\alpha < \Omega$, был рассмотрен мной (5).

5) Случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ являются рассеянными ** множествами порядка $< \alpha$, где $\alpha < \Omega$, был рассмотрен мной (5).

Кроме того, мною была решена та же задача для случая, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ компактны (5).

Цель настоящей статьи — продолжить работы по изучению накрытий A-множеств. Нас будет интересовать тот случай, когда все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ являются множествами абсолютно первого класса подкласса не выше α, где $\alpha < \Omega$. Мы покажем, что накрытие плоского A-множества $\mathcal{E} \subset I_{xy}$ плоским B-множеством в этом случае имеет место.

Семейство компактных множеств назовем *рассеянным*, если во всяком его подсемействе найдется компактное множество, которое можно отделить от суммы всех остальных множеством нулевого класса или просто порцией.

Множество E называется множеством *абсолютно первого класса*, если на всяком компактном множестве, пересекающемся с ним, у него найдется компактная порция (или точка локальной компактности) (6). Такое множество можно представить как сумму рассеянного семейства компактных множеств.

Пусть $E \equiv E^{\{0\}}$ есть линейное множество абсолютно первого класса. Если α — трансфинитное число первого рода, то обозначим через $E^{\{\alpha\}}$ множество, которое получается из множества $E^{\{\alpha-1\}}$ путем выбрасывания всех его компактных порций; если α — трансфинитное число второго рода, то положим

$$E^{\{\alpha\}} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{\{\alpha'\}}.$$

Наименьшее трансфинитное число β такое, что

$$E^{\{\beta\}} = 0,$$

называется *подклассом* множества E. Известно существование множеств абсолютно первого класса сколь угодно высоких подклассов.

ЛЕММА 1. *Сумма двух множеств абсолютно первого класса есть множество абсолютно первого класса подкласса, не превосходящего натуральной *** суммы подклассов слагаемых множеств.*

---

* Множество точек E, у которого одно из последовательных производных множеств $E', E'', \ldots, E^{(\alpha)}, \ldots$ пусто, называется *приводимым* множеством.

** *Рассеянным* множеством называется всякое множество точек, не имеющее плотного в себе подмножества.

*** Всякое трансфинитное число α можно записать в виде полинома, расположенного по убывающим трансфинитным степеням ω, $\alpha = \sum_{\xi}^{u} \omega^{\xi} \lambda_{\xi}$, где ξ — трансфинитные числа, не превосходящие трансфинитного числа u, а коэффициенты λ_{ξ} являются конечными целыми неотрицательными числами.

Натуральной суммой двух трансфинитных чисел $\alpha = \sum_{\xi}^{u} \omega^{\xi} \lambda_{\xi}$, $\beta = \sum_{\eta}^{v} \omega^{\eta} \lambda_{\eta}$, где $u \leqslant v$, называется $\sigma(\alpha, \beta) = \sum_{\xi}^{v} \omega^{\xi} (\lambda_{\xi} + \lambda'_{\xi})$ [см. (7), стр. 73].

Доказательство. Пусть P и Q — два множества абсолютно первого класса подклассов соответственно α и β, принадлежащие пространству I_x, и пусть

$$H = P + Q.$$

Известно, что множество H будет множеством абсолютно первого класса. Определим подкласс множества H. Используем для этого метод трансфинитной индукции.

Пусть $\alpha = 1$ и $\beta = 1$. Каждое из множеств P и Q является суммой изолированных друг от друга компактных множеств. Если точка $p \in P$, то она принадлежит некоторому изолированному компактному множеству $e \subset P \equiv P^{\{0\}}$. Пусть δ есть порция области I_x, содержащая множество e и не содержащая никаких других точек множества P. В порцию δ, а следовательно, и в смежный интервал λ_k множества e относительно δ, может попасть часть множества Q подкласса 1, являющаяся суммой не более как счетного числа изолированных друг от друга компактных множеств. Тогда множество e будет изолированным компактным подмножеством множества $H^{\{1\}}$, не более, и точка p самое большее может принадлежать множеству $H^{\{1\}}$.

Аналогично, если точка $q \in Q$, то она может принадлежать самое большее множеству $H^{\{1\}}$, $q \in H^{\{1\}}$.

Следовательно, подкласс множества H не превосходит $2 = \sigma(1, 1)$.

Пусть α — трансфинитное число первого рода, $\beta = 1$, и для всех чисел $\alpha' < \alpha$ и $\beta = 1$ лемма верна.

Если точка $p \in P$, то

$$p \in P^{\{\alpha'\}} - P^{\{\alpha'+1\}},$$

где $\alpha' \leqslant \alpha - 1$, следовательно, существует изолированное компактное множество $e \subset P^{\{\alpha'\}}$, содержащее точку p. Пусть δ есть порция области I_x, которая содержит множество e и не содержит никаких других точек множества $P^{\{\alpha'\}}$. Если $\alpha' < \alpha - 1$, то множество $\delta \cdot P$ будет подкласса $\alpha' + 1 \leqslant \alpha - 1$. Множество $\delta \cdot Q$ будет подкласса, не превосходящего 1. По предположению, множество

$$h = \delta \cdot P + \delta \cdot Q$$

будет подкласса, не превосходящего $(\alpha' + 1) + 1 = \alpha' + 2 \leqslant \alpha$.

Если $\alpha' = \alpha - 1$, то рассмотрим любой смежный интервал λ_k множества e относительно δ. Множество $P \cdot \lambda_k$ будет подкласса $\alpha - 1$, а $Q \cdot \lambda_k$ — подкласса, не превосходящего 1. По предположению, множество

$$h_k = P \cdot \lambda_k + Q \cdot \lambda_k$$

будет подкласса, не превосходящего $(\alpha - 1) + 1 = \alpha$. Следовательно, множество e будет принадлежать самое большее множеству $H^{\{\alpha\}}$.

Пусть точка $q \in Q$. Существует изолированное компактное множество $e^* \subset Q^{\{0\}}$ такое, что $e^* \ni q$. Пусть δ^* есть порция области I_x, которая

содержит в себе множество e^* и не содержит никаких других точек множества Q. В каждый из смежных интервалов λ_k^* множества e^* относительно δ^* может попасть часть множества P подкласса самое большее α. Тогда множество e^* будет принадлежать самое большее множеству $H^{\{\alpha\}}$. Следовательно, подкласс множества H не превосходит $\alpha + 1 = \sigma(\alpha, 1)$.

Пусть α — трансфинитное число второго рода, $\beta = 1$, и для всех чисел $\alpha' < \alpha$ и $\beta = 1$ лемма верна.

Если точка $p \in P$, то

$$p \in P^{\{\alpha'\}} - P^{\{\alpha'+1\}},$$

где $\alpha' < \alpha$. Следовательно, существует изолированное компактное множество $e \subset P^{\{\alpha'\}}$ такое, что $e \ni p$. Пусть δ есть порция области I_x, содержащая e и не содержащая никаких других точек множества $P^{\{\alpha'\}}$. Множество $\delta \cdot P$ будет подкласса $\alpha' + 1$, а множество $\delta \cdot Q$ — подкласса, не превышающего 1. По предположению, множество

$$h = P \cdot \delta + Q \cdot \delta$$

будет подкласса, не превосходящего $(\alpha' + 1) + 1 = \alpha' + 2 < \alpha$.

Если точка $q \in Q$, то существует изолированное компактное множество $e^* \subset Q \equiv Q^{\{0\}}$ такое, что $e^* \in q$. Пусть δ^* есть порция области I_x содержащая в себе e^* и не содержащая никаких других точек множества Q. В каждый из смежных интервалов λ_k^* множества e^* относительно δ^* может попасть самое большее часть множества P подкласса α. Тогда множество e^* будет принадлежать самое большее множеству $H^{\{\alpha\}}$.

Следовательно, множество H будет подкласса, не превосходящего $\alpha + 1 = \sigma(\alpha, 1)$.

Таким образом, лемма верна для любого трансфинитного числа α и $\beta = 1$.

Пусть α — произвольное трансфинитное число, $\beta = \beta^* + 1$, и для всех подклассов α и $\beta' < \beta$ лемма верна.

Множество $Q^{\{\beta-1\}}$ есть сумма изолированных друг от друга компактных множеств, т. е. является множеством абсолютно первого класса подкласса 1, а множество $Q \cdot CQ^{\{\beta-1\}}$ есть множество абсолютно первого класса подкласса $\beta - 1 = \beta^*$. Тогда множество

$$H^* = P + Q \cdot CQ^{\{\beta-1\}},$$

по предположению, будет множеством абсолютно первого класса подкласса, не превосходящего $\sigma(\alpha, \beta^*)$. Множество

$$H = H^* + Q^{\{\beta-1\}}$$

будет подкласса, не превосходящего $\sigma(\alpha, \beta^*) + 1 = \sigma(\alpha, \beta)$.

Пусть α есть произвольное трансфинитное число, а $\beta = \omega^\gamma$, и для всех подклассов α и $\beta' < \beta$ лемма верна.

Если $\alpha < \beta$, то лемма верна по предположению.

Если $\alpha = \beta$, то пусть точка $p \in P$. Имеем

$$p \in P^{\{\alpha'\}} - P^{\{\alpha'+1\}},$$

где $\alpha' < \alpha$. Существует изолированное компактное множество $e \subset P^{\{\alpha'\}}$, содержащее точку p. Пусть δ есть порция области I_x, содержащая множество e и не содержащая никаких других точек множества $P^{\{\alpha'\}}$. Множество $P \cdot \delta$ будет подкласса $\alpha' + 1 < \alpha$, а множество $Q \cdot \delta$ — подкласса $\beta = \alpha$. По предположению, множество

$$h = P \cdot \delta + Q \cdot \delta$$

будет множеством абсолютно первого класса подкласса, не превосходящего $\beta + (\alpha' + 1) < \beta \cdot 2$. То же самое будем иметь для каждой точки $q \in Q$. Так как числа $\alpha' + 1 < \alpha = \beta = \omega^\gamma$ при любом $\alpha' < \alpha$, то множество H будет множеством абсолютно первого класса подкласса, не превосходящего $\beta \cdot 2 = \omega^\gamma \cdot 2 = \sigma(\alpha, \beta)$.

Пусть $\alpha > \beta$. Предположим, что для всех подклассов $\alpha' < \alpha$ и $\beta = \omega^\gamma$ лемма верна. Число α можно записать в виде

$$\alpha = \mu + \omega^\gamma + \nu, \quad \mu \geqslant \omega^\gamma, \quad \nu < \omega^\gamma.$$

Если $\nu \neq 0$, то множество $P^{\{\mu+\omega^\gamma\}}$ будет множеством абсолютно первого класса подкласса ν, а множество $P \cdot CP^{\{\mu+\omega^\gamma\}}$ — подкласса $\mu + \omega^\gamma$. Множество

$$H^* = Q + P \cdot CP^{\{\mu+\omega^\gamma\}},$$

по предположению, будет множеством абсолютно первого класса подкласса, не превосходящего $\sigma(\omega^\gamma, \mu + \omega^\gamma) = \mu + \omega^\gamma \cdot 2$. Множество

$$H = H^* + P^{\{\mu+\omega^\gamma\}}$$

будет подкласса, не превосходящего $\mu + \omega^\gamma \cdot 2 + \nu = \sigma(\alpha, \beta)$.

Если $\nu = 0$, то множество $P^{\{\mu\}}$ будет подкласса ω^γ, а множество $P \cdot CP^{\{\mu\}}$ — подкласса μ. Множество

$$H^* = P \cdot CP^{\{\mu\}} + Q,$$

по предположению, будет подкласса, не превосходящего $\mu + \omega^\gamma = \alpha = \sigma(\mu, \omega^\gamma)$. Множество

$$H = H^* + P^{\{\mu\}}$$

будет множеством абсолютно первого класса подкласса, не превосходящего $\alpha + \omega^\gamma = \sigma(\alpha, \beta)$.

Пусть α — произвольное трансфинитное число, $\beta = \varkappa + \omega^\gamma$, где $\varkappa \geqslant \omega^\gamma$, и для всех подклассов α и $\beta' < \beta$ лемма верна.

Множество $Q^{\{\varkappa\}}$ будет подкласса ω^γ, а множество $Q\cdot CQ^{\{\varkappa\}}$ — подкласса $\varkappa$. Тогда, по предположению, множество

$$H^* = P + Q\cdot CQ^{\{\varkappa\}}$$

будет подкласса, не превосходящего $\sigma(\alpha, \varkappa)$.

По тому же предположению, множество

$$H = H^* + Q^{\{\varkappa\}}$$

будет подкласса, не превосходящего натуральной суммы $\sigma(\alpha, \varkappa) + \omega^\gamma = \sigma(\alpha, \beta)$.

Таким образом, лемма справедлива при всех значениях α и β, меньших Ω, что и требовалось доказать.

Будем рассматривать плоские множества $\mathcal{E}$, для которых все множества $P_x\cdot\mathcal{E}$ являются множествами абсолютно первого класса.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что все подклассы множеств $P_x\cdot\mathcal{E}$ меньше α, когда x пробегает I_x, назовем *порядком* множества $\mathcal{E}$.

Известно существование плоских B-множеств порядка Ω [([6]), стр. 422].

ТЕОРЕМА I. *Всякое плоское А-множество $\mathcal{E}\subset I_{xy}$, для которого все множества $P_x\cdot\mathcal{E}$ являются множествами абсолютно первого класса, порядка $\alpha<\Omega$, можно накрыть таким же плоским В-множеством порядка, не превосходящего α.*

Эта теорема получается как следствие другой, более общей теоремы.

Рассмотрим линейное множество E, замыкание которого компактно.

Семейство множеств $\{E\}$ назовем *рассеянным*, если во всяком его подсемействе найдется множество E, которое отделимо от суммы всех остальных множеством класса нуль или просто порцией.

Будем рассматривать линейные множества L, являющиеся суммами рассеянного семейства множеств, замыкание которых компактно.

Пусть $L\equiv L^{(0)}$. Если α есть трансфинитное число первого рода, то обозначим через $L^{(\alpha)}$ множество, которое получается из множества $L^{(\alpha-1)}$ путем удаления всех его изолированных порций, замыкание которых компактно; если α — трансфинитное число второго рода, то положим

$$L^{(\alpha)} = \prod_{\alpha'<\alpha} L^{(\alpha')}.$$

Наименьшее число β такое, что

$$L^{(\beta)} = 0,$$

назовем *индексом* множества L.

Замечание 1. Если L есть множество абсолютно первого класса подкласса α, то индекс множества L не превосходит α.

Будем рассматривать плоские множества $\mathcal{E}$, для которых каждое из множеств $P_x\cdot\mathcal{E}$ является суммой рассеянного семейства множеств с компактным замыканием.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что все индексы множеств $P_x\cdot\mathcal{E}$ меньше α, когда x пробегает I_x, назовем *высотой* множества $\mathcal{E}$.

Замечание 2. Высота плоского множества $\mathcal{E}$, для которого все множества $P_x \cdot \mathcal{E}$ являются множествами абсолютно первого класса, не превосходит порядка множества $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}^{(0)}$. Обозначим через $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ множество, образованное всеми точками $(\mathcal{E} \cdot P_x)^{(\alpha)}$, когда x пробегает I_x.

ЛЕММА 2. *Если $\mathcal{E} \subset I_{xy}$ есть плоское A-множество, то и $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ есть A-множество при всех $\alpha < \Omega$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}^{(0)}$ есть плоское A-множество.

Если построены все плоские множества $\mathcal{E}^{(\beta)}$, являющиеся A-множествами при всех $\beta < \alpha$, где α — трансфинитное число первого рода, то положим

$$\mathcal{E}^{(\alpha-1)} = \mathcal{E}_0^{(\alpha-1)}.$$

Пусть

$$E^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} = \Pi_x (\mathcal{E}^{(\alpha-1)} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}),$$

где $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$ есть полоса Бэра n-го ранга, т. е. совокупность всех точек пространства I_{xy}, ординаты которых принадлежат интервалу Бэра n-го ранга $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$ на оси OY. На A-множестве

$$V^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = \overline{\lim_{i_n}} E^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n} \tag{1}$$

в полосе $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ построим плоское A-множество

$$Q^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = V^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \tag{2}$$

и рассмотрим A-множество

$$\mathcal{E}^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = Q^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)}. \tag{3}$$

Множество $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, в силу (1), (2) и (3), имеет точки в бесконечном числе полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$, подчиненных полосе $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$, если $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \neq 0$. Если же $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = 0$, но $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \neq 0$, то это значит, что множество $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)} I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ имеет точки лишь в конечном числе полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$, подчиненных полосе $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$.

A-множество

$$\mathcal{E}_n^{(\alpha-1)} = \sum_{i_1 i_2, \ldots, i_{n-1}} \mathcal{E}^{(\alpha-1)}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$$

состоит из всех порций $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)}$, имеющих точки в бесконечном числе подчиненных полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$.

Множество

$$\mathcal{E}^{(\alpha)} = \overline{\lim_{n}} \mathcal{E}_n^{(\alpha-1)}$$

будет A-множеством, получаемым из множества $\mathcal{E}^{(\alpha-1)}$ путем удаления с каждого перпендикуляра P_x всех порций множества $P_x \cdot \mathcal{E}^{(\alpha-1)}$ с компактным замыканием.

Действительно, если точка $q(x_0, y_0) \in \mathscr{E}^{(\alpha-1)} \cdot C\mathscr{E}^{(\alpha)}$, то $q(x_0, y_0) \in \mathscr{E}^{(\alpha-1)}$ и

$$q(x_0, y_0) \in C\mathscr{E}^{(\alpha)} = C\,\overline{\lim_n}\,\mathscr{E}_n^{(\alpha-1)} = \underline{\lim_n}\, C\mathscr{E}_n^{(\alpha-1)}.$$

Значит, $q(x_0, y_0) \in C\mathscr{E}_n^{(\alpha-1)}$ при всех $n \geqslant m$, где m — некоторое натуральное число. Следовательно, на прямой P_{x_0} в каждой полосе $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} \ni q(x_0, y_0)$ множество $P_{x_0} \cdot \mathscr{E}^{(\alpha-1)}$ имеет точки, принадлежащие лишь конечному числу подчиненных полос n-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$ при всех $n \geqslant m$. Это значит, что множество $P_{x_0} \cdot \mathscr{E}^{(\alpha-1)} I_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1}}$ является порцией множества $P_{x_0} \cdot \mathscr{E}^{(\alpha-1)}$ с компактным замыканием, содержащей точку $q(x_0, y_0)$ и не вошедшей в множество $\mathscr{E}^{(\alpha)}$.

Если же точка

$$p(x_1, y_1) \in \mathscr{E}^{(\alpha)} = \overline{\lim_n}\, \mathscr{E}_n^{(\alpha-1)},$$

то это означает, что $p(x_1, y_1) \in \mathscr{E}_n^{(\alpha-1)}$ при бесконечном числе значений n, например, $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$. Следовательно, в каждой полосе (n_k-1)-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n_k-1}} \ni p(x_1, y_1)$ множество $P_{x_1} \cdot \mathscr{E}^{(\alpha-1)}$ имеет точки, содержащиеся в бесконечном числе подчиненных полос n_k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{n_k}}$. Следовательно, точка $p(x_1, y_1)$ не попадает ни в одну из порций множества $P_{x_1} \cdot \mathscr{E}^{(\alpha-1)}$ с компактным замыканием.

Если построены все множества $\mathscr{E}^{(\beta)}$, являющиеся A-множествами при всех $\beta < \alpha$, где α — трансфинитное число второго рода, то множество

$$\mathscr{E}^{(\alpha)} = \prod_{\beta<\alpha} \mathscr{E}^{(\beta)}$$

есть также A-множество, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3. Если $H \subset I_{xy}$ есть плоское B-множество такое, что все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса, то и $H^{(\alpha)}$, а также $H_n^{(\alpha)}$ при всех $\alpha < \Omega$ будут B-множествами.

Это следует из того, что множества абсолютно первого класса есть одновременно абсолютные F_σ и G_δ, а в то же время В. Я. Арсенин ([9]) доказал, что проекция на ось OX плоского B-множества H, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются абсолютными F_σ, есть B-множество.

ТЕОРЕМА II. *Всякое плоское A-множество $\mathscr{E} \subset I_{xy}$, для которого каждое из множеств $P_x \cdot \mathscr{E}$ является суммой рассеянного семейства множеств с компактным замыканием, высоты $\alpha < \Omega$, можно накрыть плоским B-множеством H, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса, порядка, не превосходящего α.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathscr{E} \subset I_{xy}$ есть плоское A-множество, для которого все множества $P_x \cdot \mathscr{E}$ являются суммами рассеянного семейства множеств с компактным замыканием, высоты $\alpha < \Omega$.

Применим метод трансфинитной индукции. Достаточно показать, что теорема верна для

1) $\alpha = 2$,
2) $\alpha = \alpha^* + n$, где $n \geqslant 2$, α^* — трансфинитное число второго рода,
3) α — трансфинитное число второго рода,
4) $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода.

Пусть $\alpha=2$. Это значит, что $\mathscr{E}^{(1)}=0$ и все множества $P_x\cdot\mathscr{E}$ индекса 1, т. е. являются суммами изолированных друг от друга множеств, замыкания которых компактны. Но

$$\mathscr{E}^{(1)}=\overline{\lim_n}\,\mathscr{E}_n^{(0)}=0,$$

где $\mathscr{E}_0^{(0)}\equiv\mathscr{E}^{(0)}\equiv\mathscr{E}$, а $\mathscr{E}_n^{(0)}$ состоит из всех порций $P_x\cdot\mathscr{E}^{(0)}$, $I_{i_1i_2\ldots i_{n-1}}$, имеющих точки в бесконечном числе подчиненных полос n-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{n-1}i_n}$. Каждое из множеств $\mathscr{E}_n^{(0)}$ есть A-множество. Множество $\mathscr{E}^{(1)}$ можно записать в виде

$$\mathscr{E}^{(1)}=\overline{\lim_n}\,\mathscr{E}_n^{(0)}=(\mathscr{E}_0^{(0)}+\mathscr{E}_1^{(0)}+\mathscr{E}_2^{(0)}+\cdots)\cdot(\mathscr{E}_1^{(0)}+\mathscr{E}_2^{(0)}+\cdots)\cdot$$
$$\cdot(\mathscr{E}_2^{(0)}+\cdots)\cdots=\prod_{n=0}^{\infty}K_n^{(0)}=0, \qquad (4)$$

где A-множество

$$K_n^{(0)}=\sum_{k=n}^{\infty}\mathscr{E}_k^{(0)}$$

получается из множества $\mathscr{E}$ путем удаления с каждого перпендикуляра P_x порций $P_x\cdot\mathscr{E}\cdot I_{i_1i_2\ldots i_m}$, точки которых одновременно содержатся в конечном числе полос k-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{k-1}i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}$ при всех $k\geqslant m$ и при $m\geqslant n$, так как

$$\mathscr{E}\cdot CK_n^{(0)}=\mathscr{E}\cdot C\sum_{k=n}^{\infty}\mathscr{E}_k^{(0)}=\mathscr{E}\cdot\prod_{k=n}^{\infty}C\mathscr{E}_k^{(0)}.$$

Само множество $K_n^{(0)}$ пересекается любой параллелью оси OY по множеству, точки которого содержатся в бесконечном числе полос k-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{k-1}i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}$, хотя бы при одном k, где $k\geqslant n$. Очевидно, что $K_n^{(0)}\supset K_m^{(0)}$, если $n<m$.

Рассмотрим A-множества

$$\Gamma_n^{(0)}=\Pi_x K_n^{(0)},\quad n=0,1,2,\ldots,$$

где $\Gamma_n^{(0)}\supset\Gamma_m^{(0)}$, если $n<m$. Пусть

$$N=\prod_{n=0}^{\infty}\Gamma_n^{(0)}.$$

Построим плоское множество $N\times I_y$ и образуем A-множество

$$U_1=(N\times I_y)\cdot\mathscr{E},$$

которое пересекается любой параллелью оси OY по множеству, имеющему точки в бесконечном числе полос k-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{k-1}i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{k-1}}$, при бесконечном числе разных значений k. Действительно, если точка $x\in N$, то прямая P_x пересекает каждое из множеств $K_n^{(0)}$, $n=0,1,2,\ldots$. Так как P_x пересекает множество $K_1^{(0)}$, то найдется такая полоса (m_1-1)-го ранга $I_{i_1i_2\ldots i_{m_1-1}}$, что множество $\mathscr{E}\cdot P_x$ имеет точки в бесконечном числе подчиненных полос

m_1-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1-1} i_{m_1}}$. Но P_x пересекает и множество $K^{(0)}_{m_1+1}$. Следовательно, найдется такая полоса (m_2-1)-го ранга $I_{i'_1 i'_2 \ldots i'_{m_2-1}}$, что множество $\mathscr{E} \cdot P_x$ имеет точки в бесконечном числе подчиненных полос m_2-го ранга $I_{i'_1 i'_2 \ldots i'_{m_2-1} i'_{m_2}}$, где $m_2 \geqslant m_1 + 1 > m_1$ и т д.

Ясно, что $U_1 \subset \mathscr{E}$.

Рассмотрим полосу Бэра p-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_p}$. Пусть

$$\Gamma_n^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \Pi_x (K_n^{(0)} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_p}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что $\Gamma_n^{i_1 i_2 \ldots i_p} \supset \Gamma_m^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, если $n < m$. Пусть

$$N^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \prod_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Построим плоское множество $N^{i_1 i_2 \ldots i_p} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ и образуем A-множество

$$U^{i_1 i_2 \ldots i_p} = (N^{i_1 i_2 \ldots i_p} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_p}) \cdot \mathscr{E},$$

которое пересекается любой параллелью оси OY по множеству, имеющему точки в бесконечном числе полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ при бесконечном числе значений k, так как на такой параллели должны содержаться точки каждого из множеств $K_n^{(0)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Рассмотрим A-множество

$$U_{p+1} = \sum_{i_1 i_2, \ldots, i_p} U^{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Из построения видно, что $U_{p+1} \subset U_p$.

Рассмотрим систему плоских A-множеств

$$\mathscr{E} \equiv U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset U_n \supset \cdots .$$

Покажем, что $\prod\limits_{n=0}^{\infty} U_n = 0$. Действительно, $\prod\limits_{n=0}^{\infty} U_n \subset \mathscr{E}$. Пусть $q(x_0, y_0)$ есть произвольная точка множества $\mathscr{E}$. Так как множество $P_{x_0} \cdot \mathscr{E}$ есть сумма изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием, то найдется такая полоса m-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_m} \ni q(x_0, y_0)$, что $P_{x_0} \cdot \mathscr{E} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_m} \ni q(x_0, y_0)$ будет множеством с компактным замыканием, а это значит, что $q(x_0, y_0) \overline{\in} K_n^{(0)}$ при $n > m$, следовательно,

$$x_0 \overline{\in} \Gamma_n^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \Pi_x (K_n^{(0)} \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_m}) \text{ при } n > m,$$

откуда

$$x_0 \overline{\in} \prod_{n=0}^{\infty} \Gamma_n^{i_1 i_2 \ldots i_m} = N^{i_1 i_2 \ldots i_m}.$$

Значит,

$$q(x_0, y_0) \overline{\in} U^{i_1 i_2 \ldots i_m} = (N^{i_1 i_2 \ldots i_m} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_m}) \cdot \mathscr{E}$$

и

$$q(x_0, y_0) \overline{\in} U_{m+1} = \sum_{i_1 i_2, \ldots, i_m} U^{i_1 i_2 \ldots i_m},$$

откуда

$$q(x_0, y_0) \overline{\in} \prod_{n=0}^{\infty} U_n.$$

Таким образом,

$$\prod_{n=0}^{\infty} U_n = 0.$$

На основании леммы 1 (5), существует такая система B-множеств

$$B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots,$$

что $\sum_{n=0}^{\infty} B_n \supset U_0, B_i \cdot B_j = 0$ при $i \neq j$ и $B_n \cdot U_{n+1} = 0$.

Образуем A-множества

$$R_n = B_n \cdot \mathcal{E}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Рассмотрим множество R_0. Множество

$$T = \Pi_x R_0$$

есть A-множество. Но $B_0 \cdot U_1 = 0$, а

$$U_1 = (N \times I_y) \cdot \mathcal{E}.$$

Значит,

$$T \cdot N = 0.$$

Так как семейство A-множеств удовлетворяет первому принципу отделимости, принадлежащему Н. Н. Лузину [(2), стр. 155 — 178], то существует B-множество L такое, что

$$L \supset T \text{ и } CL \supset N.$$

Построим плоское множество

$$W_0 = L \times I_y.$$

Плоское A-множество

$$M_0 = W_0 \cdot \mathcal{E}$$

таково, что

$$R_0 \subset M_0 \subset \mathcal{E} \cdot CU_1.$$

Рассмотрим A-множества

$$S_n^{(0)} = \Pi_x (M_0 \cdot K_n^{(0)}), \ n = 0, 1, 2, \ldots.$$

В силу того, что $K_n^{(0)} \supset K_m^{(0)}$ при $n < m$ и $B_0 \cdot U_1 = 0$, имеем $S_n^{(0)} \supset S_m^{(0)}$ при $n < m$ и

$$\prod_{n=0}^{\infty} S_n^{(0)} = 0.$$

На основании леммы 1 (5), можно построить систему таких B-множеств

$$D_0, D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots, \tag{5}$$

что $W_0 \supset \sum_{n=0}^{\infty} D_n \supset S_0^{(0)}$, $D_i \cdot D_j = 0$ при $i \neq j$ и $D_n \cdot S_{n+1}^{(0)} = 0$.

Построим плоские множества

$$Q_n = D_n \times I_y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

A-множество

$$\Phi_0 = Q_0 \cdot \mathscr{E}$$

пересекается любой параллелью оси OY по множеству, замыкание которого компактно, так как $\Phi_0 \subset CK_1^{(0)} \cdot \mathscr{E}$, а множество $CK_1^{(0)} \cdot \mathscr{E}$ пересекаются любой параллелью оси OY по множеству, точки которого содержатся в конечном числе полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$, одновременно при всех $k \geqslant 1$.

Так как замыкание A-множества Φ_0 вдоль оси OY есть A-множество $\overline{\Phi}_0$, пересекаемое параллелями оси OY по компактным множествам, причем $\Phi_0 \subset \overline{\Phi}_0 \subset Q_0$, то, на основании теоремы IV ([5]), множество $\overline{\Phi}_0$, а следовательно, и множество Φ_0, можно накрыть плоским B-множеством $H_0 \subset Q_0$, которое пересекается любой параллелью оси OY по компактному множеству.

Рассмотрим A-множество

$$\Phi_n = Q_n \cdot \mathscr{E}.$$

A-множество

$$\Phi_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Phi_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

пересекается любой параллелью оси OY по множеству с компактным замыканием, так как

$$\Phi^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset CK_{n+1}^{(0)} \cdot \mathscr{E},$$

а множество $CK_{n+1}^{(0)} \cdot \mathscr{E}$ пересекается любой параллелью оси OY по множеству, точки которого содержатся в конечном числе полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$, одновременно при всех $k \geqslant n+1$.

Так как замыкание A-множества $\Phi_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ вдоль оси OY есть A-множество $\overline{\Phi}_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, пересекаемое параллелями оси OY по компактным множествам, причем

$$\Phi_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset \overline{\Phi}_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset Q_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

то, на основании теоремы IV ([5]), множество $\overline{\Phi}_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, а следовательно, и множество $\Phi_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, можно накрыть плоским B-множеством $H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset Q_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, которое пересекается любой параллелью оси OY по компактному множеству.

Тогда A-множество

$$\Phi_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n} \Phi_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset Q_n,$$

для которого все множества $P_x \cdot \Phi_n$ являются суммами изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием $P_x \cdot \Phi_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, можно накрыть B-множеством

$$H_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset Q_n,$$

для которого все множества $H_n \cdot P_x$ являются суммами изолированных друг от друга компактных множеств $P_x \cdot H_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, так как множество

$$P_x \cdot \Phi_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

накрывалось компактным множеством

$$P_x \cdot H_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset I_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

а $I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot I_{i_1' i_2' \ldots i_n'} = 0$, хотя бы при одном $i_k \neq i_k'$. B-множество

$$H^{[0]} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n \subset \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \subset W_0,$$

где $H_n \subset Q_n$, а $Q_n \cdot Q_m = 0$ при $n \neq m$, пересекается параллелями оси OY по множествам, которые являются суммами изолированных друг от друга компактных множеств, и накрывает A-множество

$$M_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n,$$

пересекаемое параллелями оси OY по множествам, которые являются суммами изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием.

Если построены все плоские B-множества W_k для $k \leqslant p-1$ и множества $M_k = W_k \cdot \mathcal{E}$, накрытые соответственно B-множествами $H^{[k]} \subset W_k$, у которых все множества $P_x \cdot H^{[k]}$ являются суммами изолированных друг от друга компактных множеств, то рассмотрим A-множество

$$\widetilde{R}_p = R_p \cdot C \sum_{k=1}^{p-1} W_k.$$

Построим множество

$$\widetilde{R}_p^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \widetilde{R}_p \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Множество

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_p} = \Pi_x \widetilde{R}^{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

есть A-множество. Но $B_p \cdot U_{p+1} = 0$, а

$$U_{p+1} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p} U^{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где

$$U^{i_1 i_2 \dots i_p} = (N^{i_1 i_2 \dots i_p} \times I_{i_1 i_2 \dots i_p}) \cdot \mathscr{E};$$

тогда

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot N^{i_1 i_2 \dots i_p} = 0.$$

На основании первого принципа отделимости для A-множеств ([2]), существует линейное B-множество

$$L^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset C(L + L^{i_1} + L^{i_1 i_2} + \dots + L^{i_1 i_2 \dots i_p})$$

такое, что

$$L^{i_1 i_2 \dots i_p} \supset T^{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad CL^{i_1 i_2 \dots i_p} \supset N^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Построим плоское B-множество

$$W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = L^{i_1 i_2 \dots i_p} \times I_{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

A-множество

$$M_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \mathscr{E}$$

таково, что

$$\widetilde{R}_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset M_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset CU^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \mathscr{E}.$$

Рассмотрим A-множества

$$S^{(0)}_{n;\, i_1 i_2 \dots i_p} = \Pi_x(M_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot K_n^{(0)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

В силу того, что $K_n^{(0)} \supset K_m^{(0)}$ при $n < m$ и $B_p \cdot U_{p+1} = 0$, где

$$U_{p+1} = \sum_{i_1, i_2, \dots i_p} U^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

имеем

$$S^{(0)}_{n;\, i_1 i_2 \dots i_p} \supset S^{(0)}_{m;\, i_1 i_2 \dots i_p} \text{ при } n < m$$

и

$$\prod_{n=0}^{\infty} S^{(0)}_{n;\, i_1 i_2 \dots i_p} = 0.$$

На основании леммы 1 ([5]), можно построить такую систему B-множеств

$$D_0^{i_1 i_2 \dots i_p}, \ D_1^{i_1 i_2 \dots i_p}, \ D_2^{i_1 i_2 \dots i_p}, \dots, D_n^{i_1 i_2 \dots i_p}, \dots,$$

что

$$W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \supset \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \supset S^{(0)}_{0;\, i_1 i_2 \dots i_p},$$

$$D_l \cdot D_j = 0 \text{ при } l \neq j$$

и

$$D_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot S^{(0)}_{n+1;\, i_1 i_2 \dots i_p} = 0.$$

Построим плоские B-множества

$$Q_p^{i_1 i_2 \dots p} = \left(\sum_{k=0}^{p} D_k^{i_1 i_2 \dots i_p}\right) \times I_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

и

$$Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p} = D_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \times I_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad n \geqslant p+1.$$

A-множество

$$\Phi_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = Q_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \mathscr{E}$$

пересекается любой параллелью оси OY по множеству с компактным замыканием, так как

$$\Phi_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset CK_{p+1}^{(0)} \cdot \mathscr{E},$$

а множество $CK_{p+1}^{(0)} \cdot \mathscr{E}$ пересекается любой параллелью оси OY по множеству, которое имеет точки лишь в конечном числе полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, одновременно при всех $k \geqslant p+1$.

Так как замыкание A-множества $\Phi_p^{i_1 i_2 \dots i_p}$ вдоль оси OY является A-множеством $\overline{\Phi}_p^{i_1 i_2 \dots i_p}$, которое пересекается любой параллелью оси OY по компактным множествам, причем

$$\Phi_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset \overline{\Phi}_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset Q_p^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

то, на основании теоремы IV (5), множество $\overline{\Phi}_p^{i_1 i_2 \dots i_p}$, а следовательно, и множество $\Phi_p^{i_1 i_2 \dots i_p}$ можно накрыть плоским B-множеством $H_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset \subset Q_p^{i_1 i_2 \dots i_p}$, которое пересекается любой параллелью оси OY по компактному множеству.

Рассмотрим A-множество

$$\Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p} = Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot \mathscr{E},$$

где $n > p$. A-множество

$$\Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} = \Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n}$$

пересекается любой параллелью оси OY по множеству с компактным замыканием, так как

$$\Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} \subset CK_{n+1}^{(0)} \cdot \mathscr{E},$$

а множество $CK_{n+1}^{(0)} \cdot \mathscr{E}$ пересекается любой параллелью оси OY по множеству, которое имеет точки лишь в конечном числе полос k-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k}$, подчиненных полосе $(k-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$, одновременно при всех $k \geqslant n+1$.

Следовательно, множество $\Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n}$ можно также накрыть плоским B-множеством $H_n^{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} \subset Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \times I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n}$, которое пересекается любой параллелью оси OY по компактному множеству.

Тогда плоское A-множество

$$\Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{i_{p+1}, i_{p+2}, \dots, i_n} \Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} \subset Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

для которого все множества $P_x \cdot \Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p}$ являются суммами изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием $P_x \cdot \Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p} I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n}$ накрывается плоским B-множеством

$$H_n^{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{i_{p+1}, i_{p+2}, \dots i_n} H_n^{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} \subset Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

для которого все множества $P_x \cdot H_n^{i_1 i_2 \dots i_p}$ являются суммами изолированных друг от друга компактных множеств $P_x \cdot H_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n}$, так как множество

$$P_x \cdot \Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} \subset I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n}$$

накрывалось компактным множеством

$$P_x \cdot H_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n} \subset I_{i_1 i_2 \dots i_p \dots i_n},$$

а $I_{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_n} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_p i'_{p+1} \dots i'_n} = 0$ хотя бы при одном $i_k \neq i'_k$ где $p < k \leqslant n$.

Плоское B-множество

$$H^{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{n=p}^{\infty} H_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset \sum_{n=p}^{\infty} Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset W_p^{i_1 i_2 \dots i_p}$$

пересекается параллелями оси OY по суммам изолированных друг от друга компактных множеств, так как $H_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p}$, а $Q_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot Q_m^{i_1 i_2 \dots i_p} = 0$ при $n \neq m$, и накрывает плоское A-множество

$$M_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{n=p}^{\infty} \Phi_n^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset W_p^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

пересекаемое параллелями оси OY по множествам, которые являются суммами изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием.

Плоское B-множество

$$H^{[p]} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} H^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = W_p$$

ересекается любой параллелью оси OY по множествам, которые являются суммами изолированных друг от друга компактных множеств, так как каждое из множеств $H^{i_1 i_2 \dots i_p}$ обладает этим свойством, а

$$H^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = L^{i_1 i_2 \dots i_p} \times I_{i_1 i_2 \dots i_p},$$

где $W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \cdot W_p^{i'_1 i'_2 \dots i'_p} = 0$ хотя бы при одном $i_k \neq i'_k$, и накрывает плоское A-множество

$$M_p = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} M_p^{i_1 i_2 \dots i_p} \subset \sum_{i_1, i_2, \dots, i_p} W_p^{i_1 i_2 \dots i_p} = W_p,$$

пересекаемое параллелями оси OY по множествам, которые являются суммами изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием.

Плоское B-множество

$$H = \sum_{p=0}^{\infty} H^{[p]} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p; p} H^{i_1 i_2 \ldots i_p} \subset \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_p; p} W_p^{i_1 i_2 \ldots i_p},$$

где

$$H^{i_1 i_2 \ldots i_p} \subset W_p^{i_1 i_2 \ldots i_p} = (L^{i_1 i_2 \ldots i_p} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_p}),$$

а

$$W_p^{i_1 i_2 \ldots i_p} \cdot W_k^{i'_1 i'_2 \ldots i'_k} = 0$$

хотя бы при одном $i_m \neq i'_m$ или $p \neq k$, пересекается любой параллелью оси OY по множествам, являющимся суммами изолированных друг от друга компактных множеств, и накрывает плоское A-множество

$$\mathscr{E} = \sum_{p=0}^{\infty} M_p$$

высоты 2.

Таким образом, теорема верна для $\alpha = 2$.

Пусть $\alpha = \alpha^* + n$, где $n \geqslant 2$, α^* — трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Это значит, что множество $\mathscr{E}^{(\alpha-1)} = 0$, а множество $\mathscr{E}^{(\alpha-2)}$ высоты 2, т. е. все множества $P_x \cdot \mathscr{E}^{(\alpha-2)}$ являются суммами изолированных друг от друга множеств с компактным замыканием. Так как теорема верна для $\alpha = 2$, то множество $\mathscr{E}^{(\alpha-2)}$ можно накрыть плоским B-множеством H^* порядка 2.

Множество

$$U = \mathscr{E} \cdot CH^*$$

будет плоским A-множеством высоты $\alpha - 1$. По предположению, его можно накрыть плоским B-множеством $\overline{H}$ порядка, не превосходящего $\alpha - 1$.

Плоское B-множество

$$H = H^* + \overline{H}$$

накроет множество $\mathscr{E}$ и будет B-множеством, для которого все множества $P_x \cdot H$ являются множествами абсолютно первого класса, порядка, не превосходящего α, так как, в силу леммы 1, сумма двух множеств абсолютно первого класса $P_x H^*$ и $P_x \overline{H}$ соответственно подклассов 1 и не превышающего $\alpha - 2$ будет множеством абсолютно первого класса подкласса, не превышающего $\alpha - 1$.

Пусть α — трансфинитное число второго рода и для всех чисел $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Это значит, что индексы всех множеств $P_x \cdot \mathscr{E}$ меньше числа α. Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \to \alpha.$$

Обозначим

$$E_n = \Pi_x \mathscr{E}^{(\alpha_n)}.$$

Тогда $E_n \supset E_m$, если $n < m$ и

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0,$$

так как, если точка $x_0 \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, то множество $P_{x_0} \cdot \mathscr{E}$ будет содержать в себе точки множеств $P_{x_0} \cdot \mathscr{E}^{(\alpha_n)}$ при любом n, т. е. будет множеством индекса α, что противоречит условию.

Согласно лемме 1 ([5]), можно построить систему B-множеств

$$B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$$

таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \supset E_1$, $B_i \cdot B_j = 0$ при $i \neq j$ и $B_n \cdot E_{n+1} = 0$.

Пусть

$$Q_n = B_n \times I_y.$$

Плоское A-множество

$$V_n = \mathscr{E} \cdot Q_n$$

имеет высоту $\alpha_{n+1} + 1 < \alpha$. По предположению его можно накрыть плоским B-множеством $H_n \subset Q_n$ порядка, не превосходящего $\alpha_{n+1} + 1 < \alpha$.

Тогда плоское B-множество

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

будем удовлетворять всем поставленным требованиям.

Пусть $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода, и для всех чисел $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Имеем

$$\mathscr{E}^{(\alpha^*)} = \prod_{\alpha' < \alpha^*} \mathscr{E}^{(\alpha')} = 0. \tag{6}$$

Пусть

$$E^{\alpha'} = \Pi_x \mathscr{E}^{(\alpha')}, \quad N_1 = \prod_{\alpha' < \alpha^*} E^{\alpha'}.$$

Построим плоское A-множество

$$U_1 = (N_1 \times I_y)\, \mathscr{E},$$

для которого линейные множества $P_x \cdot U_1$ содержат точки каждого из множеств $\mathscr{E}^{(\alpha')}$, где $\alpha' < \alpha^*$.

Рассмотрим полосу $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$. Пусть

$$E^{\alpha'}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = \Pi_x(\mathcal{E}^{(\alpha')} \cdot I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}),$$
$$N_n^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = \prod_{\alpha' < \alpha^*} E^{\alpha'}_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}.$$

Построим плоское A-множество

$$U_n^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = (N_n^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} \times I_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}) \cdot \mathcal{E},$$

для которого линейные множества $P_x \cdot U_n^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}$ содержат точки каждого из множеств $\mathcal{E}^{(\alpha')}$, где $\alpha' < \alpha^*$.

Пусть

$$U_n = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} U_n^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}.$$

Рассмотрим систему плоских A-множеств

$$\mathcal{E} \equiv U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots .$$

Докажем, что

$$\prod_{n=0}^{\infty} U_n = 0.$$

Действительно, если точка $q(x_0, y_0) \in \prod\limits_{n=0}^{\infty} U_n$, то это означает, что каково бы ни было n, линейное множество $P_{x_0} \cdot \mathcal{E}$ в полосе n-го ранга $I_{i_1 i_2 \dots i_n} \ni q(x_0, y_0)$ содержит точки каждого из множеств $\mathcal{E}^{(\alpha')}$, где $\alpha' < \alpha^*$. Следовательно, точка $q(x_0, y_0)$ при трансфинитном процессе удаления порций множеств $(P_{x_0} \cdot \mathcal{E})^{(\alpha')}$, где $\alpha' < \alpha^*$, не выброшена ни одним из интервалов, содержащим изолированное множество с компактным замыканием. А так как $\prod\limits_{n=0}^{\infty} U_n \subset \mathcal{E}$, то это означает, что

$$q(x_0, y_0) \in \prod_{\alpha' < \alpha^*} \mathcal{E}^{(\alpha')} = \mathcal{E}^{(\alpha^*)},$$

что противоречит равенству (6).

На основании леммы 1 ([5]), существуют B-множества

$$B_0, B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$$

такие, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n \supset U_0$, $B_i \cdot B_j = 0$ при $i \neq j$ и $B_n \cdot U_{n+1} = 0$.

Плоские A-множества

$$K_n = B_n \cdot \mathcal{E}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

имеют высоту, не превосходящую α^*.

Рассмотрим множество K_0. Пусть

$$T = \Pi_x K_0.$$

Так как $B_0 \cdot U_1 = 0$, а $U_1 = (N_1 \times I_y) \cdot \mathcal{E}$, то

$$T \cdot N_1 = 0.$$

На основании первого принципа отделимости для A-множеств, существует B-множество L такое, что

$$L \supset T \quad \text{и} \quad CL \supset N_1.$$

Пусть

$$W_0 = L \times I_y.$$

Плоское A-множество

$$M_0 = \mathscr{E} \cdot W_0 \supset K_0$$

имеет высоту, не превосходящую α^*. По предположению, его можно накрыть плоским B-множеством $H_0 \subset W_0$ порядка, не превосходящего α^*.

Если построены все плоские B-множества W_k для $k \leqslant n-1$ и плоские A-множества $M_k = W_k \cdot \mathscr{E}$ высоты, не превосходящей α^*, накрытые соответственно B-множествами $H_k \subset W_k$ порядка, не превосходящего α^*, то рассмотрим A-множество

$$\widetilde{K}_n = K_n \cdot C \sum_{k=0}^{n-1} M_k.$$

Пусть

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \Pi_x (\widetilde{K}_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}).$$

Так как $B_n \cdot U_{n+1} = 0$, а $U_{n+1} = \sum\limits_{i_1, i_2, \ldots, i_n} U_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$,

где

$$U_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n} = (N_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \cdot \mathscr{E},$$

то

$$T^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot N_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0.$$

На основании первого принципа отделимости для A-множеств, существует такое B-множество $\Lambda^{i_1 i_2 \ldots i_n}$, что

$$\Lambda^{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset T^{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad C\Lambda^{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset N_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Пусть

$$L^{i_1 i_2 \ldots i_n} = C (L + L^{i_1} + L^{i_1 i_2} + \ldots + L^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}) \cdot \Lambda^{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}.$$

Ясно, что

$$L^{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset T^{i_1 i_2 \ldots i_n}, \quad CL^{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset N_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Пусть

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = L^{i_1 i_2 \ldots i_n} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Плоское A-множество

$$M_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \mathscr{E} \cdot W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \widetilde{K}_n \cdot I_{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

имеет высоту, не превосходящую α^*, так как не содержит точек $U_{n+1}^{i_1 i_2 \ldots i_n}$. По предположению, его можно накрыть B-множеством $H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$ порядка, не превосходящего α^*.

Плоское B-множество

$$H_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

где

$$H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = L^{i_1 i_2 \ldots i_n} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

а

$$W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot W_n^{i'_1 i'_2 \ldots i'_n} = 0$$

хотя бы при одном $i_k \neq i'_k$, будет B-множеством, для которого все множества $H_n \cdot P_x$ являются множествами абсолютно первого класса, быть может, как угодно высоких подклассов $< \alpha^*$. Следовательно, порядок множества H_n не превосходит $\alpha^* + 1 = \alpha$. Оно накроет плоское A-множество

$$M_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} M_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \supset \tilde{K}_n$$

высоты α.

Плоское B-множество

$$H = \sum_{n=0}^{\infty} H_n = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n; n} H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n}$$

накроет плоское A-множество

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

и будет иметь порядок, не превосходящий $\alpha = \alpha^* + 1$. Действительно, B-множество порядка α^*

$$H_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} = L^{i_1 i_2 \ldots i_n} \times I_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

а $W_n^{i_1 i_2 \ldots i_n} \subset W_m^{i'_1 i'_2 \ldots i'_m} = 0$ при $n \neq m$ или хотя бы при одном $i_k \neq i'_k$, если $n = m$.

Следовательно, множества $P_x \cdot H$ будут множествами абсолютно первого класса, быть может, как угодно высоких подклассов $< \alpha^*$. Это означает, что порядок множества H не выше $\alpha^* + 1 = \alpha$.

Таким образом, теорема верна для $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* — трансфинитное число второго рода.

Итак, теорема справедлива при всех $\alpha < \Omega$, что и требовалось доказать.

Сталинградский
педагогический институт
им. Серафимовича

Поступило
5.VI. 1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гливенко В. И., О неявных функциях, Математ. сб., XXXVI (1929), 138—142.
[2] Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.
[3] Новиков П. С., Об одном свойстве аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934), 273—276.
[4] Ляпунов А. А., Об отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934), 276—279.
[5] Козлова З. И., О некоторых плоских *A*- и *B*-множествах, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 479—500.
[6] Проскуряков И. В., О некоторых свойствах локально-компактных и локально-бикомпактных пространств, Ученые записки МГУ, Математика, вып. XXX, книга 3-я, 1939.
[7] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.-Л., 1937.
[8] Ляпунов А. А., О подклассах *B*-множеств, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 3 (1937), 419—426.
[9] Арсенин В. Я., Природа проекций некоторых *B*-множеств, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 403—410.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 443—448

А. Д. ТАЙМАНОВ

О ЖЕСТКИХ БАЗАХ δs-ОПЕРАЦИИ

(*Представлено академиком* **М. А. Лаврентьевым**)

В работе дается аналитическое представление жестких баз δs-операции и выясняется дескриптивная природа жестких баз для некоторых δs-операций.

1. Известно, что δs-операция над счетной системой $\{E_n\}$ множеств определяется равенством

$$\Phi_N(E_n) = \sum_{\eta \in N} \prod_{n \in \eta} E_n, \tag{1}$$

где N есть база, т. е. совокупность множеств натуральных чисел. Множество $\eta = \{n\}$ натуральных чисел называется цепью.

Операция $\Phi_{N^c}(E_n)$, дополнительная к данной $\Phi_N(E_n)$, определяется равенством

$$\Phi_{N^c}(E_n) = C\Phi_N(CE_n). \tag{2}$$

База N^c дополнительной операции состоит из тех цепей η, которые имеют общие элементы с каждой цепью базы N.

2. Каждой цепи $\eta = \{n\}$ ставим в соответствие определенную точку сегмента $I' = [0, 1]$ следующим образом:

В интервале $(0, 1)$ возьмем последовательность точек $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, сходящуюся к точке 1.

Интервалы $\delta_1 = (0, a_1)$, $\delta_2 = (a_1, a_2), \ldots, \delta_n = (a_{n-1}, a_n), \ldots$ называются интервалами ранга 1.

Интервал $\delta_{n_1} = (a_{n_1-1}, a_{n_1})$ разобьем на счетное число попарно непересекающихся интервалов длины $\leqslant \frac{1}{2}$ счетной последовательностью точек, сходящихся к a_{n_1}. Нумеруем эти интервалы кортежами вида (n_1, n), $n_1 < n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и получаем: $\delta_{n_1, n_1+1}, \delta_{n_1, n_1+2}, \ldots, \delta_{n_1, n_1+l}, \ldots$

Поступая так с каждым интервалом δ_n, получим все интервалы ранга 2.

Допустим, что получены интервалы ранга k и длина каждого интервала $< \frac{1}{k}$.

Каждый интервал $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ разобьем на сумму счетного числа попарно непересекающихся интервалов длины $< \frac{1}{k+1}$ последовательностью точек, сходящихся к правому концу интервала $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$. Полученные интервалы занумеруем кортежами вида $(n_1 n_2 \ldots n_k; l)$, $n_k < l$, и найдем

$$\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k, n_k+1}, \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k, n_k+2}, \ldots, \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k, n_k+l}, \ldots$$

— интервалы ранга $k+1$.

Пусть

$$I = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k} \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k},$$

где сумма берется по всем кортежам ранга k. Тогда каждой возрастающей последовательности целых чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ соответствует единственная точка $x \in I$:

$$x = \delta_{n_1} \cdot \delta_{n_1 n_2} \cdots \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdots .$$

Обратно, каждой точке $x = \delta_{n_1} \delta_{n_1 n_2} \cdots \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \cdots \in I$ соответствует возрастающая последовательность целых чисел

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots .$$

3. Определение. Мы будем говорить, что точка $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ подчинена точке $y = (m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots)$, если последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ есть часть последовательности $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$, и будем писать $x \prec y$.

Если дана δs-операция с базой N, то каждой цепи $\eta = \{n\}$ соответствует единственная точка $x \in I$ и база N есть подмножество множества I.

Через $\widetilde{N}$ обозначается обычно пополненная база $\widetilde{N} = \Phi_N(C_n)$, где C_n есть множество цепей, содержащих число n.

Точку $x \in N$ назовем *минимальной точкой* базы N, если не существует точки $y \neq x$, $y \in N$ и $y \prec x$.

Множество неминимальных точек множества N обозначим через N_1; множество минимальных точек — через N_2.

Если $\widetilde{N}_2 = \widetilde{N}$, то N_2 называется *жесткой базой*. Это понятие было введено Ю. С. Очаном (1). Мы покажем, что существует операция с жесткой базой, дополнительная операция к которой не имеет жесткой базы.

Пример 1. N состоит из следующих цепей:

$$\begin{array}{l} \eta_1 = (2,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2k,\ \ldots) \\ \eta_2 = (3,\ 4,\ 8,\ \ldots,\ 2k,\ \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_k = (2k-1,\ 2k,\ 2k+2,\ \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

База N жесткая, но N^C не имеет жесткой базы, потому что каждая бесконечная последовательность четных чисел содержится в N^C.

4. Пусть дано множество N, состоящее из точек вида

$$x = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{k-1}, n, n_{k+1}, \ldots),$$

содержащих число n на k-м месте.

Каждой точке $x = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n, n_{k+1}, \ldots)$ ставим в соответствие точку $x' = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_{k+1}, \ldots)$, полученную из x вычеркиванием числа n. Это соответствие обозначим через f_{nk}. Тогда множество $f_{nk}(N) = \{x'\}$ точек x' есть гомеоморф множества N.

Определим теперь N_2, зная полную базу $N = \widetilde{N}$.

Введем обозначения:

$N^n = C_n \cdot N$ — множество точек $x \in N$, содержащих n; N_i^n — множество точек $x \in N$, содержащих n на i-ом месте.

Тогда

$$N^n = N_1^n + N_2^n + \cdots + N_n^n, \quad N_i^n \cdot N_j^n = 0, \quad i \neq j.$$

Множество $f_{nk}(N) \cdot N$ состоит из точек $x' \in N$, которые получаются из точек $x \in N_i^n$ вычеркиванием числа n.

Множество $f_{nk}^{-1}[f_{nk}(N) \cdot N] = N(n, k)$ состоит из точек x, полученных из некоторого $x' \in f_{nk}(N) \cdot N$ приписыванием числа n на k-е место.

$N(n, k)$ есть гомеоморф множества $f_{nk}(N) \cdot N$ и состоит из всех таких точек $x = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n, n_{k+1}, \ldots)$ множества N, что $x' = (n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_{k+1}, \ldots) \in N$.

Тогда $N(n) = N(n, 1) + N(n, 2) + \cdots + N(n, n)$ есть множество всех таких точек $x \in N$, что, вычеркивая число n, получим снова точку из N, т. е. $f_{nk}(x) \in N$.

Множество $\sum\limits_{n=1}^{\infty} N(n)$ есть множество неминимальных точек из N, т. е. $N_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} N(n)$.

Таким образом, нами получена

ЛЕММА 1. *Множество N_1 неминимальных точек полной базы $\tilde{N}$ получается операциями счетного сложения, пересечения, гомеоморфного отображения f_{nk} из множеств N, N_i^n, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Следствие 1. Если N есть B-множество, то N_1 и N_2 суть B-множества.

Следствие 2. Если N есть $A(CA)$-множество, то N_1 есть $A(CA)$-множество, а N_2 есть разность двух A-множеств.

5. Существует A-множество L такое, что множество минимальных точек L_2 не есть A-множество.

Определение. Пусть E — несвязное множество. Пересечение всех одновременно открытых и замкнутых подмножеств множества E, содержащих точку x, назовем *квазикомпонентой* множества E (2).

Через 2^Q обозначим метрическое пространство замкнутых подмножеств квадрата Q с метрикой μ Хаусдорфа (2).

Через E° обозначим множество квазикомпонент множества E.

Через $E^{\circ\circ}$ обозначим множество замкнутых подмножеств множества E, являющихся квазикомпонентами или содержащихся в некоторой квазикомпоненте множества E. Можно доказать следующую теорему (4).

ТЕОРЕМА. *Множество таких замкнутых подмножеств A-множества E, лежащего в евклидовом квадрате, которые содержатся в одной единственной квазикомпоненте множества E, является A-множеством в пространстве всех замкнутых подмножеств множества E, метризованного по Хаусдорфу* (3).

Пусть

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$$

есть база окрестностей множества Q, рассмотренного как топологическое пространство с естественной топологией. Каждому замкнутому множеству $\mathcal{E}$ ставим в соответствие последовательность номеров всех s_n

таких, что $\mathscr{E} \cdot s_n = 0$, расположенных в возрастающем порядке:

$$\Phi(\mathscr{E}) = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots); \quad s_{n_i} \cdot \mathscr{E} = 0.$$

Получим разнозначную B-функцию $\Phi(\mathscr{E}) = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$ в пространстве 2^Q.

Тогда $\Phi(E^{oo})$ есть A-множество в I и квазикомпонентам множества E соответствуют минимальные точки из $\Phi(E^{oo})$.

Введем функцию $y = d(\mathscr{E})$, определенную на 2^Q:

$$d(\mathscr{E}) = \max_{\substack{x \in \mathscr{E} \\ y \in \mathscr{E}}} \rho(x, y).$$

Функция $d(\mathscr{E})$ непрерывна на 2^Q.

Пример 2. Возьмем на нижней стороне квадрата

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

A-множество E'''.

Через E'' обозначим множество точек (x, y) таких, что $x \in E'''$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. К множеству E'' присоединим нижнее основание [0,1] квадрата; получим A-множество E'.

Пусть E_1', E_2' — непересекающиеся счетные множества, всюду плотные на [0, 1].

Через $E_1(E_2)$ обозначим множество точек (x, y) таких, что $x \quad _1 (x \in E_2')$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Тогда множество $E = (E' + E_1) \cdot CE_2$ есть A-множество.

Множество E^o квазикомпонент состоит из отрезков длиной единица и точек, лежащих на [0, 1].

Покажем, что E^o не есть A-множество в 2^Q.

Непрерывная функция $d(\mathscr{E})$ на E^o принимает два значения: 0, 1. Значение 0 она принимает на точечных квазикомпонентах.

Если E^o есть A-множество, то множество точечных квазикомпонент должно быть A-множеством в 2^Q.

Но множество точечных квазикомпонент есть CA-множество в [0, 1] и, следовательно, есть CA-множество в пространстве 2^Q.

Последнее утверждение следует из того, что для двух точек метрика в 2^Q совпадает с метрикой в Q, т. е. $\mu(x, y) = \rho(x, y)$.

Из этого противоречия следует, что E^o не есть A-множество в 2^Q. Из теоремы 1 следует, что E^{oo} и, следовательно, $\Phi(E^{oo}) \subset I$ суть A-множества. Тогда $L_2 = \Phi(F^o)$ есть множество минимальных точек множества $\Phi(E^{oo}) = L$. Множество L_2, как взаимно однозначный бэровский образ не A-множества, не может быть A-множеством.

По лемме 1, $L_2 = \Phi(E^o)$ есть разность двух A-множеств.

6. Покажем, что минимальная часть произвольной базы N совпадает с минимальной частью пополненной базы $\widetilde{N}$.

Из $N \subset \widetilde{N}$ следует, что точка, минимальная в $\widetilde{N}$, будет минимальной в N и $\widetilde{N}_2 \subset N_2$.

Если же точка x — минимальная в N, то операция пополнения может присоединить только точки, содержащие x. Следовательно, x будет минимальной и в $\widetilde{N}$ и $\widetilde{N}_2 \supset N_2$.

7. Каждую цепь можно записать в виде последовательности целых чисел и рассматривать как точку бэровского пространства J. Меняя порядок чисел последовательности, из каждой цепи можно получить континуум точек бэровского пространства.

Тогда база N есть некоторое множество точек бэровского пространства. Возникает вопрос: если полная база есть A-множество, то нельзя ли выбрать жесткую часть N_2 так, чтобы она была A-множеством? Чтобы ответить на этот вопрос, введем отображение F бэровского пространства J на I.

Каждой точке $x = (n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots) \in J$ ставим в соответствие точку $y = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots) \in I$, где $n'_1, n'_2, \ldots, n'_k, \ldots$ суть числа $n_1, n_2, \ldots$, расположенное в возрастающем порядке без повторения. Возьмем интервал $\delta_{n'_1 n'_2 \ldots n'_k} \subset I$. Прообраз этого интервала состоит из тех точек, которые содержат числа $n'_1, n'_2, \ldots, n'_k$ и не содержат чисел n, $n \neq n'_i$, $n < n'_k$, $i = 1, 2, \ldots, k$, т. е. есть B-множество. Соответствие F, все лебеговские множества которого суть B-множества, есть B-соответствие. Если бы было возможно выбрать N_2 так, чтобы оно было A-множеством, то $F(N_2)$ было бы также A-множестом, что не всегда возможно (пример 2).

8. Установим взаимно однозначное соответствие между кортежами $(n_1 n_2 \ldots n_k)$ и натуральными числами p, исходя из двоичного представления натуральных чисел:

$$p = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + \cdots + 2^{n_1+n_2+\cdots n_k-1} \text{ или } \varphi(n_1 n_2 \cdots n_k) = p.$$

Положим, далее, $M^p = M_{n_1 n_2 \cdots n_k}$.

Тогда произвольной последовательности натуральных чисел $\eta = (n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots)$ соответствует последовательность $\pi = (p_1, p_2, \ldots p_k, \ldots)$ возрастающих натуральных чисел вида:

$$p_1 = 2^{n_1-1}, \quad p_2 = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1},$$

$$p_3 = 2^{n_1-1} + 2^{n_1+n_2-1} + 2^{n_1+n_2+n_3-1}, \ldots$$

Обозначив через N_A множество этих последовательностей, мы получаем, что A-операция над системой $\{E_{n_1 n_2 \ldots n_k}\}$

$$\sum_{\eta} \prod_{n_1 n_2 \ldots n_k \in \eta} E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

переходит в

$$\Phi_{N_A}(E^p) = \sum_{\pi \in NA} \prod_{p \in \pi} E^p,$$

где $E^p = E_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ и $p = \varphi(n_1, n_2, \ldots n_k)$.

Покажем, что N_A есть множество типа G_δ.

Множеству точек из N_A, начинающихся с p, ставим в сооответствие интеграл $\delta_{\varphi^{-1}(p)}$.

Пусть $G_1 = \sum_{p_1} \varphi^{-1}(p_1)$, где суммирование производится по всем номерам интервалов первого ранга.

Множеству точек из N_A, начинающихся с p_1, p_2, ставим в соответствие интервал $\delta_{\varphi^{-1}(p_2)}$. Очевидно,

$$\delta_{\varphi^{-1}(p_1)} \supset \delta_{\varphi^{-1}(p_2)}.$$

Получим $G_2 = \sum_{p_2} \delta_{\varphi^{-1}(p_2)}$, где суммирование производится по всем номерам интегралов второго ранга.

Продолжая этот процесс, получим:

$$G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i = \sum_{p_1} \delta_{\varphi^{-1}(p_1)} \cdot \sum_{p_2} \delta_{\varphi^{-1}(p_2)} \cdots \sum_{p_n} \delta_{\varphi^{-1}(p_n)} \cdots$$

Каждой точке $\pi = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots) \in N_A$ соответствует точка $y = \delta_{\varphi^{-1}(p_1)} \cdot \delta_{\varphi^{-1}[p_2)} \cdots \delta_{\varphi^{-1}(p_k)} \cdots$ из G и, обратно, каждой точке $y = \delta_{\varphi^{-1}(p_1)} \cdot \delta_{\varphi^{-1}(p_2)} \cdots \delta_{\varphi^{-1}(p_k)} \cdots$ соответствует точка $x = (p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ из N_A.

Из конструкции видно, что это соответствие есть гомеоморфное соответствие и множество N_A, как гомеоморф абсолютного G_δ, есть G_δ, т. е. жесткая база A-операции есть множество типа G_δ.

9. Покажем, что жесткая база N_Γ^* Г-операции (операции, дополнительной к A-операции) есть CA-множество. Известно, что цепью базы N_Γ служит такая последовательность натуральных чисел $(p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$, что интервалы Бэра $\delta_{\varphi^{-1}(p_1)}, \delta_{\varphi^{-1}(p_2)}, \ldots, \delta_{\varphi^{-1}(p_k)}, \ldots$ покрывают все пространство J, т. е. $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\varphi^{-1}(p_k)} \supset J$; N_Γ есть CA-множество.

Минимальная цепь из N_Γ соответствует покрытию пространства непересекающимися интервалами Бэра. Сначала покажем, что множество последовательностей непересекающихся интервалов Бэра есть B-множество. Пару чисел (p_1, p_2) назовем нормальной если $\delta_{\varphi^{-1}(p_1)} \supset \delta_{\varphi^{-1}(p_2)}$. Таких нормальных пар счетное число.

Через $M_{[p_1 p_2]}$ обозначим множество точек, содержащих числа p_1, p_2, т. е. $M_{[p_1 p_2]} = C_{p_1} \cdot C_{p_2}$. Множество $M = \sum_{[p_1 p_2]} M_{[p_1 p_2]}$, где сумма берется по всевозможным нормальным парам, есть B-множество.

Множество CM есть множество последовательностей непересекающихся интервалов Бэра.

Тогда $N_\Gamma \cdot CM = N_\Gamma^*$ есть множество покрытий всего пространства непересекающимися интервалами Бэра и, следовательно, жесткая база Г-операции есть CA-множество.

Поступило
28.XI.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Очан Ю. С., О переместимости δs-операции, Мат. сб., т. 10 (52): 3, 151—163.
[2] Hausdorf F., Mengenlehre, Berlin — Leipzig, 1914.
[3] Хаусдорф, Ф., Теория множеств, М. — Л., 1938.
[4] Тайманов А. Д., О квазикомпонентах несвязных множеств, Диссертация, библиотека МГПИ им. Ленина.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 449—472

Л. И. ГОЛОВИНА

КОММУТАТИВНЫЕ РАДИКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе изучаются коммутативные радикальные кольца, т. е. коммутативные кольца, представляющие собой группу относительно так называемого присоединенного умножения: $x \circ y = x + y - xy$. Для таких колец вводятся и изучаются некоторые понятия, параллельные понятию алгебраичности элемента в теории полей, в частности, занимающее в работе центральное место понятие элемента, вполне целого над подкольцом. Для радикальных колец без делителей нуля рассматривается вопрос о существовании и единственности в различных смыслах «алгебраически замкнутых» расширений.

Введение

Среди многочисленных обобщений одного из основных понятий алгебры — понятия радикала кольца (введенного первоначально для алгебр конечного ранга и колец с условием минимальности) лучше всего отражающим существо дела (а потому применимым к самому общему случаю) является определение радикала, предложенное Джекобсоном [1]: элемент a произвольного ассоциативного кольца R называется *правым квазирегулярным*, если существует такой элемент a' (называемый его *правым квази-обратным*), что $a + a' - aa' = 0$; *радикал* кольца есть сумма всех его правых идеалов, все элементы которых являются правыми квази-регулярными.

Настоящая работа посвящена изучению *коммутативных радикальных колец*, т. е. коммутативных колец, совпадающих со своим радикалом в смысле Джекобсона.

В произвольном ассоциативном кольце введем новое («присоединенное») умножение, положив $x \circ y = x + y - xy$ [см., например, [2]]. Радикальное кольцо относительно этого умножения образует группу, и обратно; единицей этой группы служит нуль кольца. Кольца, представляющие собой относительно присоединенного умножения полугруппу, называются *полурадикальными*. Полурадикальные кольца изучались в работе Андрунакиевича [3]; оказалось, что свойства полурадикальных колец в присоединенном умножении во многом подобны свойствам колец без делителей нуля в обычном умножении. В частности, мы будем пользоваться следующим результатом Андрунакиевича: каждое коммутативное полурадикальное кольцо вкладывается в некоторое радикальное кольцо, причем минимальное из таких радикальных колец

определено однозначно. Если в коммутативном кольце R выполняется равенство $a \circ b = c$, то говорят, что элемент a является присоединенным частным элементов c и b и пишут $a = \frac{c}{b}$. Минимальное радикальное кольцо, содержащее коммутативное полурадикальное кольцо R с элементами $a, b, \ldots$, состоит из всех присоединенных частных $\frac{a}{b}, \ldots$, равенство, сложение и умножение которых определяется следующим образом:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ тогда и только тогда, если } a \circ d = b \circ c,$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \circ d + c \circ b - b \circ d}{b \circ d}, \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \circ d - c \circ b + b \circ d}{b \circ d},$$

$$\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}.$$

Приступая к изучению свойств коммутативных радикальных колец, естественно на первых шагах руководствоваться некоторой аналогией с теорией полей. Аналогия, однако, не заходит здесь слишком далеко. Можно, правда, для радикальных колец ввести понятие элемента, алгебраического над подкольцом, притом даже несколькими разными способами, делая ударение на различных сторонах этого понятия в теории полей. Для радикальных колец без делителей нуля можно доказать теоремы существования в разных смыслах (соответственно определению алгебраичности) алгебраически замкнутых расширений.

С другой стороны, в работе изучаются свойства радикальных колец, уже вполне для них специфические. В частности, имеет место следующий факт: если элемент a коммутативного кольца R удовлетворяет над его радикальным подкольцом Q уравнению, старший коэффициент которого равен единице, а все остальные коэффициенты принадлежат Q, то всякий полином от a (над Q) порождает над Q радикальное кольцо. Обратно, элемент a, всякий полином от которого порождает над Q радикальное кольцо, удовлетворяет над Q уравнению указанного вида.

Всякий элемент, порождающий радикальное кольцо над нильподкольцом кольца R, является нильпотентным. Последнее, в частности, означает, что радикальное кольцо с одной образующей нильпотентно, откуда следует, что произвольное (не обязательно коммутативное) кольцо тогда и только тогда будет нилькольцом, если для каждого его элемента a существует квази-обратный, являющийся полиномом от a.

Совокупность нильпотентных элементов коммутативного кольца является идеалом, фактор-кольцо по которому не содержит нильпотентных элементов. Как следует из результатов Крулля ([4]) [см. также ([5]) и ([6])], радикальное кольцо без нильпотентных элементов является подпрямой суммой колец без делителей нуля. В § 5 работы радикальные кольца без делителей нуля изучаются по отношению к их полям частных. Здесь получены, однако, лишь очень частные результаты (найдено условие, при котором поле является полем частных своего радикального подкольца, описаны радикальные подкольца поля рациональных чисел).

Всюду, где специально не оговорено противное, все рассматриваемые кольца предполагаются коммутативными.

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить А. Г. Куроша, под руководством которого выполнена настоящая работа.

§ 1

Пусть R — произвольное кольцо. Каждый полином вида

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n + k_1 x^{n-1} + \cdots + k_{n-1} x,$$

где a_i — элементы из R, а k_i — целые числа, будем называть *полиномом над* R. Обозначим через R^* кольцо, полученное формальным присоединением к R единицы (причем все кратные единицы лежат вне R); полиномом над R будет каждый полином вида

$$b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_k,$$

все коэффициенты b_i которого принадлежат R^*, а последний b_k принадлежит R.

Пусть Q — некоторое подкольцо кольца R. Элемент α из R, *удовлетворяющий над* Q *уравнению* (т. е. являющийся корнем полинома) со старшим коэффициентом единица, назовем *целым над* Q.*

ТЕОРЕМА 1. *Элементы кольца R, целые над его подкольцом Q, образуют в R подкольцо, содержащее Q.*

Пусть целые над Q элементы α и β кольца R удовлетворяют над Q уравнениям

$$\begin{aligned} \alpha^n &= a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n, \\ \beta^m &= b_1\beta^{m-1} + \cdots + b_m. \end{aligned} \tag{1}$$

Покажем, что элемент $\gamma = \alpha + \beta$ удовлетворяет над Q уравнению такого же вида. Обозначим через e формально присоединенную к R единицу и пользуясь „псевдо-базисом“ [см. (8)]

$$\omega_0 = e,\ \omega_1 = \alpha,\ \omega_2 = \alpha^2, \ldots, \omega_{n-1} = \alpha^{n-1},$$

$$\omega_n = \beta,\ \omega_{n+1} = \alpha\beta, \ldots, \omega_{mn-1} = \alpha^{n-1}\beta^{m-1},$$

напишем mn равенств

$$\gamma\omega_i = \sum_{k=0}^{mn-1} C_{ik}\omega_k, \quad i = 0, 1, \ldots, mn-1, \tag{2}$$

где C_{ik} — некоторые элементы из Q^*. Перепишем равенства (2) в виде

$$\sum_{k=0}^{mn-1} (C_{ik} - \gamma\delta_{ik})\,\omega_k = 0 \quad (\delta_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k,\ \delta_{ii} = 1). \tag{3}$$

---

* Для колец с условием максимальности это определение совпадает с определением Ван-дер-Вардена. См (7), § 88.

Умножив каждое из полученных равенств на адъюнкту соответствующего элемента первого столбца определителя $|C_{ik}-\gamma\delta_{ik}|$ и сложив почленно полученные равенства, будем иметь $f(\gamma)\omega_0=0$, где $f(\gamma)=|C_{ik}-\gamma\delta_{ik}|$. Но так как $\omega_0=e$ — единица кольца R^*, то $f(\gamma)=0$. Следовательно, свободный член полинома $f(x)$ принадлежит пересечению Q^* и R, т. е. принадлежит Q, откуда $f(x)$ — полином над Q. Коэффициент при старшей степени x полинома $f(x)$ равен, очевидно, единице и, следовательно, γ — целый над Q элемент.

Аналогично, разность и произведение двух целых над Q элементов будут целыми над Q.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть R — произвольное кольцо, Q — некоторое его подкольцо и S — подкольцо, состоящее из целых над Q элементов кольца R. Тогда каждый элемент из R, целый над S, будет целым и над Q.*

Пусть целый над S элемент α из R удовлетворяет уравнению

$$\alpha^n=a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n+k_1\alpha^{n-1}+\cdots+k_{n-1}\alpha, \tag{4}$$

где a_i — элементы из Q, k_i — целые числа. Пусть элементы a_i, в свою очередь, удовлетворяют уравнениям

$$a_i^{m_i}=b_{1i}a_1^{m_i-1}+\cdots+b_{m_i,\,i},\quad b_{ij}\in Q^*,\quad b_{m_i,\,i}\in Q.$$

Пользуясь „псевдо-базисом“

$$\omega_q=a_1^{p_1}\ldots a_n^{p_n},\quad p_k=0,\ldots,m_k-1,\quad q=0,1,\ldots,m_1m_2\ldots m_n-1$$
$$(\omega_0=e),$$

упорядоченным лексикографически, напишем $nm_1\ldots m_n$ равенств

$$a_i\omega_k=\sum_{j=0}^{m_1\ldots m_n-1}C_{ik}^j\omega_j, \tag{5}$$

где C_{ik}^j — некоторые элементы из Q^*. Умножим уравнение (4) на ω_k; пользуясь равенствами (5), получим

$$\alpha^n\omega_k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m_1\ldots m_n-1}C_{ik}^{j*}\omega_j\alpha^{n-i} \tag{6}$$

(C_{ik}^{j*} — некоторые новые элементы из Q^*). Из равенства (6) обычным путем получается уравнение $f(\alpha)\omega_0=0$ или $f(\alpha)=0$ со старшим коэффициентом единица, причем свободный член полинома $f(x)$ принадлежит Q и, значит, $f(x)$ — полином над Q.

Пусть снова Q — подкольцо кольца R. Элемент α из R, являющийся присоединенным частным двух целых над Q элементов, назовем *рациональным над Q*. Из теоремы 1 вытекает, что совокупность всех рациональных над Q элементов является в R подкольцом (радикальным, если радикально кольцо R).

---

* Для колец с условием максимальности эта теорема доказана в (7), § 98.

Во всяком кольце для каждого элемента x имеет место равенство

$$x^{(n)} = 1 - (1-x)^n, \tag{7}$$

где $x^{(n)}$ есть присоединенная степень x, причем скобки в правой части предполагаются раскрытыми. Действительно, если это верно для n, то верно и для $n+1$, так как

$$x^{(n+1)} = 1 - (1-x)^2 + x - x[1-(1-x)^n] = 1 - (1-x)^{n+1}.$$

В силу последнего замечания, можно целый над Q элемент определить как такой элемент, который в присоединенном умножении удовлетворяет уравнению

$$x^{(n)} + a_1 \circ x^{(n-1)} + \dots + a_n + k_1 x^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} x = 0$$

a_i — элементы из Q, k_i — целые числа) со старшим коэффициентом единица.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть R — произвольное кольцо, Q — некоторое его подкольцо и S — подкольцо, состоящее из рациональных над Q элементов кольца R. Тогда каждый элемент из R, рациональный над S, будет рациональным и над Q.*

Покажем прежде всего, что каждый элемент из R, целый над S, будет рациональным над Q. Пусть целый над S элемент x из R в присоединенном умножении удовлетворяет уравнению

$$x^{(n)} = a_1 \circ x^{(n-1)} + \dots + a_n + k_1 x^{(n-1)} + \dots + k_{n-1} x, \tag{8}$$

где a_i — элементы из S, k_i — целые числа. Так как каждый элемент из S является присоединенным частным двух целых над Q элементов из R, то можно, умножив уравнение (8) присоединенным образом на соответственно подобранный целый над Q элемент a_0 из Q (на „общий знаменатель" элементов a_i в присоединенном умножении), получить новое уравнение

$$a_0 \circ x^{(n)} = a_1^* \circ x^{(n-1)} + \dots + a_n^* + k_1^* x^{(n-1)} + \dots + k_{n-1}^* x,$$

где все a_i^* — целые над Q элементы из R, а k_i^* — некоторые (новые) целые числа. Умножив последнее уравнение (присоединенным образом) на $a_0^{(n-1)}$, получим уравнение

$$(a_0 \circ x)^{(n)} = a_1^{**} \circ (a_0 \circ x)^{(n-1)} + \dots + a_n^{**} + k_1^{**} (a_0 \circ x)^{(n-1)} + \dots + k_{n-1}^{**} (a_0 \circ x)$$

(где a_i^{**}, вообще говоря, новые элементы из Q, k_i^{**} — новые целые числа). Отсюда следует, что элемент $a_0 \circ x$ является целым над Q, а следовательно, элемент x, равный $\frac{a_0 \circ x}{x}$, — рациональным над Q.

Пусть элемент α из R равен $\frac{x}{y}$, где x и y — целые над S элементы. Так как по доказанному элементы x и y рациональны над Q, то и α будет рациональным над Q.

Пример. Пусть R_k — радикальное кольцо, состоящее из всех рациональных чисел вида $\frac{km}{kn+1}$, где k — не равное $\pm$ единице фиксированное целое число, а m и n — произвольные целые числа [см. ([3])], Q — подкольцо кольца R, состоящее из одного нуля. Целыми над Q будут те и только те элементы из R, которые являются целыми числами. С другой стороны, каждый элемент кольца R будет рациональным над Q. Действительно, квази-обратным для элемента km будет элемент $\frac{km}{km-1}$ и, следовательно, элемент $\frac{kp}{kq+1}$ является присоединенным частным целых над Q элементов $k(p-q)$ и $-kq$:

$$k(p-q)+\frac{-kq}{-kq-1}\cdot-k(p-q)\frac{-kq}{-kq-1}=\frac{kp}{kq+1}.$$

§ 2

Пусть R — произвольное кольцо, Q — некоторое его подкольцо. Элемент x и R, удовлетворяющий над Q уравнению вида

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

старший коэффициент которого равен единице, тогда как все остальные коэффициенты принадлежат Q, будем называть *вполне целым над* Q.

ТЕОРЕМА 1′. *Элементы кольца R, вполне целые над его подкольцом Q, образуют в R подкольцо, содержащее Q.*

Пусть вполне целые над Q элементы α и β кольца R удовлетворяют над Q уравнениям

$$\begin{aligned}\alpha^n&=a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n,\\ \beta^m&=b_1\beta^{m-1}+\cdots+b_m,\end{aligned}\tag{1′}$$

коэффициенты a_i и b_j которых принадлежат Q. В обозначениях теоремы 1, мы должны показать, что все коэффициенты полинома $f(\gamma)$, начиная со второго, принадлежат Q. Для этого заметим, что в равенствах (3)

$$\gamma\omega_i=(\alpha+\beta)\alpha^p\beta^q=\sum_{k=0}^{mn-1}C_{ik}\,\omega_k$$

при $p<n-1$ и $q<m-1$ индексы обоих элементов ω_k правой части будут больше, чем i; если же $p=n-1$ или $q=m-1$, то в правой части коэффициенты при тех ω_k, индексы которых не превосходят i, будут, в силу уравнений (1′), принадлежать Q, т. е. в определителе $|C_{ik}-\gamma\delta_{ik}|$ элементы C_{ik} при $k\leqslant i$ принадлежат Q. Следовательно, с точностью до слагаемых с коэффициентами из Q, этот определитель равен γ^{mn}, и наше утверждение доказано.

ТЕОРЕМА 2′. *Пусть R — произвольное кольцо, Q — некоторое его подкольцо и S — подкольцо, состоящее из вполне целых над Q элементов из R; тогда каждый элемент из R, вполне целый над S, будет вполне целым и над Q.*

В определителе $f(\alpha)$ в обозначениях теоремы 2) все элементы C_{ik}^{j*} при $k\geqslant j$ принадлежат Q.

ЛЕММА 1. *Пусть Q — радикальное подкольцо радикального кольца R и пусть элемент x из R удовлетворяет произвольному уравнению над Q:*

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.\tag{9}$$

Тогда между x *и его квази-обратным* x' *имеет место соотношение*

$$x'(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) =$$
$$= -a_0 x^{n-1} - (a_0 + a_1) x^{n-2} - \cdots - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-2}) x + a_n. \quad (10)$$

Заметим, прежде всего, что уравнение

$$a + bx + x = 0, \quad (11)$$

коэффициенты a и b которого — элементы некоторого радикального кольца T, имеет в этом кольце одно и только одно решение. Действительно, из уравнения (11) непосредственно следует, что

$$(-b) \circ x = -(a + b)$$

и

$$x = [-(a + b)](-b)'.$$

В нашем случае имеем, очевидно,

$$x(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + x'(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - xx'(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = 0.$$

По доказанному, уравнение

$$x(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + U - xU = 0, \quad (12)$$

коэффициенты $x(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ и $-x$ которого принадлежат R, имеет в R относительно $U = x'(a_0 + a_1 + \cdots + a_n)$ одно и только одно решение. В справедливости утверждения леммы легко теперь убедиться, подставив в уравнение (12) вместо U правую часть равенства (10) и используя уравнение (9):

$$x(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) - a_0 x^{n-1} - (a_0 + a_1) x^{n-2} - \cdots - (a_0 + \cdots + a_{n-2}) x +$$
$$+ a_n + a_0 x^n + (a_0 + a_1) x^{n-1} + \cdots$$
$$\cdots + (a_0 + \cdots + a_{n-2}) x^2 - a_n x = 0.$$

Пусть Q — радикальное подкольцо кольца R. Будем говорить, что элемент x из R *порождает над* Q *радикальное кольцо*, если минимальное подкольцо кольца R, содержащее Q и x, радикально.

ТЕОРЕМА 4. *Каждый элемент произвольного кольца* R, *вполне целый над его радикальным подкольцом* Q, *порождает над* Q *радикальное кольцо.*

Покажем прежде всего, что квази-обратный для любого элемента, вполне целого над радикальным подкольцом Q, существует и равен полиному над Q от него самого. Действительно, пусть элемент x будет вполне целым над Q; по определению он удовлетворяет уравнению

$$x_n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in Q.$$

Положим

$$f(x) = -x^{n-1} - (1 + a_1) x^{n-1} - \cdots - (1 + a_1 + \cdots + a_{n-2}) x + a_n.$$

Как следует из доказательства предыдущей леммы,

$$x(1 + a_1 + \cdots + a_n) + f(x) - xf(x) = 0,$$

откуда

$$x + f(x)[1 - (-a_1 - \cdots - a_n)'] - xf(x)[1 - (-a_1 - \cdots - a_n)'] = 0$$

и, следовательно, полином $x' = f(x)[1 - (-a_1 - \cdots - a_n)']$ является квази-обратным для x.

В силу теоремы $1'$, каждый полином от вполне целого над Q элемента будет вполне целым над Q и, следовательно, обладает квази-обратным, являющимся полиномом от него самого. Таким образом, кольцо, порожденное элементом x над Q, радикально.

Следствие 1. *Подкольцо, состоящее из всех элементов произвольного кольца R, вполне целых над его радикальным подкольцом Q, радикально.*

Следствие 2. *Пусть R — произвольное радикальное кольцо и $f(x)$ — произвольный полином вида $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, $a_i \in R$. Тогда существует радикальное кольцо $\overline{R}$, которое получается из R присоединением элемента x, удовлетворяющего уравнению $f(x) = 0$.*

Действительно, в фактор-кольце $R[x]/P$ кольца $R[x]$ полиномов над R по идеалу P, порожденному в нем полиномом $f(x)$, элемент x будет вполне целым и, следовательно, порожденное им кольцо радикально.

Из теорем $1'$ и 4 вытекает, что *каждый полином от вполне целого над радикальным подкольцом Q элемента a произвольного кольца R порождает над Q радикальное кольцо.* В следующем параграфе будет обратная теорема: элемент, всякий полином от которого порождает над радикальным подкольцом Q радикальное кольцо, является над Q вполне целым. Возможно, что достаточно потребовать только, чтобы сам элемент x порождал над Q радикальное кольцо; доказать это, однако, не удается. В следующем параграфа обратное предложение в этой последней форме будет доказано при некоторых дополнительных ограничениях на кольцо R (которое предполагается нилькольцом) или на элемент x (который предполагается целым).

ЛЕММА 2. *Пусть Q — подкольцо радикального кольца R и β — произвольный элемент из R. Тогда каждый полином от элемента $\frac{0}{\beta} = \beta'$ (над O) имеет вид $\frac{t(\beta)}{\beta(n)}$, где n — некоторое целое положительное число, а $t(\beta)$ — полином над Q степени не выше n, и, обратно, каждый элемент такого вида является полиномом от $\frac{0}{\beta}$.*

Пусть s, n, k — произвольные целые положительные числа. Прежде всего

$$\frac{0}{\beta^{(n)}} = \left(\frac{0}{\beta}\right)^{(n)}$$

есть полином от $\frac{0}{\beta}$. Далее, предположив, что

$$\frac{0}{\beta^{(n)}} - s\frac{0}{\beta^{(n)}} = \frac{s\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}} \qquad (13)$$

и заметив, что

$$\frac{0}{\beta^{(n)}} - \frac{0}{\beta^{(n)}} = \frac{\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}},$$

получаем

$$\frac{0}{\beta^{(n)}} - (s+1)\frac{0}{\beta^{(n)}} = \left(\frac{0}{\beta^{(n)}} - s\frac{0}{\beta^{(n)}}\right) - \frac{0}{\beta^{(n)}} = \frac{s\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}} - \frac{0}{\beta^{(n)}} =$$

$$= \frac{(s\beta^{(n)}) \circ \beta^{(n)} - \beta^{(n)} + \beta^{(2n)}}{\beta^{(2n)}} = \frac{(s\beta^{(n)} + \beta^{(n)}) \circ \beta^{(n)}}{\beta^{(2n)}} = \frac{(s+1)\,\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}}.$$

Аналогично,

$$\frac{0}{\beta^{(n)}} + s\frac{0}{\beta^{(n)}} = \frac{-s\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}}.$$

Далее,

$$\frac{s\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}} \circ \frac{0}{\beta^{(k)}} = \frac{s\beta^{(n)}}{\beta^{(n+k)}}$$

и

$$\frac{-s\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}} \circ \frac{0}{\beta^{(k)}} = \frac{-s\beta^{(n)}}{\beta^{(n+k)}}.$$

Следовательно, каждый элемент вида $\frac{s\beta^{(n)}}{\beta^{(n+k)}}$ или $\frac{-s\beta^{(n)}}{\beta^{(n+k)}}$ является полиномом от $\frac{0}{\beta}$.

Далее, если a — произвольный элемент из Q, то

$$a \circ \frac{\beta^{(n)}}{\beta^{(n+k)}} = \frac{a \circ \beta^{(n)}}{\beta^{(n+k)}}$$

также будет полиномом от $\frac{0}{\beta}$. Таким образом, если n — произвольное целое число, а $r(\beta)$ — произвольный одночлен (в присоединенном умножении) над Q степени не выше n, то $\frac{r(\beta)}{\beta^{(n)}}$ является полиномом от $\frac{0}{\beta}$.

Пусть уже доказано, что элементы $\frac{u(\beta)}{\beta^{(n)}}$ и $\frac{v(\beta)}{\beta^{(n)}}$ (где $u(\beta)$ и $v(\beta)$ — полиномы от β степени не выше n) являются полиномами от $\frac{0}{\beta}$; тогда и

$$\frac{u(\beta)}{\beta^{(n)}} + \frac{v(\beta)}{\beta^{(n)}} - \frac{0}{\beta^{(n)}} = \frac{u(\beta) + v(\beta)}{\beta^{(n)}}$$

также будет полиномом от $\frac{0}{\beta}$. Этим доказано, что каждый элемент вида $\frac{t(\beta)}{\beta^{(n)}}$ ($t(\beta)$ — полином от β степени не выше n) является полиномом от $\frac{0}{\beta}$.

Обратно, всякий одночлен (в присоединенном умножении) от $\frac{0}{\beta}$ имеет вид либо $s\left(\frac{0}{\beta}\right)^{(n)}$, т. е., по формуле (13), равен

$$\frac{0}{\beta^{(n)}} - \frac{s\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}} = \frac{(-s+1)\beta^{(n)}}{\beta^{(n)}},$$

либо

$$a_0 \circ \left(\frac{0}{\beta}\right)^{(n)} = \frac{a}{\beta^{(n)}}.$$

В силу равенства

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \circ d + c \circ b - b \circ d}{b \circ d},$$

каждый полином от $\frac{0}{\beta}$ (над Q) будет для некоторого n иметь вид $\frac{t(\beta)}{\beta^{(n)}}$, где $t(\beta)$ — полином над Q степени не выше n.

ЛЕММА 3. *Целый над подкольцом Q элемент x радикального кольца R является полиномом над Q от своего квази-обратного, и обратно.*

Пусть целый над Q элемент x удовлетворяет (в присоединенном умножении) уравнению $x^{(n+1)} = f(x)$, где $f(x)$ — полином над Q степени не выше n. Тогда элемент $x = \frac{f(x)}{x^{(n)}}$ является, в силу леммы 2, полиномом от своего квази-обратного $\frac{0}{x}$.

Доказательство обратимо.

Следствие. *Каждый элемент x радикального кольца R, порождающий над его радикальным подкольцом Q радикальное кольцо, является рациональным над Q.*

ТЕОРЕМА 5. *Элемент x произвольного кольца R, порождающий над его радикальным подкольцом Q радикальное кольцо, тогда и только тогда будет целым, если каждый полином от x (над Q) порождает над Q радикальное кольцо.*

Пусть элемент x будет целым над Q и пусть $F(x')$ — произвольный полином от x' (над Q); будучи полиномом от x, так как x порождает над Q радикальное кольцо, $F(x')$, в силу теоремы 1', должен быть целым над Q и, следовательно, удовлетворяет некоторому уравнению вида

$$[F(x')]^{(n+1)} = \Phi[F(x')],$$

где n — целое положительное число, а Φ — полином над Q степени не выше n. В силу леммы 2,

$$F(x') = \frac{\Phi[F(x')]}{[F(x')]^{(n)}}$$

есть полином от $\frac{0}{F(x')}$; следовательно, каждый полином от x' является полиномом от своего квази-обратного.

Пусть $\psi(x)$ — произвольный полином от x; его квази-обратный $[\psi(x)]'$, так как x порождает над Q радикальное кольцо, будет полиномом от x, а в силу леммы 3, — полиномом от x'. Согласно только что доказанному, $[\psi(x)]'$ будет полиномом от своего квази-обратного.

Таким образом, квази-обратный для всякого полинома $\psi(x)$ от x является полиномом от самого $\psi(x)$; следовательно, каждый полином от x (над Q) порождает над Q радикальное кольцо.

Пусть, обратно, каждый полином от x порождает радикальное кольцо. Тогда, в частности, элемент x', будучи полиномом от x, порождает над Q радикальное кольцо и, следовательно, элемент x является полиномом от x'. В силу леммы 3, элемент x будет целым над Q.

§ 3

Анонсированная в предыдущем параграфе теорема о том, что элемент α кольца R, порождающий над его нильподкольцом Q радикальное кольцо, является над Q вполне целым (и, следовательно, нильпотентным), будет доказана сперва для случая, когда Q есть нулевое кольцо. Доказательству этой теоремы предпошлем несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА 4. *Пусть Q — радикальное подкольцо кольца R, α — элемент из R, порождающий над Q радикальное кольцо, и k — произвольное целое положительное число. Тогда элемент $k\alpha$ удовлетворяет над Q некоторому уравнению, сумма коэффициентов которого равна степени числа k.*

Пусть элемент

$$b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{m-1}\alpha^{m-1} \quad (b_i \in Q^*,\ b_0 \in Q)$$

будет квази-обратным для $k\alpha$:

$$k\alpha + (b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{m-1}\alpha^{m-1}) - k\alpha(b_0 + b_1\alpha + \cdots + b_{m-1}\alpha^{m-1}) = 0.$$

Умножив левую часть последнего равенства на k^{m-1}, получим полином

$$-b_{m-1}(k\alpha)^m + (b_{m-1} - kb_{m-2})(k\alpha)^{m-1} + \cdots + (b_2 - kb_1)k^{m-3}(k\alpha)^2 + \\ + (k + b_1 - kb_0)k^{m-2}k\alpha + b_0k^{m-1}$$

от $k\alpha$, сумма коэффициентов которого

$$-b_{m-1} + (b_{m-1} - kb_{m-2}) + \cdots + k^{m-3}(b_2 - kb_1) + k^{m-2}(k + b_1 - kb_0) + \\ + b_0k^{m-1} = k^{m-1}$$

равна некоторой степени числа k.

ЛЕММА 5. *Пусть $f_s(x)$, $s = 1, \ldots, t$, — произвольные целочисленные полиномы от x. Если для некоторого достаточно большого простого*

числа p общий наибольший делитель чисел $f_s(p)$ равен степени числа p, то общий наибольший делитель полиномов $f_s(x)$ равен степени неизвестного x.

Пусть общий наибольший делитель полиномов $f_s(x)$ равен

$$F(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_\nu x^\nu,$$

причем все c_i — целые числа, а $\frac{f_s(x)}{F(x)}$ — целочисленные полиномы (легко видеть, что выбрать такой полином $F(x)$ возможно). Пусть p будет простое число, большее чем абсолютная величина каждого из чисел c_i, и такое, что общий наибольший делитель чисел $f_s(p)$ равен степени p. Так как число $F(p)$ делит общий наибольший делитель чисел $f_s(p)$, то оно само будет равно некоторой степени числа $p: F(p) = p^q$.

Предположим сперва, что $q = 0$; тогда $c_0 + cp_1 + \cdots + c_\nu p^\nu = 1$, откуда $c_0 = 1$. Затем, так как $p(c_1 + \cdots + c_\nu p^{\nu-1}) = 0$ и $p > |c_1|$, то $c_1 = 0$. Пусть уже доказано, что $c_0 = \cdots = c_{j-1} = 0$; тогда, так как $p^j(c_j + \cdots + c_\nu p^{\nu-j}) = 0$ и $p > |c_j|$, имеем $c_j = 0$. В этом случае $F(x) = 1$.

Если же $q > 0$, то, как выше, покажем, что $c_0 = \cdots = c_{q-1} = 0$ и, так как $p^q(c_q + \cdots + c_\nu p^{\nu-q}) = p^q$, то $c_q = 1$ и $c_{q+1} = \cdots = c_\nu = 0$. В этом случае $F(x) = x^q$.

Рассмотрим радикальное кольцо R с одной образующей. Пусть $O[x]$ будет кольцо целочисленных полиномов от одного неизвестного x, а P — идеал в нем, состоящий из всех полиномов, корнем которых является x. Выберем в P специальный базис следующим образом. Коэффициенты при старшей степени x полиномов идеала P (включая нуль) образуют идеал в кольце целых чисел; пусть a_1 будет положительной образующей этого идеала и пусть

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i^n x^{n-i+1}$$

(мы положили $a_1^n = a_1$) будет полиномом из P со старшим коэффициентом a_1. Если идеал P содержит полиномы степени ниже n, то коэффициенты при $(n-1)$-й степени таких полиномов также образуют в кольце целых чисел идеал; пусть он порождается положительным числом a_1^{n-1} и пусть при этом

$$f_{n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-1} x^{n-i}$$

будет полиномом $(n-1)$-й степени со старшим коэффициентом a_1^{n-1} и т. д.

Этим путем мы получим базис из полиномов

$$f_m(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i^m x^{m-i+1}, \quad m = n, n-1, \ldots, r \quad (r \geqslant 1). \tag{14}$$

Очевидно, что все полиномы идеала P имеют степень не ниже r.

ЛЕММА 6. *Общий наибольший делитель полиномов системы* (14) *равен некоторой степени* x.

Пусть k — произвольное целое положительное число и $\varphi^{(k)}(kx)$ — принадлежащий P полином от x, сумма коэффициентов которого равна некоторой степени числа k (лемма 4). Для каждого k фиксируем один такой полином $\varphi^{(k)}(kx)$. Так как полиномы (14) образуют базис идеала P, то для каждого k существуют такие целочисленные полиномы

$$u_m^{(k)}(x) = u_{m0}^{(k)} x^{s(k)} + \cdots + u_{m\,s(k)-1}^{(k)} x + u_{m\,s(k)}^{(k)}$$

(допуская нулевые первые коэффициенты, можно считать, что степени $s(k)$ полинома $u_m^{(k)}(x)$ зависят от k, но не от m), что

$$\varphi^{(k)}(kx) = \sum_{i=n}^{r} f_i(x)\, u_i^{(k)}(x). \tag{15}$$

Сумма коэффициентов полинома $\varphi^{(k)}(kx)$ (как полинома от kx) равна

$$\sum_{i=n}^{r}\left(\sum_{j=1}^{i} \frac{a_j^i}{k^{i-j+1}}\right)\left(\sum_{l=0}^{s(k)} \frac{u_{il}^{(k)}}{k^{s(k)-l}}\right) = k^t \tag{16}$$

(t — некоторое целое число). Положив

$$\sum_{j=1}^{i} a_j^i y^{n-i+j-1} = \varphi_i(y), \qquad \sum_{l=0}^{s(k)} u_{il}^{(k)} y^l = v_i^{(k)}(y)$$

и, умножив равенство (16) на достаточно высокую степень k, мы для каждого k будем иметь равенство

$$\sum_{i=n}^{r} \varphi_i(k)\, v_i^{(k)}(k) = k^{\alpha(k)}, \tag{16'}$$

где $\alpha(k)$ — некоторое зависящее от k целое положительное число.

Пусть k пробегает последовательность $p_1, p_2, \ldots$ простых чисел. Для каждого p_s действительно входить в равенство (15) будут, возможно, не все полиномы f_i, но так как этих полиномов лишь конечное число, то некоторая их комбинация будет входить в равенство (15) для некоторой бесконечной подпоследовательности $p_1', p_2', \ldots$ последовательности $p_1, p_2, \ldots$. Предположим, что из последовательности $p_1', p_2', \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность $p_1'', p_2'', \ldots$ чисел, для каждого из которых при некотором фиксированном i числа $v_i^{p''j}(p_j'')$ равны нулю. Ограничимся в дальнейшем числами именно этой подпоследовательности, исключив из равенства (16') соответствующие v_i. Если из последовательности $p_1'', p_2'', \ldots$ выделяется подпоследовательность с аналогичным свойством относительно некоторого другого i, то исключим таким же способом соответствующее v_i и т. д. При этом, в силу равенства (16'), все v_i не окажутся исключенными, т. е. мы получим, в конце концов, такую последовательность $p_1''', p_2''', \ldots$ простых чисел, для которых при каждом i лишь конечное число чисел $v_i^{p_j'''}(p_j''')$ равно нулю. Отбросив,

наконец, достаточно много начальных членов этой последовательности, мы получим последовательность $q_1, q_2, \ldots$ простых чисел, для каждого из которых при всех уцелевших i ни одно из чисел $\varphi_i^{(q_j)}(q_j)$ не равно нулю; для каждого из этих q_s будем иметь, следовательно, равенство

$$\sum_{i=i_1,\ldots,i_j} \varphi_i(q_s)\, v_i^{q_s}(q_s) = q^{\alpha(q_s)}, \tag{16''}$$

где $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_j}$ — некоторое непустое множество полиномов φ_i.

Из равенства (16″) следует, что существует сколь угодно большое простое число q_s, для которого общий наибольший делитель чисел $\varphi_i(q_s)$ равен степени q_s. В силу леммы 5, общий наибольший делитель полиномов $\varphi_i(y)$, $i = i_1, \ldots, i_j$, равен степени y; пусть это будет y^q. Существуют, следовательно, такие целочисленные полиномы $\psi_i(y)$, что

$$\sum_{i_1,\ldots,i_j} \psi_i(y)\, \varphi_i(y) = Ay^q, \tag{17}$$

где A — некоторое целое число. Положив в (17) $y = \frac{1}{x}$, будем иметь равенство

$$\sum_{i_1,\ldots,i_j} \psi_i'(x)\, f_i(x) = Ax^l$$

(где l — некоторое целое положительное число), из которого следует, что общий наибольший делитель всех полиномов $f_i(x)$, $i = i_1, \ldots, i_j$ (с точностью до константы) равен степени x. Тем более, общий наибольший делитель всех полиномов системы (14) равен степени x.

Следствие. *Последний полином* $f_r(x)$ *системы* (14) *является (с точностью до константы) общим наибольшим делителем всех полиномов системы* (14) *и, следовательно, коэффициенты*

$$a_2^r,\ a_3^r, \ldots,\ a_r^r,\ a_3^{r+1}, \ldots,\ a_{r+1}^{r+1}, \ldots,\ a_{n-r+2}^n, \ldots,\ a_n^n$$

равны нулю.

Действительно, если общий наибольший делитель полиномов системы (14) равен x^w, то в идеале P найдется полином степени w, т. е. $w \geqslant r$, но так как полином $f_r(x)$ делится на x^w, то, обратно, $r \geqslant w$. Таким образом, $r = w$.

ЛЕММА 7. *Коэффициенты* a_j^m *полиномов системы* (14) *при всех* j *и* m *делятся на* a_1^m.

В силу выбора полиномов системы (14), очевидно, что при всех m a_1^{m-1} делится на a_1^m; пусть

$$a_1^{m-1} = a_1^m \varepsilon_{m-1}, \quad m = n, n-1, \ldots, r+1. \tag{18}$$

Для коэффициентов последнего полинома системы (14) утверждение леммы тривиально: a_1^r делится на a_1^r.

Предположим, что для $i-1$, $r+1 \leqslant i < n$, уже доказано, что коэффициенты a_s^{i-1} делятся на a_1^{i-1}, и рассмотрим коэффициенты a_s^i полинома i-й степени

$$f_i(x) = \sum_{s=1}^{i-r+1} a_s^i x^{i-s+1} \tag{19}$$

системы (14).

Умножая полином (19) на ε_{i-1} и вычитая из произведения умноженный на x полином

$$f_{i-1}(x) = \sum_{s=1}^{i-r} a_s^{i-1} x^{i-s},$$

получим полином

$$\sum_{s=2}^{i-r} (a_s^i \varepsilon_{i-1} - a_s^{i-1}) x^{i-s+1} + a_{i-r+1}^i \varepsilon_{i-1} x^r,$$

причем числа a_s^{i-1}, в силу индуктивного предположения, делятся на a_1^{i-1}, а a_1^{i-1}, в силу равенства (18), равно $a_1^i \varepsilon_{i-1}$. Это обстоятельство, а также то тривиальное замечание, что a_1^i кратно a_1^i, примем в качестве исходного пункта новой индукции, предположив, что для некоторого j, $2 \leqslant j \leqslant i-r+1$, числа $a_1^i, a_2^i, \ldots, a_{j-1}^i$ кратны a_1^i и, кроме того, в P существует полином, имеющий вид

$$\sum_{s=j}^{i-r+1} (a_s^i \varepsilon_{i-1} - \alpha_s a_1^i \varepsilon_{i-1}) x^{i-s+1}, \tag{20}$$

где α_s — некоторые целые числа.

Так как степень полинома (20) равна $i-j+1$, то его старший коэффициент $a_j \varepsilon_{i-1} - \alpha_j a_1^i \varepsilon_{i-1}$ делится на a^{i-j+1}; для некоторого целого числа μ

$$a_j^i \varepsilon_{i-1} - \alpha_j a_1^i \varepsilon_{i-1} = a_1^{i-j+1} \mu.$$

Из последнего равенства и равенства (18) следует, что

$$a_j^i \varepsilon_{i-1} = \varepsilon_{i-1} \alpha_j a_1^i + \mu \varepsilon_{i-j+1} \ldots \varepsilon_{i-1} a_1^i,$$

т. е. что и a_j^i делится на a_1^i. Кроме того, так как полином

$$f_{i-j+1}(x)\mu = \sum_{s=1}^{i-j-r+2} a_s^{i-j+1} x^{i-j-s+2} \mu = \sum_{s=j}^{i-r+1} a_{s-j+1}^{i-j+1} x^{i-s+1} \mu \tag{21}$$

принадлежит P, то идеалу P принадлежит и разность

$$\sum_{s=j+1}^{i-r+1} (a_s^i \varepsilon_{i-1} - \alpha_s a_1^i \varepsilon_{i-1} - \mu a_{s-j+1}^{i-j+1}) x^{i-s+1}$$

полиномов (20) и (21). При этом, в силу первого индуктивного предположения, a_{s-j+1}^{i-j+1} кратно a_1^{i-j+1}, а в силу равенства (18), a_1^{i-j+1} кратно $a_1^i \varepsilon_{i-1}$. Таким образом, оба предположения второй индукции выполняются и для j — все коэффициенты a_s^i $(s = 1, 2, \ldots, i - r + 1)$ кратны a_1^i. Следовательно, предположение первой индукции выполняется для i, и утверждение леммы полностью доказано.

ЛЕММА 8. *Если кольцо R с одной образующей α радикально, то элемент α является целым над нулем.*

Пусть $O[x]$ — кольцо целочисленных полиномов от одного неизвестного x, а P — идеал в нем, состоящий из всех полиномов, корнем которых является α. Как следует из лемм 4—7, в идеале P можно выбрать базис, состоящий из полиномов

$$\begin{array}{l} d\,(x^n + \alpha_{11}x^{n-1} + \cdots + \alpha_{1,\,n-r}x^r), \\ \varepsilon_1 d\,(x^{n-1} + \alpha_{21}x^{n-2} + \cdots + \alpha_{2,\,n-r}x^r), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-r-1}\, d\,(x^{r+1} + \alpha_{n-r,\,1}x^r), \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-r} d x^r, \end{array} \qquad (14')$$

где α_{ij}, ε_i, d — целые числа. Следовательно, коэффициенты каждого полинома из P кратны d. Но так как в P содержится полином

$$x + f(x) - xf(x)$$

(где $f(\alpha)$ — квази-обратный для элемента α в R), сумма коэффициентов которого равна единице, то d должно быть равно ± 1.

Теперь мы в состоянии доказать утверждение, сформулированное в начале параграфа.

ТЕОРЕМА 6. *Радикальное кольцо с одной образующей нильпотентно.*

Пусть R — радикальное кольцо с одной образующей α, $O[x]$ — кольцо целочисленных полиномов от x, P — идеал в $O[x]$, состоящий из полиномов, корнем которых является α. Как следует из лемм 4—8, в P можно выбрать базис, содержащий, в частности, полином вида Cx^r.

Так как элемент α является, по лемме 8, целым, то в силу теоремы 5, элемент α^r также должен быть целым, т. е. некоторая его степень выражается через низшие степени. Так как в то же время некоторое кратное этого элемента равно нулю, а именно $C\alpha^r = 0$, то порожденное им кольцо будет конечным и, следовательно, нильпотентным. Таким образом, элемент α^r, а вместе с тем и α, являются нильпотентными и, значит, кольцо R нильпотентно.

Представляется довольно вероятным, что соответствующее утверждение имеет место при любом конечном числе образующих (и притом даже в некоммутативном случае); доказательство этого, однако, пока не найдено.

Следствие. *Для того чтобы кольцо (не обязательно коммутативное) было нилькольцом, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента a этого кольца существовал квази-обратный, являющийся целочисленным полиномом от a.*

Теорема 6 в формулировке: элемент x кольца R, порождающий над его нулевым подкольцом радикальное кольцо, является нильпотентным, легко может быть обобщена на случай нильподкольца Q.

ТЕОРЕМА 7. *Всякий элемент x произвольного кольца R, порождающий над его нильподкольцом Q радикальное кольцо, является нильпотентным.*

Пусть N — идеал, состоящий из всех нильпотентных элементов кольца R; тогда фактор-кольцо R/N не содержит, очевидно, нильпотентных элементов. Элемент $\bar{x}$ порождает в кольце $\bar{R}$ радикальное кольцо над его нулевым подкольцом; в силу теоремы 6, $\bar{x}=0$ и, следовательно, $x \in N$.

Наконец, не делая никаких предположений относительно кольца Q, удается доказать соответствующую теорему для случая, когда элемент x является целым над Q,

ТЕОРЕМА 8. *Пусть Q — радикальное подкольцо кольца R. Целый над Q элемент α из R, порождающий над Q радикальное кольцо, является над Q вполне целым.*

Пусть

$$F(x) = b_0 x^m + \cdots + b_m + k_1 x^s + \cdots + k_s x,$$

где b_i — элементы из Q, а k_i — целые числа, будет произвольным полиномом от x над Q. Назовем „целой частью" полинома $F(x)$ целочисленный полином

$$\| F(x) \| = k_1 x^s + \cdots + k_s x.$$

Пусть P^* — идеал в кольце $Q[x]$ полиномов над Q, состоящий из всех полиномов от x, корнем которых является α. Обозначим через P в $O[x]$ совокупность полиномов, являющихся целыми частями полиномов из P^*. Легко видеть, что P будет в $O[x]$ идеалом.

Покажем, что фактор-кольцо $O[x]/P$ радикально. Действительно, так как фактор-кольцо $O[x]/P^*$ радикально, то для каждого полинома $a(x)$ из $Q(x)$ произвольный полином $F(x)$ из $Q[x]$ представим в виде

$$F(x) = \psi(x) - a(x)\ \psi(x) + N(x),$$

где $N(x)$ — полином из P^*, $\psi(x)$ — некоторый полином из $Q[x]$. (Условие это необходимо и достаточно для радикальности фактор-кольца, см ([3]).) Тогда для соответствующих целых частей имеет место равенство

$$\| F(x) \| = \| \psi(x) \| - \| a(x) \| \, \| \psi(x) \| + \| N(x) \| .$$

Здесь $\| F(x) \|$ — произвольный целочисленный полином, $\| a(x) \|$ — произвольный заданный целочисленный полином, а $\| N(x) \|$ — полином из P. Следовательно, фактор-кольцо $Q[x]/P$ радикально.

В силу теоремы 6, идеал P содержит полином вида x^k, а следовательно, идеал P^* — полином вида

$$T(x) = a_0 x^r + \cdots + a_{r-k} x^k + x^k + a_{r-k+1} x^{k-1} + \cdots + a_r,$$

где все a_i — элементы из Q. Так как, по условию, элемент α является целым над Q, то в P^* найдется полином

$$f(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n, \quad b_i \in Q^*, \quad b_n \in Q$$

со старшим коэффициентом единица. Если $k<n$, то умножим полином $T(x)$ на x^{n-k} и вычтем из произведения соответствующее кратное полинома $f(x)$ так, чтобы уничтожить все его члены в степени $\geqslant k$, за исключением x^k; мы получим полином, все коэффициенты которого, кроме первого, равного единице, принадлежат Q.

Следствие 1. *Элемент α кольца R тогда и только тогда является вполне целым над его радикальным подкольцом Q, если всякий полином от α (над Q) порождает над Q радикальное кольцо.*

Действительно, если всякий полином от α порождает над Q радикальное кольцо, то α, в силу теоремы 5, будет целым и, следовательно, в силу теоремы 8, вполне целым. Обратное установлено в предыдущем параграфе.

Следствие 2. *Совокупность S таких элементов α кольца R, каждый полином от каждого из которых порождает над радикальным подкольцом $Q\subset R$ радикальное кольцо, является в R радикальным подкольцом, причем всякий элемент из R, обладающий этим свойством относительно S, сам содержится в S.*

Это следствие вытекает из предыдущего следствия и теорем 1′ и 2′.

§ 4

В первом параграфе мы ввели для радикальных колец понятия вполне целого и рационального (над радикальным подкольцом) элемента, которые можно считать аналогами понятия алгебраического элемента в теории полей. Для колец без делителей нуля легко можно определить алгебраичность элемента еще и обычным образом; во всех трех случаях можно доказать существование, а для первого и единственность „алгебраически замкнутого“ расширения.

ЛЕММА 9. *Пусть R — полурадикальное кольцо без делителей нуля, F — его поле частных. Тогда R можно вложить в радикальное кольцо, лежащее внутри поля F.*

Действительно, таким кольцом будет совокупность всех элементов вида $\frac{x}{y+1}$, где x и y — элементы из R; квази-обратным для элемента $\frac{x}{y+1}$ будет элемент $\frac{-x}{(y-x)+1}$.

Пусть Q — подкольцо произвольного кольца R без делителей нуля, F_Q и F_R — их поля частных соответственно. Элемент α из R назовем *алгебраическим* (*трансцендентным*) *над* Q, если он является алгебраическим (трансцендентным) в F_R над F_Q. Из определения непосредственно следует, что совокупность всех алгебраических над Q элементов кольца R будет в R подкольцом, причем всякий элемент из R, алгебраический над подкольцом, состоящим из алгебраических над Q элементов, сам будет алгебраическим над Q. Если R и Q — радикальные кольца, то подкольцо, состоящее из всех алгебраических над Q элементов кольца R, радикально (так как квази-обратный x' элемента x из R в поле F_R равен $\frac{x}{x-1}$).

Мы имеем, таким образом, для элементов α радикального кольца R (относительно его радикального подкольца Q) следующие четыре понятия, соответствующие понятию алгебраического элемента в теории полей:

1. α — рациональный элемент,
2. α — алгебраический элемент (для колец без делителей нуля),
3. α порождает над Q радикальное кольцо,
4. α — вполне целый элемент (т. е. каждый полином от α порождает над Q радикальное кольцо).

Сравним их между собой. Из условия 1 (в кольцах без делителей нуля) следует условие 2. Действительно, если $\alpha = \frac{u}{v}$, u и v — целые над Q, то $v' = \frac{0}{v} = \frac{v}{v-1}$ будет алгебраическим над Q и, следовательно, элемент α, равный $u + v' - uv'$, также алгебраичен над Q. Однако эти условия не эквивалентны, как показывает следующий пример.

Пусть R — кольцо целочисленных степенных рядов от x без свободных членов, Q — подкольцо, состоящее из всех рядов с четными коэффициентами. Оба эти кольца радикальны. Что касается R, это известно; Q будет радикальным как идеал радикального кольца.

Каждый элемент r кольца R алгебраичен над Q $(2r \in Q)$; однако ни один из не содержащихся в Q элементов кольца R не будет рациональным над Q, так как в кольце R нет целых над Q элементов, кроме элементов самого Q. Действительно, каждый элемент r из R, $r \overline{\in} Q$, имеет вид $s + q$, где

$$s = x^k + \sum_{i>k} \varepsilon_i x^i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ или } 1, \quad k \geqslant 1.$$

Из равенства

$$(q+s)^n = q_1 (q+s)^{n-1} + \cdots + q_n + k_1 (q+s)^{n-1} + \cdots + k_{n-1} (q+s),$$

где $q_i \in Q$, k_i — целые числа, ввиду сравнения

$$(q+s)^n \equiv s^n \pmod{Q},$$

следовало бы сравнение

$$s^r \equiv k_1 s^{n-1} + \cdots + k_{n-1} s \pmod{Q},$$

которое невозможно ни при каких k_i (чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить наименьшие степени x с нечетными коэффициентами в левой и правой частях последнего равенства).

Далее, из условия 1 (а следовательно, и из условия 2) не следует ни 3-е, ни 4-е условие (пример в § 1). Наоборот, из условия 3 следует условие 1 (лемма 3) и, очевидно, условие 2.

Из условия 4 следует условие 3 (теорема 4) и, следовательно, условия 1 и 2. При некоторых дополнительных ограничениях (теоремы 7 и 8) доказано, что из условия 3 следует условие 4. Возможно, что условия 3 и 4 вообще эквивалентны.

Рассмотрим вопрос о существовании в различных смыслах «алгебраически замкнутых» расширений для радикальных колец без делителей нуля.

Пусть R — радикальное кольцо без делителей нуля, F — его поле частных и K — алгебраическое замыкание поля F. Обозначим через T совокупность всех вполне целых над R элементов поля K. В силу следствия 1 из теоремы 4, T будет в R радикальным подкольцом. Если T' — произвольное содержащее R радикальное кольцо без делителей нуля, каждый элемент которого является над R вполне целым, то поле частных кольца T', будучи алгебраическим расширением поля F, изоморфно вкладывается внутрь поля K; кольцо T' отображается при этом на некоторое подкольцо в T. Если, в частности, кольцо T' является расширением T, то оно совпадает с T, следовательно, имеет место

ТЕОРЕМА 9. *Для всякого радикального кольца R без делителей нуля существует максимальное содержащее его радикальное кольцо $\overline{R}$ без делителей нуля, каждый элемент которого является вполне целым над R. Такое кольцо (с точностью до изоморфизма) единственно и совпадает с совокупностью всех вполне целых над R элементов алгебраически замкнутого расширения K поля частных F кольца R.*

Пусть U при тех же значениях R, F и K будет максимальным содержащим R и не содержащим единицы подкольцом поля K. U — радикальное кольцо. Действительно, если бы это было не так, то U, будучи полурадикальным (как кольцо без единицы и без делителей нуля), вкладывалось бы внутри поля K в радикальное кольцо (лемма 9), также, естественно, не содержащее единицы, что противоречит максимальности U.

Каждое содержащее R радикальное кольцо без делителей нуля, всякий элемент которого алгебраичен над R, вкладывается в поле K, причем на некоторое его подкольцо, не содержащее единицы. Максимальные такие подкольца и будут играть роль «алгебраически замкнутых» расширений кольца.

ТЕОРЕМА 10. *Для всякого радикального кольца R без делителей нуля существует максимальное содержащее его радикальное кольцо $\overline{R}$ без делителей нуля, каждый элемент которого алгебраичен над R. Совокупность всех в этом смысле «алгебраически замкнутых» расширений кольца R совпадает с совокупностью всех содержащих R максимальных подколец без единицы алгебраически замкнутого алгебраического расширения K поля частных F кольца R.*

Единственности здесь, вообще говоря, не будет, как показывает следующий пример.

Пусть F будет полем рациональных чисел и $R = R_6$ (см. § 1). Обозначим через N_2 максимальное содержащее 2 и не содержащее единицы подкольцо поля K всех алгебраических чисел, через N_3 — максимальное подкольцо без единицы поля K, содержащее число 3. Легко видеть, что кольца N_2 и N_3 не изоморфны (двойка могла бы отображаться лишь на двойку, но вместе с двойкой кольцо N_3 содержало бы единицу), между тем, оба они являются расширениями кольца R_6.

Пусть при прежних обозначениях V будет подкольцом поля K, состоящим из всех его рациональных над R элементов. Кольцо V не будет радикальным, так как содержит единицу, однако всякое максимальное содержащее R и не содержащее единицы подкольцо кольца V

радикально. Действительно, если бы оно было только полурадикальным, то вкладывалось бы в радикальное даже внутри V, потому что присоединенное частное двух рациональных над R элементов будет рациональным над R.

Таким образом справедлива

ТЕОРЕМА 11. *Для всякого радикального кольца R без делителей нуля существует максимальное содержащее его радикальное кольцо $\overline{R}$ без делителей нуля, каждый элемент которого является рациональным над R. Совокупность всех таких расширений кольца R совпадает с совокупностью всех максимальных подколец без единицы кольца V, состоящего из всех рациональных над R элементов алгебраически замкнутого алгебраического расширения K поля частных F кольца R.*

Неединственность такого расширения устанавливается так же, как выше (на том же примере: 2 и 3 рациональны над R_6).

§ 5

Будем называть *кольцом целых* данного поля F любое его подкольцо с единицей, полем частных которого является F. Пусть R — радикальное кольцо без делителей нуля и F — его поле частных. Кольцо $\overline{R}$, полученное присоединением к R единицы (внутри поля F) будет для F кольцом целых, причем R будет идеалом в $\overline{R}$.

Обратно, пусть K будет произвольным кольцом целых поля F и I — любой неединичный и ненулевой идеал в K; как полурадикальное кольцо, I вкладывается внутри поля F в некоторое радикальное кольцо R. Поле F является полем частных кольца I (и тем более, полем частных кольца R); действительно, пусть α — некоторый элемент из I, а $\frac{m}{n}$ — произвольный элемент поля F (m и n — элементы кольца K); тогда элементы αm и αn принадлежат I, а их отношение равно $\frac{m}{n}$.

Таким образом, *каждое радикальное кольцо, порождающее поле F, является неединичным идеалом некоторого кольца целых этого поля; с другой стороны, каждому нетривиальному идеалу каждого кольца целых поля F однозначно соответствует некоторое порождающее F радикальное кольцо.*

ТЕОРЕМА 12. *Для того чтобы поле F было полем частных некоторого радикального кольца, необходимо и достаточно, чтобы это поле либо имело характеристику нуль, либо было неалгебраическим расширением своего простого подполя.*

Пусть поле F конечной характеристики будет алгебраическим расширением своего простого подполя P и пусть K будет произвольным кольцом целых поля F. Ясно, что P содержится в K. Пусть, далее, α будет произвольным элементом кольца K; очевидно, что все порожденное этим элементом над P подкольцо будет полем, содержащимся в K. Таким образом, кольцо K является полем и, следовательно, не содержит нетривиальных идеалов.

Обратно, всякое поле, имеющее характеристику нуль или же конечную характеристику, но являющееся неалгебраическим расширением

своего простого подполя, содержит (например, обычным образом определяемое) не совпадающее со всем полем кольцо целых, в котором есть неделители единицы и, следовательно, нетривиальные идеалы.

Найдем все радикальные подкольца, порождающие поле F рациональных чисел. Если в качестве кольца целых этого поля взять кольцо целых чисел, то получаются все указанные Андрунакиевичем кольца R_k рациональных чисел вида $\frac{km}{kn+1}$. Все они различны и не изоморфны (так как изоморфизм двух таких колец продолжался бы до автоморфизма поля рациональных чисел). Покажем, что никаких других колец, порождающих поле F, нет.

ТЕОРЕМА 13. *Все радикальные подкольца, порождающие поле F рациональных чисел, содержатся в серии R_k.*

Пусть K' — произвольное кольцо целых поля F, т. е. произвольное подкольцо поля F, содержащее кольцо K целых чисел. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, принадлежит K' и p — произвольный простой делитель числа n, то и $\frac{m}{p} \in K'$; далее, так как $1 = \frac{p}{p}$ принадлежит K', то в K' будет содержаться число $\frac{1}{p}$ (равное $\frac{m}{p}x + \frac{p}{p}y$, где x и y — такие целые числа, что $mx + py = 1$). Таким образом, существует такое множество Π простых чисел, что кольцо K' состоит из всех тех и только тех чисел из F, знаменатели которых делятся лишь на простые числа из Π.

Пусть I — произвольный нетривиальный идеал кольца K'. Как и выше, если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ принадлежит I и p — любой простой делитель числа n, то и $\frac{m}{p}$ принадлежит I. Далее, если p и q — различные простые числа и дроби $\frac{m}{p}$ и $\frac{n}{q}$ (причем общий наибольший делитель чисел m и n равен d) принадлежат I, то и $\frac{d}{pq}$, а следовательно, и $\frac{d}{p}$ и $\frac{d}{q}$ принадлежат I. Действительно, так как $(mq, np) = d$, то существуют такие целые числа u и v, что

$$umq + vnp = d,$$

но тогда

$$\frac{m}{p}u + \frac{n}{q}v = \frac{d}{pq}.$$

Пусть a — наименьшее положительное число, являющееся числителем некоторой дроби из I. Тогда идеал I состоит из всех дробей, числители которых кратны a, а знаменатели делятся лишь на числа из Π.

Пусть R — порожденное идеалом I радикальное кольцо. Каждый элемент из R имеет, очевидно, вид

$$\alpha = \frac{am}{an + p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}},$$

где m, n — произвольные целые числа, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — произвольные целые неотрицательные числа, $p_i \in \Pi$. Рассмотрим сравнение

$$x(an + p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) \equiv 1 \pmod{a}.$$

Так как $(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, a) = 1$, то оно имеет решение x. Пусть

$$x(an + p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = 1 + aN$$

и $mx = M$; элемент α приводится к виду

$$\frac{aM}{aN+1}$$

и, следовательно, принадлежит R_a. Так как, с другой стороны, R_a содержится, очевидно, в R, то эти два кольца совпадают.

ТЕОРЕМА 14. *Если общий наибольший делитель чисел k и l равен d, то сумма колец R_k и R_l совпадает с кольцом R_d, причем* $R = F$.

Очевидно, что $R_k \subset R_d$ и $R_l \subset R_d$ и, следовательно, $R_k + R_l \subseteq R_d$. Покажем, что, обратно, каждое число вида $\frac{d\alpha}{d\beta+1}$ содержится в сумме колец R_k и R_l.

Пусть $k = dk_1$, $l = dl_1$ $(k_1, l_1) = 1$ и пусть $d\beta + 1 = MN$, причем M взаимно просто с k, а N состоит только из делителей числа k (и, следовательно, числа k_1). Существует такое целое число x, что $Mx \equiv 1 \pmod{k}$, но тогда число $\frac{kN}{d\beta+1}$, равное $\frac{kN}{MN} = \frac{kx}{Mx}$, принадлежит R_k. Аналогично, в кольце R_l найдется число $\frac{lN'}{d\beta+1}$, где N' — число, состоящее только из делителей числа l_1. Общий наибольший делитель чисел kN и lN' равен

$$(kN, lN') = (dk_1N, dl_1N') = d;$$

следовательно, существуют такие целые числа u и v, что

$$kNu + lN'v = d.$$

Поэтому число $\frac{d}{d\beta+1}$, равное $\frac{kN}{d\beta+1}u + \frac{lN'}{d\beta+1}v = \frac{d}{d\beta+1}$, а следовательно, и $\frac{d\alpha}{d\beta+1}$ принадлежат $R_k + R_l$.

С другой стороны, очевидно, что пересечение колец R_k и R_l совпадает с кольцом R_t, где t есть общий наибольший делитель чисел k и l, следовательно, *множество всех радикальных подколец поля рациональных чисел, рассматриваемое вместе с самим полем, является структурой*.

Поступило
5. VII. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jacobson N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math., 67 (1945), 300—320.
[2] Foster A. L. and Bernstein B. A., Symmetric approach to commutative rings with duality theorem, Duke Math. J., 11 (1944), 603—618.
[3] Андрунакиевич В. А., Полурадикальные кольца, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 129—176.
[4] Krull W., Idealtheorie, Berlin, 1935.
[5] Mac Coy, Subrings of infinite direct sums, Duke Math. J., 4 (1938), 486—494.
[6] Mac Coy, Subrings of direct sums, Amer. J. Math., 60 (1938), 374—382.
[7] Ван-дер-Варден, Современная алгебра, М.— Л., 1947.
[8] Вейль Г., Алгебраическая теория чисел, М., 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 473–491

И. М. СЛИВНЯК

О ТЕОРЕМЕ ЕДИНСТВЕННОСТИ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В работе строится ограниченное, замкнутое, нигде не плотное множество $\mathfrak{K}$, не имеющее иррегулярных точек относительно своего дополнения, и на $\mathfrak{K}$ распределяются массы μ, логарифмический потенциал которых постоянен во всех пустотах, дополнительных к $\mathfrak{K}$.

Введение

В современной теории потенциала существенное значение имеют теоремы единственности, рассматривающие вопрос об однозначном определении масс по потенциалу. Самая общая теорема такого типа принадлежит Валле-Пуссену ([1]) и заключается в следующем:

Пусть G — открытое множество с ограниченной границей F; μ — распределение масс на F; U — потенциал этих масс. Распределение μ определяется значениями U на G, если множество точек F, иррегулярных для G, не несет масс*.

Будем в дальнейшем понимать под $\mathfrak{K}$ ограниченное, замкнутое, нигде не плотное множество z-плоскости, все точки которого регулярны для его дополнения. В силу сформулированной выше теоремы, значения потенциала вне $\mathfrak{K}$ однозначно определяют распределение масс на $\mathfrak{K}$.

В классической теории потенциала массы определяются, в сущности, не значениями самого потенциала, а значениями его производной. Это обстоятельство приводит к попытке сформулировать теорему единственности в более общей форме, а именно:

если потенциал масс, лежащих на $\mathfrak{K}$, постоянен в каждой компоненте дополнения к $\mathfrak{K}$, то массы тождественно равны нулю.

Целью настоящей работы является построение контр-примера, т. е. построение такого множества $\mathfrak{K}$ и такого распределения масс на нем, потенциал которого постоянен в каждой компоненте дополнения к $\mathfrak{K}$.

Построенный пример тесно связан с задачей аппроксимации непрерывной на $\mathfrak{K}$ функции линейными комбинациями гармонических функций вида

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(z-\xi_i)^n}, \quad \operatorname{Im}\frac{1}{(z-\xi_i)^n} \quad (i, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где ξ_i — фиксированные точки, выбранные по одной в каждой из компонент дополнения к $\mathfrak{K}$ [см. Н. Ландкоф ([2])].

* Определение иррегулярности дано в п. 2.8.

Именно, как показано в цитированной работе, эта задача эквивалентна невозможности построения потенциала, порождаемого массами, лежащими на $\mathfrak{K}$, и постоянного в каждой компоненте дополнения к $\mathfrak{K}$.

Из построенного нами примера следует, что отсутствие иррегулярных точек у множества $\mathfrak{K}$, необходимое для положительного решения поставленной задачи аппроксимации, не является однако достаточным *.

§ 1

Постановка задачи. Построить такое плоское ограниченное замкнутое нигде не плотное множество $\mathfrak{K}$ и распределить на нем конечные массы таким образом, чтобы:

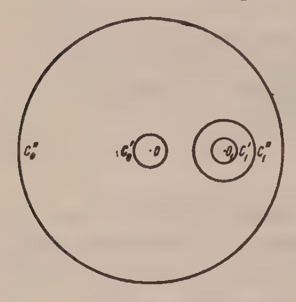


Рис. 1

а) логарифмический потенциал этих масс был постоянен во всех пустотах, служащих дополнениями к множеству $\mathfrak{K}$ (включая и пустоту, содержащую бесконечность);

б) все точки множества $\mathfrak{K}$ были регулярны для дополнения к $\mathfrak{K}$.

1.1. Обозначения. Пусть K означает замкнутое кольцо с центром в O, ограниченное концентрическими окружностями C' и C'' радиусов r' и r'', $\frac{1}{2} > r'' \geqslant 2r'$; K' — внутренний открытый круг кольца K; K'' — замкнутый круг, ограниченный окружностью C''; m' и m'' — массы, расположенные соответственно на окружностях C' и C'' кольца K; m — полная вариация этих масс; $U(P)$ — суммарный потенциал этих масс.

1.2. Рассмотрим кольцо K_0 с центром в O, которое будем в дальнейшем называть кольцом нулевого порядка. Распределим на C_0' с постоянной плотностью положительные массы m_0' и выметем их с переменой знака на C_0''. Мы получим массы m_0''. Потенциал $U_0(P)$ постоянен в K_0' и равен нулю вне K_0''. Можно считать, что $1 > U_0(P) \geqslant 0$ в K_0.

1.3. Поместим строго внутри K_0 кольцо K_1 с центром в O_1, которое назовем кольцом первого порядка. Согласно лемме 1.7, на окружностях кольца K_1 можно распределить такие массы m_1' и m_1'', потенциал которых $U_1(P)$ равен $-U_0(P) + U_0(O_1)$ в K_1' и нулю — вне K_1''. При этом величина m_1 пропорциональна отношению радиусов $\frac{r_1'}{r_1''}$ кольца K_1.

Потенциал $U_0(P) + U_1(P)$ масс, расположенных на окружностях колец K_0 и K_1, постоянен в K_0' и K_1' и равен нулю вне K_0''.

1.4. Покроем кольцо K_0 всюду плотным множеством попарно непересекающихся кругов $\{K_{n_1}''\}$ ($n_1 = 1, 2, \ldots$), лежащих строго внутри K_0. Каждому кругу K_{n_1}'' соответствует кольцо первого порядка K_{n_1},

* Это условие необходимо и достаточно для аппроксимации непрерывной на $\mathfrak{K}$ функции линейными комбинациями функций

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(z-\xi_i)^n}, \quad \operatorname{Im}\frac{1}{(z-\xi_i)^n}, \quad \ln\frac{1}{|z-\xi_i|} \qquad (i, n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ [см. (}^2\text{)]}.$$

на окружностях которого, согласно лемме 1.7, помещены массы. При этом отношения $\frac{r'_{n_1}}{r''_{n_1}}$ должны убывать настолько быстро, чтобы ряд $\sum\limits_{n_1} m_{n_1}$ сходился. Суммарный потенциал $U_0(P)+\sum\limits_{n_1} U_{n_1}(P)$ масс, расположенных на окружностях построенных колец, постоянен в кругах K'_0, K'_{n_1} $(n_1=1, 2, \ldots)$ и равен нулю вне K''_0.

1.5. Каждое кольцо первого порядка K_{n_1} покрываем всюду плотным множеством попарно непересекающихся кругов $\{K''_{n_1n_2}\}$ $(n_2=1, 2, \ldots)$, лежащих строго внутри K_{n_1}. Этим кругам соответствуют кольца $K_{n_1n_2}$, которые мы назовем кольцами второго порядка.

На окружностях кольца $K_{n_1n_2}$ (с центром в $O_{n_1n_2}$) располагаем, согласно лемме 1.7, массы $m'_{n_1n_2}$, $m''_{n_1n_2}$, потенциал которых $U_{n_1n_2}(P)$ равен

$$-U_0(P)-U_{n_1}(P)+U_0(O_{n_1n_2})+U_{n_1}(O_{n_1n_2})$$

в $K'_{n_1n_2}$ и нулю вне $K''_{n_1n_2}$. При этом нужно обеспечить сходимость ряда $\sum\limits_{n_1, n_2} m_{n_1n_2}$.

Суммарный потенциал

$$U_0(P)+\sum_{n_1} U_{n_1}(P)+\sum_{n_1, n_2} U_{n_1n_2}(P)$$

постоянен в кругах K'_0, K'_{n_1} $(n_1=1, 2, \ldots)$, $K'_{n_1n_2}$ $(n_1, n_2=1, 2, \ldots)$ и равен нулю вне K''_0.

1.6. Продолжая конструкцию, мы будем последовательно получать кольца 3-го, 4-го и высших порядков и в результате придем к замкнутому нигде не плотному множеству

$$\mathfrak{K}=K_0-\sum_{n_1} K'_{n_1}-\sum_{n_1, n_2} K'_{n_1n_2}-\cdots.$$

На этом множестве расположены массы

$$m'_0,\ m''_0,\ m'_{n_1},\ m''_{n_1},\ m'_{n_1n_2},\ m''_{n_1n_2},\ \ldots,$$

ряд полных вариаций которых должен сходиться:

$$m_0+\sum_{n_1} m_{n_1}+\sum_{n_1, n_2} m_{n_1n_2}+\cdots<\infty.$$

Суммарный потенциал этих масс

$$U_0(P)+\sum_{n_1} U_{n_1}(P)+\sum_{n_1, n_2} U_{n_1n_2}(P)+\ldots$$

постоянен во всех кругах $K'_{n_1n_2\ldots}$ и равен нулю вне K''_0.

При этом конструкция должна быть проведена таким образом, чтобы все точки множества $\mathfrak{K}$ оказались регулярными для дополнения к $\mathfrak{K}$, т. е., чтобы каждая точка $\in\mathfrak{K}$ была предельной для достаточно мощной последовательности пустот $K'_{n_1n_2\ldots}$.

1.7. Рассмотрим кольцо $K\left(r_1\leqslant\frac{r_2}{2}\right)$ и вспомогательную окружность C''' радиуса $r_3=2r_2$ с центром в O.

Внутри C''' задана гармоническая функция $U(x, y)$, непрерывная на C'''.

ЛЕММА. *Существует распределение вещественных масс на* C' *с непрерывной плотностью* $\mu_1(\varphi)$ *и на* C'' *с непрерывной плотностью* $\mu_2(\varphi)$, *логарифмический потенциал которого равен* $U(x, y) - U(0, 0)$ *внутри* C' *и нулю вне* C'', *причем полная вариация этих масс*

$$m = \int_{C'} |\mu_1|\, ds + \int_{C''} |\mu_2|\, ds < 60\,\mathfrak{A}\alpha,$$

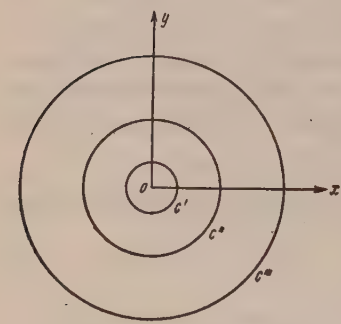


Рис. 2

где $\mathfrak{A} = \max\limits_{C'''} |U(x, y)|$ *и* $\alpha = \frac{r_1}{r_2}$.

Доказательство. Дополним $U(x, y)$ в C''' до аналитической функции:

$$f(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

где $V(0, 0) = 0$. Требуется решить систему уравнений

$$\int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{r_1 e^{i\varphi} - z}\, \mu_1(\varphi)\, r_1\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{r_2 e^{i\varphi} - z}\, \mu_2(\varphi)\, r_2\, d\varphi = \begin{cases} f(z) - f(0) + ik^{*} & \text{при } z \text{ внутри } C', \\ 0 & \text{при } z \text{ вне } C'' \end{cases}$$

относительно вещественных функций $\mu_1(\varphi)$ и $\mu_2(\varphi)$.

Пусть z внутри C'. Тогда

$$\ln \frac{1}{r_1 e^{i\varphi} - z} = -\ln(r_1 e^{i\varphi}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{r_1 e^{i\varphi}} \right)^k,$$

$$\ln \frac{1}{r_2 e^{i\varphi} - z} = -\ln(r_2 e^{i\varphi}) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{z}{r_2 e^{i\varphi}} \right)^k$$

и

$$-r_1 \ln r_1 \int_0^{2\pi} \mu_1(\varphi)\, d\varphi - r_2 \ln r_2 \int_0^{2\pi} \mu_2(\varphi)\, d\varphi - i \int_0^{2\pi} \varphi\, [r_1\mu_1(\varphi) + r_2\mu_2(\varphi)]\, d\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi z^k}{k} \left(\frac{a_k}{r_1^{k-1}} + \frac{b_k}{r_2^{k-1}} \right) = f(z) - f(0) + ik, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_1(\varphi)\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu_2(\varphi)\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi.$$

---

* Величина вещественной постоянной k безразлична.

Аналогично, при z вне C'' получаем:

$$\ln \frac{1}{r_1 e^{i\varphi} - z} = -\ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_1 e^{i\varphi}}{z}\right)^k,$$

$$\ln \frac{1}{r_2 e^{i\varphi} - z} = -\ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r_2 e^{i\varphi}}{z}\right)^k,$$

$$-\ln z \left[r_1 \int_0^{2\pi} \mu_1(\varphi)\, d\varphi + r_2 \int_0^{2\pi} \mu_2(\varphi)\, d\varphi \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\pi}{kz^k} (r_1^{k+1} a_{-k} + r_2^{k+1} b_{-k}) = 0. \quad (2)$$

Функция $f(z)$ раскладывается внутри C''' в степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

В силу (1),

$$\frac{2\pi}{k} \left(\frac{a_k}{r_1^{k-1}} + \frac{b_k}{r_2^{k-1}} \right) = c_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

В силу (2),

$$r_1^{k+1} a_{-k} + r_2^{k+1} b_{-k} = 0,$$

т. е.

$$r_1^{k+1} a_k + r_2^{k+1} b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

(так как $a_{-k} = \overline{a}_k$ и $b_{-k} = \overline{b}_k$). Отсюда $b_k = -\alpha^{k+1} a_k$ и

$$a_k = \frac{k r_1^{k-1} c_k}{2\pi (1 - \alpha^{2k})} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\alpha = \frac{r_1}{r_2}$.

С другой стороны, $|c_k| \leqslant \frac{M}{r_2^k}$, где $M = \max\limits_{C''} |f(z)|$.

Таким образом,

$$|a_k| \leqslant \frac{kM\alpha^{k-1}}{2\pi r_2 (1 - \alpha^{2k})} < \frac{M}{\pi r_2} k\alpha^{k-1}$$

и

$$|b_k| < \frac{M}{\pi r_2} k\alpha^{2k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$\left(\text{так как } \alpha \leqslant \frac{1}{2}\right)$. Полагаем

$$\mu_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{ik\varphi} + a_{-k} e^{-ik\varphi}),$$

$$\mu_2(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k e^{ik\varphi} + b_{-k} e^{-ik\varphi});$$

эти ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Таким образом, функции $\mu_1(\varphi)$ и $\mu_2(\varphi)$ непрерывны. Они удовлетворяют уравнениям (1) и (2), так как

$$\int_0^{2\pi} \mu_1(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \mu_2(\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Имеем

$$|\mu_1(\varphi)| < \frac{2M}{\pi r_2} \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{k-1}, \quad |\mu_2(\varphi)| < \frac{2M}{\pi r_2} \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{2k},$$

$$m = \int_{C'} |\mu_1|\,ds + \int_{C''} |\mu_2|\,ds < 4M \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^k + 4M \sum_{k=1}^{\infty} k\alpha^{2k} =$$

$$= 4M\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}\right) < 20\,M\alpha.$$

Переходим от M к $\mathfrak{A}$:

$$M < |V(0, 0)| + \mathfrak{A}\frac{r_3 + r_2}{r_3 - r_2} = 3\mathfrak{A} \text{ [см. (}^3\text{)]}.$$

Таким образом, $m < 60\,\mathfrak{A}\alpha$.

§ 2

Введем обозначения:

$$\mathfrak{K}_0 = K_0 - \sum_{n_1} K''_{n_1}, \quad \mathfrak{K}_{n_1} = K_{n_1} - \sum_{n_2} K''_{n_1 n_2},$$

$$\mathfrak{K}_{n_1 n_2} = K_{n_1 n_2} - \sum_{n_3} K''_{n_1 n_2 n_3} \text{ и т. д.}$$

$$\mathfrak{K}' = K_0 \cap \sum_{n_1} K_{n_1} \cap \sum_{n_1, n_2} K_{n_1 n_2} \cap \ldots .$$

Очевидно,

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' + \mathfrak{K}_0 + \sum_{n_1} \mathfrak{K}_{n_1} + \sum_{n_1, n_2} \mathfrak{K}_{n_1 n_2} + \ldots .$$

В § 2 мы построим систему $\{K_{n_1}\}$ колец 1-го порядка и проверим конечность масс, расположенных, согласно § 1, на окружностях этих колец, и регулярность точек множества $\mathfrak{K}_0$ для совокупности пустот $\{K'_{n_1}\}$ (эти точки тем более будут регулярны для совокупности всех пустот, дополнительных к множеству $\mathfrak{K}$).

2.1. Поместим полюс полярной системы координат в центр кольца K_0 и зафиксируем направление полярной оси. Будем называть двоично рациональными точками кольца K_0 точки, полярные координаты которых имеют вид:

$$\varphi = 2\pi\frac{q}{2^p}, \quad q \leqslant 2^p \text{ и } \rho = l_0\frac{q_1}{2^{p_1}}, \quad q_1 \leqslant 2^{p_1},$$

где $l_0 = r''_0 - r'_0$.

Установим порядок нумерации этих точек. Сперва нумеруем ρ-координаты. Делим интервал (r_0', r_0'') пополам, получаем одну точку 1-го ρ-ранга $\mathfrak{R}_1^\rho$; затем делим каждый полученный интервал снова пополам, получаем две точки второго ρ-ранга $\mathfrak{R}_2^\rho$; после этого получаем четыре точки 3-го ρ-ранга $\mathfrak{R}_3^\rho$ и т. д. n-му ρ-рангу $\mathfrak{R}_n^\rho$ принадлежит 2^{n-1} точек; общее количество точек, ρ-ранг которых $\leqslant n$, есть

$$1+2+\cdots 2^{n-1}=2^n-1,$$

причем совокупность этих точек делит интервал (r_0', r_0'') на промежутки длиной $\frac{l_0}{2^n}$ каждый. Нумеруем точки в порядке их получения (скажем, слева направо). Аналогично поступаем и с интервалом $(0, 2\pi)$. Точки нумеруем в виде таблицы:

φ \ ρ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
φ_1	P_1	P_2	P_5	P_{10}	|
φ_2	P_4	P_3	P_6	P_{11}	|
φ_3	P_9	P_8	P_7	P_{12}	|
φ_4	P_{16}	P_{15}	P_{14}	P_{13}	↓
φ_5	←	—	—	—	

В результате получаем последовательность $\{P_N\}$. Если ρ-ранг и φ-ранг точки P_N будут $\leqslant n$, то $N \leqslant (2^n-1)^2$.

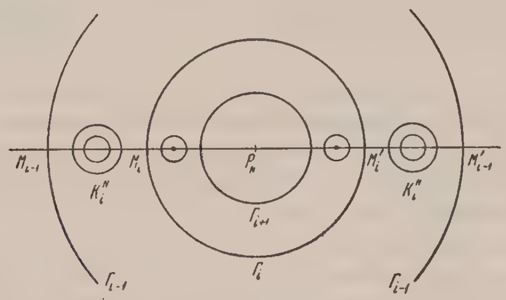


Рис. 3

2.2. Каждой точке P_N сопоставим индивидуальную последовательность $\{K_i^N\}$ колец первого порядка. Проведем прямую P_NO (O — центр K_0) и семейство концентрических окружностей Γ_i с центром в P_N радиусов $\frac{l_0}{2^i}$. Обозначим через M_i и M_i' точки пересечения Γ_i с P_NO. $\overline{M_{i-1}M_i}=\frac{l_0}{2^i}$. Посередине отрезка $M_{i-1}M_i$ помещаем центр кольца K_i^N, внешний радиус которого $r_{Ni}''=\frac{l_0}{2^{i+2}}$. На отрезке $M_{i-1}' M_i'$ делаем то же самое. В результате получаем последовательность колец $\{K_i^N\}$, сходящуюся с обеих сторон к точке P_N (каждому номеру i соот-

ветствует два кольца). Все эти кольца, начиная с некоторого номера i_N, лежат внутри K_0, и на них, согласно § 1, должны быть помещены массы. Потребуем, чтобы $\sum_{i=i_N}^{\infty} m_i^N < \frac{1}{2N^2}$, где m_i^N — полная вариация масс, расположенных на окружности кольца K_i^N. Для этого полагаем. $m_i^N \leqslant \frac{1}{N^2 \cdot 2^{i+1}}$. Это условие определяет величину r'_{Ni} внутреннего радиуса кольца K_i^N. В силу леммы 1.7.

$$m_i^N < 60\,\mathfrak{A}_0 \frac{r'_{Ni}}{r''_{Ni}} = \frac{60\,\mathfrak{A}_0}{l_0}\, 2^{i+2} r'_{Ni} < \frac{60}{l_0}\, 2^{i+2} r'_{Ni},$$

где (см. п. 1.2)

$$\mathfrak{A}_0 = \max_{K_0} |U_0(P)| < 1.$$

Из условия

$$\frac{60}{l_0}\, 2^{i+2} r'_{Ni} = \frac{1}{N^2 \cdot 2^{i+1}}$$

находим

$$r'_{Ni} = \frac{l_0}{60 N^2 \cdot 2^{2i+3}} = \frac{\eta}{N^2 \cdot 2^{2i}},$$

где $\eta = \frac{l_0}{480}$.

Из последовательностей $\{K_i^{N_1}\}$, $\{K_i^{N_2}\}, \ldots$, определенных выше, и будет построена система колец 1-го порядка. Тем самым сходимость ряда $\sum_{n_1} m_{n_1}$ обеспечена: $\sum_{n_1} m_{n_1} < 1$.

В результате построения (см. пп. 2.3—2.5) мы получим подпоследовательность двоично рациональных точек $\{P_{N_j}\}$ кольца K_0, каждая из которых будет предельной для последовательности колец 1-го порядка, определенной в этом пункте. Все точки $P_{N_j} \in \mathfrak{K}_0$ регулярны для совокупности пустот $\{K'_{n_1}\}$. *

Основная трудность заключается в установлении регулярности остальных точек множества $\mathfrak{K}_0$.

2.3. Переходим к конструкции системы колец 1-го порядка в K_0. Кольцо K_0 покрыто сеткой ρ-окружностей и φ-лучей. При этом двоично рациональные ρ-окружности и φ-лучи разбиты соответственно на ρ- и φ-ранги и перенумерованы (п. 2.1). Интервал (r'_0, r''_0) условимся называть основным.

Делим основной интервал пополам — получаем точку ρ_1. Устремляем к точке ρ_1 с обеих сторон последовательность точек M_i, удаленных от ρ_1 на $\frac{l_0}{2^i}$. Обозначим через S_i^1 отрезок длины $\frac{l_0}{2^i}$ с концами M_{i-1}, M_i

* Ибо, как легко проверить, каждая точка P_{N_j} регулярна для последовательности пустот $\{K_i^{N_j}\}$.

и через s_i^1 — отрезок длины $\frac{l_0}{2^{i+1}}$, расположенный симметрично относительно середины S_i^1.

Переходя от основного интервала к кольцу K_0, получаем последовательность круговых полос S_i^1, покрывающую всё K_0 (исключая

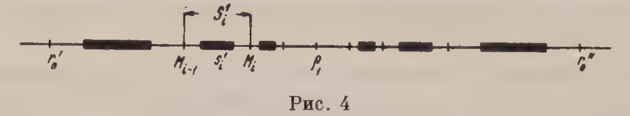


Рис. 4

ρ-окружность ρ_1), причем в каждой S_i^1 содержится круговая полоса s_i^1.

Возьмем точку P_1, лежащую на пересечении окружности ρ_1 с лучом из $\mathfrak{R}_1^\varphi$, и устремим к ней, согласно 2.2, последовательность колец $\{K_i^1\}$. Эти кольца будут иметь центры на рассматриваемом луче и точно впишутся в полосы s_i^1.

Затем рассмотрим точки с координатой ρ_1, лежащие на лучах из $\mathfrak{R}_2^\varphi$. Каждой из них, подобно предыдущему, сопоставляем последовательность колец $\{K_i^N\}$ (N — номер данной точки в последовательности $\{P_N\}$). При этом кольцо K_i^N точно вписывается в полосу s_i^1. Мы будем говорить, что оно принадлежит полосе s_i^1. Диаметры колец K, принадлежащих полосе s_i^1, равны ширине этой полосы d_i.

При построении последовательностей $\{K_i^N\}$ должно выполняться условие (I): расстояние между центрами соседних колец, принадлежащих полосе s_i^1, считаемое по средней окружности полосы, должно превышать $2d_i$.

Если для какого-нибудь кольца условие (I) нарушается, то мы это кольцо пропускаем. Кольца K_i^N с данным номером i будут пропущены или оставлены одновременно для всех лучей рассматриваемого φ-ранга.

Построив последовательности $\{K_i^N\}$ на лучах из $\mathfrak{R}_2^\varphi$, переходим к лучам из $\mathfrak{R}_3^\varphi$, затем — к лучам из $\mathfrak{R}_4^\varphi$ и т. д. При этом, согласно условию (I), последовательности $\{K_i^N\}$ с возрастанием φ-ранга начинаются со всё бо́льших i.

В результате будут охвачены все двоично рациональные точки кольца K_0 с ρ-координатой ρ_1, причем номер i, с которого начинается последовательность $\{K_i^N\}$, соответствующая точке P_N, определяется φ-рангом точки P_N.

Итак, кольцо K_0 покрыто круговыми полосами S_i^1; каждая S_i^1 содержит полосу s_i^1, покрытую принадлежащими ей кольцами K_i^N; расстояние между центрами соседних колец, принадлежащих полосе s_i^1, заключено между $2d_i$ и $4d_i$ (оно одно и то же на всем протяжении s_i^1).

2.4. Зафиксируем какой-нибудь отрезок S_i^1 основного интервала. Будем различать в нем три части: $\overline{S}_i^1$, s_i^1 и $\overline{\overline{S}}_i^1$. Рассмотрим любую из

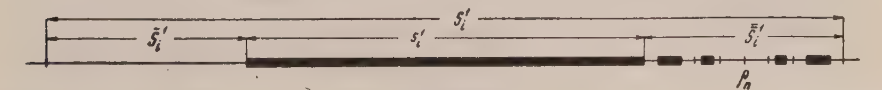


Рис. 5

крайних, скажем $\overline{\overline{S}}{}_i^1$. Повторяем для $\overline{\overline{S}}{}_i^1$ ту же конструкцию, которая была произведена для основного интервала. А именно: делим $\overline{\overline{S}}{}_i^1$ пополам, получаем точку ρ_n; устремляем к ней последовательность отрезков S_i^n и s_i^n; переходя к кольцу K_0, получаем совокупность полос $\{S_i^n\}$, покрывающих рассматриваемую часть полосы S_i^1; каждая S_i^n содердержит полосу s_i^n, покрытую принадлежащими ей кольцами первого порядка (с учетом условия (I)).

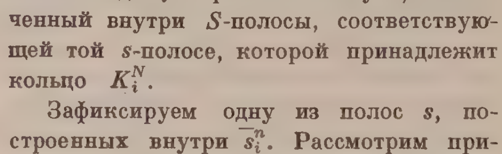
Таким образом мы охватываем все точки P_N с ρ-координатой ρ_n. То же построение повторяем для отрезка $\overline{S}{}_i^1$.

Описанный выше процесс производится для всех отрезков S_i^1, а потом вообще для всех отрезков S_i^n, получаемых при построении. В результате кольцо K_0 покрывается всюду плотным множеством круговых полос s_i^n, каждая из которых лежит внутри соответствующей полосы S_i^n и покрыта принадлежащими ей кольцами первого порядка.

2.5. Зафиксируем какой-нибудь отрезок s_i^n основного интервала. Разобьем s_i^n на левую половину $\overline{s}{}_i^n$ и правую половину $\overline{\overline{s}}{}_i^n$. Рассмотрим любую из них, скажем $\overline{s}{}_i^n$. Проделаем для $\overline{s}{}_i^n$ то же построение, какое было произведено в 2.3—2.4 для основного интервала. В результате круговая полоса $\overline{s}{}_i^n$ покроется всюду плотным множеством полос s, каждая из которых лежит внутри соответствующей полосы S и покрыта принадлежащими ей кольцами первого порядка.

Для дальнейшего введем некоторые определения.

Назовем круги K'', соответствующие кольцам K, принадлежащим полосе s_i^n, *пересекающими* кругами по отношению ко всякой S- или s-полосе, лежащей внутри s_i^n. Далее, проведем через центр любого кольца K_i^N φ-луч и будем понимать под L_i^N отрезок этого луча, заключенный внутри S-полосы, соответствующей той s-полосе, которой принадлежит кольцо K_i^N.



Зафиксируем одну из полос s, построенных внутри $\overline{s}{}_i^n$. Рассмотрим принадлежащие s кольца K. Удалим из конструкции все кольца K, у которых соответствующие отрезки L имеют общие точки с кругами, пересекающими полосу s. В результате кольца, принадлежащие полосе s, разобьются на группы, заключенные между пересекающими кругами. Из каждой такой группы удалим крайние кольца.

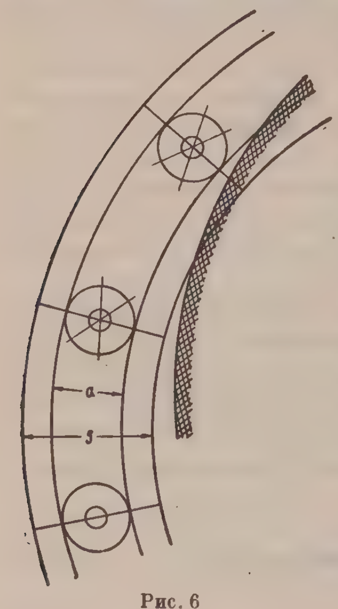


Рис. 6

Эту операцию проделаем со всеми полосами s, построенными в $\overline{s}{}_i^n$.

Процесс, описанный в 2.5, повторяем для отрезка $\overline{\overline{s}}{}_i^n$, затем — для всех отрезков s_i^n, полученных в 2.4, а потом — для всех вообще отрезков s, получаемых при построении.

В результате кольцо K_0 покрывается всюду плотным множеством колец первого порядка.

2.6. Рассмотрим какую-нибудь полосу s_k. В этом пункте индекс k означает, что s_k является последней в ряду вложенных полос

$$s_1 \supset s_2 \supset \cdots \supset s_{k-1} \supset s_k,$$

где между s_j и s_{j+1} не содержится никакой s-полосы, $s_j \supset s \supset s_{j+1}$, $j < k$. Совокупность кругов $\widetilde{K}''$, принадлежащих s_k и пересекающих s_k, складывается из кругов, принадлежащих всем полосам $s_1, \ldots, s_k$.

Всякий φ-луч пересекается в пределах полосы S_k не более, чем одним из кругов $\widetilde{K}''$. При $k=2$ это следует из 2.5. Для k любого применяем индукцию.

Зафиксируем точку $Q \in S_k$, не принадлежащую ни одному из кругов $\widetilde{K}''$. Пусть L_Q и Γ_Q означают φ-луч и ρ-окружность, проходящие через Q. На луче L_Q можно указать направление, двигаясь в котором от точки Q, мы не встретим в пределах S_k ни одного из кругов $\widetilde{K}''$. Назовем это направление положительным.

Обозначим через A_Q криволинейный прямоугольник с вершиной в Q, одной из сторон которого служит отрезок луча L_Q, а другой — дуга окружности Γ_Q.

ЛЕММА. *Каково бы ни было положение точки $Q \in S_k$, лежащей вне кругов $\widetilde{K}''$, всегда существует прямоугольник A_Q, не пересекающийся ни с одним из кругов $\widetilde{K}''$ и простирающийся по лучу L_Q в положительном направлении от точки Q до границы S_k и по средней окружности s_k на $\frac{d_k}{2}$, где d_k — ширина s_k.*

Доказательство. В силу 2.3, расстояние между двумя соседними кругами, принадлежащими s_k, считаемое по средней окружности s_k, $\geqslant d_k$. В силу 2.5, то же справедливо и для расстояния между кругом, принадлежащим s_k, и кругом, пересекающим s_k. Таким образом, расстояние между лучом L_Q и ближайшим кругом K'', взятым с подходящей стороны от L_Q, считаемое по средней окружности s_k, $\geqslant \frac{d_k}{2}$. Если построить прямоугольник A_Q, то из конструкции следует, что он не пересекается ни с одним из кругов $\widetilde{K}''$.

2.7. Рассмотрим какую-нибудь из последовательностей $\{K_i^N\}$, входящих в нашу конструкцию (2.2).

ЛЕММА. *Если последовательность $\{K_i^N\}$ начинается с номера $\leqslant j$, то φ-ранг точки P_N будет $< j+4$ и ρ-ранг P_N будет $\leqslant j-1$.*

Доказательство. Кольцо K_j^N принадлежит полосе s ширины $\frac{l_0}{2^{j+1}}$ (2.2). Расстояние между центрами соседних колец, принадлежащих этой полосе, должно быть $> \frac{l_0}{2^j}$. Пусть центр K_j^N лежит на φ-луче из $\mathfrak{R}_{j+4}^{\varphi}$. Достаточно показать, что $\frac{2\pi r_0''}{2^{j+4}} < \frac{l_0}{2^j}$, т. е. что $\pi r_0'' < 8 l_0$ или $r_0'' < \frac{8(r_0'' - r_0')}{\pi}$. Но это так, ибо $r_0' \leqslant \frac{r_0}{2}$ (1.1).

Переходим к ρ-рангу. ρ-ранг точки P_N определяется на основном интервале тем отрезком, который она при построении делит пополам: если половина длины этого отрезка есть $\frac{l_0}{2^{j-1}}$, то ρ-ранг P_N равен $j-1$ (2.3—2.5). Наибольший диаметр соответствующих этой точке колец K_i^N есть $\frac{l_0}{2^{j+1}}$. Таким образом, кольцо K_j^N не может соответствовать точке P_N, ρ-ранг которой выше, чем $j-1$.

2.8. Сформулируем достаточный критерий регулярности точки, принадлежащей границе открытого множества, для этого множества.

Рассмотрим точку Q, принадлежащую замкнутому множеству F. Окружим ее семейством концентрических окружностей Γ_n радиусов r_n с центром в Q. Радиусы r_n должны удовлетворять условию:

$$a \leqslant \frac{r_n}{r_{n-1}} \leqslant b, \quad 0 < a \leqslant b < 1.$$

Обозначим через C_n емкость замкнутой части множества F, заключенной между окружностями Γ_{n-1} и Γ_n.

Под емкостью замкнутого множества тут понимается величина $e^{-\gamma}$, где γ — постоянная Робэна области, дополнительной к данному множеству [см. (4), n° 95]. В частности, емкость круга равна его радиусу (там же, n° 99).

Критерием регулярности точки Q для F является расходимость ряда Винера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln \frac{r_{n-1}}{C_n}} \quad \text{[см. (5)]}.$$

Точка Q называется регулярной для открытого множества G, если существует такое замкнутое множество $F \subset G + Q, Q \in F$, для которого Q регулярна [см (1)].

Таким образом, для доказательства регулярности точки $Q \in \mathfrak{K}$ для дополнения к $\mathfrak{K}$ достаточно указать хотя бы одну последовательность кругов $K'_{n_1 n_2 \ldots}$, сходящуюся к Q, для которой Q регулярна.

2.9. Переходим к проверке регулярности точек множества $\mathfrak{K}_0$. Пусть $Q \in \mathfrak{K}_0$. Сопоставим точке Q последовательность вложенных полос $\{S_k\}$, к пересечению которых принадлежит Q. При этом между S_k и S_{k+1} не содержится никакой S-полосы, $S_k \supset S \supset S_{k+1}$. Пусть d_k означает ширину полосы s_k, соответствующей S_k.

Ряд Винера для точки Q будем строить следующим образом. Фиксируем номер k; выбираем конечное число колец K^*, лежащих внутри S_k и вне S_{k+1}; охватываем кольца K^* окружностями Γ^* с центрами в Q, причем так, что между двумя соседними окружностями Γ^* расположено в точности одно из выбранных колец K^*. При этом внутренний радиус построенной группы окружностей полагаем равным d_{k+1}, внешний — d_k, и радиусы окружностей Γ^* должны удовлетворять условию: $a \leqslant \frac{r_n}{r_{n-1}} \leqslant b$, где $0 < a \leqslant b < 1$.

Соединяя группы окружностей, соответствующие различным номерам k, в одну последовательность, приходим к ряду Винера, в котором в качестве емкости C_n берется емкость внутреннего круга соответствующего кольца K^*.

2.10. Зафиксируем k и рассмотрим полосы S_k и S_{k+1}. Построим в S_k прямоугольник A_Q. Положительное направление по лучу L_Q будем указывать стрелкой.

S_{k+1} принадлежит одному из четырех отрезков: $\overline{S}_k$, $\overline{s}_k$, $\overline{\overline{s}}_k$, $\overline{\overline{S}}_k$.
Рассмотрим подробно случай, когда $S_{k+1} \subset \overline{S}_k$.
1. S_{k+1} лежит в левой половине $\overline{S}_k$.

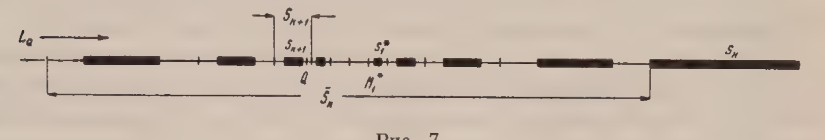


Рис. 7

Образуем последовательность s-отрезков $\{s_n^*\}$, двигаясь с правого конца $\overline{S}_k$ к середине $\overline{S}_k$ и беря каждый четвертый s-отрезок. Обозначая левый конец S_n^* S-отрезка, соответствующего s отрезку s_n^*, через M_n^*, получаем последовательность точек $\{M_n^*\}$. Через K_n^* обозначаем ближайшее к L_Q из колец, принадлежащих полосе s_n^* и лежащих в A_Q. Через точки M_n^* проводим окружности Γ_n^* радиусов r_n^* с центрами в Q. Пусть $s_{n_k}^*$ — первый из отрезков s_n^*, расположенный не дальше, чем s_{k+1} от середины $\overline{S}_k$. Полагаем $r_0^* = d_k$, $r_{n_k}^* = d_{k+1}$ (т. е. $\Gamma_{n_k}^*$ не проходит через $M_{n_k}^*$) и рассматриваем полученную группу колец $K_1^*, \ldots, K_{n_k}^*$ и окружностей $\Gamma_n^*, \ldots, \Gamma_{n_k}^*$.

Все кольца K_n^* существуют. Радиус средней окружности полосы $\overline{S}_k$ не меньше четверти радиуса средней окружности полосы s_k. Поэтому протяженность A_Q по дуге любой ρ-окружности, проходя-

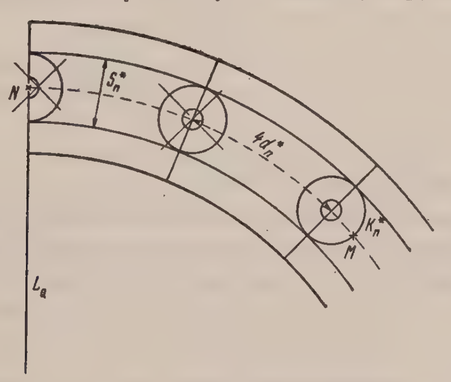


Рис. 8

щей в пределах правой половины $\overline{S}_k$ (а также в пределах s_k и левой половины $\overline{\overline{S}}_k$), $\geqslant \frac{d_k}{8}$ (см. 2.6). Пусть d_n^* — ширина полосы s_n^*; r_{cp} — радиус ее средней окружности. Заметим, что $r_{cp} > \frac{d_k}{4}$ и

$d_n^* < d_1^* = \frac{d_k}{2^7}$. Расстояние от L_Q до точек кольца K_n^* по дуге средней окружности полосы s_n^* будет $\leqslant 8{,}5\, d_n^*$. Пусть l_n — максимум этого же расстояния по дуге любой ρ-окружности в пределах s_n^*.

$$l_n < 8{,}5\, d_n^* \left(1 + \frac{0{,}5\, d_n^*}{r_{cp}}\right) < 8{,}5\, d_n^* \left(1 + \frac{2d_n^*}{d_k}\right) < \frac{d_k}{8}$$

— кольцо K_n^* существует.

K_n^* лежит между окружностями Γ_{n-1}^* и Γ_n^*. Тот факт, что K_n^* лежит вне Γ_n^*, очевиден. Докажем, что K_n^* — внутри Γ_{n-1}^*.

Пусть d_Q — расстояние по L_Q от Q до середины $\overline{S}_k$; N — точка пересечения средней окружности полосы s_n^* с L_Q; M — противоположная точка кольца K_n^* на той же окружности. Оценим $\overline{MN}_{L_Q}$ — проекцию дуги MN на L_Q

$$\overline{MN}_{L_Q} < r_{cp} - \sqrt{r_{cp}^2 - l_n^2} = \frac{l_n^2}{2r_{cp}} < 2d_n^*.$$

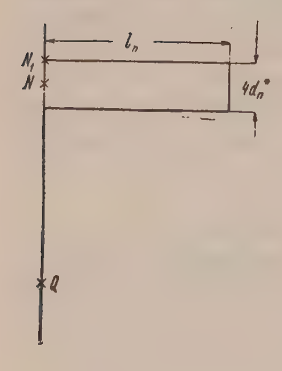


Рис. 9

Таким образом, кольцо K_n^* лежит внутри прямоугольника, изображенного на рисунке. K_n^* окажется внутри Γ_{n-1}^*, если

$$r_{n-1}^* \geqslant \sqrt{l_n^2 + \overline{QN}_1^2},$$

где $\overline{QN_1} = d_Q + 5d_n^*$. Но, согласно конструкции,

$$r_{n-1}^* = d_Q + 32\, d_n^*$$

и, как легко проверить,

$$d_Q + 32\, d_n^* > \sqrt{l_n^2 + \overline{QN}_1^2}.$$

K_1^* лежит внутри Γ_0^*, ибо $\sqrt{l_1^2 + \overline{QN}_1^2} < \frac{d_k}{2}$.

Подсчет величин a и b пропускаем, так как их существование легко усмотреть из конструкции группы окружностей $\Gamma_0^*, \ldots, \Gamma_{n_k}^*$.

2) S_{k+1} лежит в правой половине $\overline{S}_k$, но левее M_1^*. Повторяем ту же конструкцию, что и в 1), но теперь $s_{n_k}^*$ — ближайший к s_{k+1} справа из отрезков s_k^*.

Все кольца K_n^* попрежнему существуют. K_n^* лежит между окружностями Γ_{n-1}^* и Γ_n^* (проверяется аналогично предыдущему; нужно лишь учесть, что теперь $r_{n-1}^* = 32\, d_n^* - d_Q$). Подсчет величин a и b пропускаем по тем же причинам.

3) S_{k+1} лежит в правой половине $\overline{S_k}$ справа от M_1^*. Обозначим через s_1^{**} четвертый, считая слева, s-отрезок левой половины $\overline{s_k}$; через

K_1^{**} — ближайшее к L_Q из колец, принадлежащих полосе s_1^{**} и лежащих в A_Q. K_1^{**} существует по тем же соображениям, что и K_1^*.

Полагаем $n_k = 1$, $r_0^* = d_k$, $r_1^* = d_{k+1}$. Нужно проверить, что K_1^{**} лежит внутри Γ_0^*, т. е., что $d_k > \sqrt{l_1^2 + \overline{QN}_1^2}$. Но это — очевидно, так как $l_1 < \frac{d_k}{8}$ и $\overline{QN}_1 < \frac{d_k}{2}$.

2.11. Случаи $S_{k+1} \subset \overline{s_k}$ и $S_{k+1} \subset \overline{\overline{s}}_k$ являются дословным повторением рассмотренного случая $S_{k+1} \subset \overline{S}_k$. Если S_{k+1} лежит в левой половине $\overline{\overline{S}}_k$ или в правой половине $\overline{\overline{S}}_k$ левее точки M_1^*, то снова повторяются рассуждения 1) и 2) пункта 2.10.

Пусть, наконец, S_{k+1} лежит в правой половине $\overline{\overline{S}}_k$ правее M_1^*. Тут следует различать две возможности.

1) S_k не лежит ни в одной из s-полос. Тогда полоса S_k не имеет пересекающих кругов, т. е. под A_Q можно понимать всю полосу $\overline{\overline{S}}_k$. Выбираем четвертую, считая слева, s-полосу левой половины $\overline{\overline{S}}_k$, и в этой полосе — ближайшее к L_Q из принадлежащих ей колец. Полагаем $n_k = 1$, $r_0^* = d_k$, $r_1^* = d_{k+1}$. Дальнейшие рассуждения — повторение 3) п. 2.10.

2) Существуют s-полосы, содержащие S_k. Тогда, найдется S-полоса S', примыкающая к S_k справа, для которой $d' = \begin{cases} 2d_k \\ d_k \\ \frac{1}{2} d_k \end{cases}$ — это следует из конструкции 2.3—2.5. Пусть $\widetilde{S}$ — внутренняя из S-полос, содержащих одновременно S_k и S'. Построим для точки Q прямоугольник A_Q относительно полосы $\widetilde{S}$. Он будет простираться в положительном направлении L_Q до границы $\widetilde{S}$, т. е. полностью пройдет через полосу $\overline{\overline{S}}_k$, либо через полосу $\overline{S}'$. При этом протяженность A_Q по дуге любой ρ-окружности, проходящей в пределах $\overline{\overline{S}}_k + \overline{S}'$, будет $\gg \frac{d_k}{8}$. Если A_Q проходит через $\overline{S}'$ — повторяем конструкцию 2.10,3). Если же A_Q проходит через $\overline{\overline{S}}_k$ — поступаем аналогично 2.11,1).

2.12. Мы получили последовательность колец K^*, порождающую ряд Винера для точки Q. Будем говорить, что при переходе от данного кольца K^* к следующему имеется пропуск n единиц, если при этом диаметр кольца уменьшается в 2^n раз. Внутри группы колец, соответствующей номеру k, пропуск все время равен четырем. При переходе от одной группы к другой он возрастает. Обозначим через D и d диаметры внешнего и внутреннего колец данной группы. Тогда, соответственно 2.10, возможны три случая:

1) $D = \frac{d_k}{2^7} d \leqslant d_{k+1}$, 2) $D = \frac{d_k}{2^7} d \leqslant 2^4 d_{k+1}$, 3) $D = \frac{d_k}{2^7} = d \leqslant d_{k+1}$.

Таким образом, наибольший возможный пропуск в ряде Винера — 11 единиц.

Составляем ряд Винера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln \frac{r_{n-1}}{C_n}}.$$

Очевидно, $\frac{r_{n-1}}{C_n} > 1$, так как емкость — монотонная функция множества [см. ([4]), $n^\circ 95$].

Поэтому, заменив все r_n единицами, мы только усилим сходимость ряда. Занумеруем величины C_n иначе: пусть C_{n_i} — радиус внутреннего круга кольца K^*, внешний радиус которого равен $\frac{l_0}{2^{n_i+2}}$. Нужно доказать расходимость ряда $\sum\limits_{n_i} \frac{1}{\ln \frac{1}{C_{n_i}}}$. В силу 2.2, $C_{n_i} = \frac{\eta}{N^2 \cdot 2^{2n_i}}$, где N — номер точки P_N, которой соответствует рассматриваемое кольцо K^*. В силу 2.7, φ-ранг этой точки $< n_i + 4$, а ρ-ранг $\leqslant n_i - 1$. В силу 2.1,

$$N < (2^{n_i+4} - 1)^2 < 2^{2n_i+8}.$$

Таким образом, $C_{n_i} > \frac{\eta}{2^{6n_i+16}}$.

$$\sum_{n_i} \frac{1}{\ln \frac{1}{C_{n_i}}} > \sum_{n_i} \frac{1}{(6n_i + 16)\ln 2 - \ln \eta} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(66n + 16)\ln 2 - \ln \eta}$$

— ряд расходится. Все точки множества $\mathfrak{K}_0$ регулярны.

§ 3

В § 2 мы построили систему колец первого порядка $\{K_{n_1}\}$. Та же конструкция применима для построения системы колец второго порядка $\{K_{n_1 n_2}\}$ в каждом из колец K_{n_1}.

Построив систему колец второго порядка, мы к каждому из них снова применим конструкцию § 2 и т. д. При этом нужно будет обеспечить сходимость ряда масс

$$\sum_{n_1, n_2} m_{n_1 n_2} + \sum_{n_1, n_2, n_3} m_{n_1 n_2 n_3} + \ldots$$

В полученном нигде не плотном множестве $\mathfrak{K}$ все точки из $\mathfrak{K}_0 + \sum\limits_{n_2} \mathfrak{K}_{n_1} + \ldots$, согласно § 2, будут регулярны. Таким образом, останется проверить регулярность точек множества

$$\mathfrak{K}' = K_0 \cap \sum_{n_1} K_{n_1} \cap \sum_{n_1, n_2} K_{n_1 n_2} \cap \ldots$$

для открытого множества $K_0' + \sum\limits_{n_1} K_n' + \ldots$ (см. § 2).

3.1. Согласно 2.2, каждое кольцо $K_{n_1 \ldots n_{j-1} n_j}$ можно выделить из системы колец того же порядка, расположенных в $K_{n_1 \ldots n_{j-1}}$, заданием пары чисел N_j, i_j (таких колец может оказаться два, но это не существенно).

В 2.2 мы положили $m_{n_1} < \frac{1}{N_1^2 \cdot 2^{i_1+1}}$, благодаря чему $\sum\limits_{n_1} m_{n_1} < 1$.

Пусть

$$m_{n_1n_2} < \frac{1}{2} \frac{1}{N_2^2 \cdot 2^{i_2+1}} \cdot \frac{1}{N_1^2 \cdot 2^{i_1+1}} .$$

Тогда

$$\sum_{n_2} m_{n_1n_2} < \frac{1}{2} \frac{1}{N_1^2 \cdot 2^{i_1+1}} \quad \text{и} \quad \sum_{n_1, n_2} m_{n_1n_2} < \frac{1}{2} .$$

Вообще, положим

$$m_{n_1 \ldots n_j} < \frac{1}{2^{j-1}} \frac{1}{N_j^2 \cdot 2^{i_j+1}} \cdots \frac{1}{N_2^2 \cdot 2^{i_2+1}} \frac{1}{N_1^2 \cdot 2^{i_1+1}} = \frac{1}{N_1^2 \ldots N_j^2 \cdot 2^{i_1+\cdots+i_j+2j-1}} .$$

Тогда

$$\sum_{n_1, \ldots, n_j} m_{n_1 \ldots n_j} < \frac{1}{2^{j-1}}$$

и ряд

$$\sum_{n_1} m_{n_1} + \sum_{n_1, n_2} m_{n_1n_2} + \sum_{n_1, n_2, n_3} m_{n_1n_2n_3} + \cdots$$

сходится.

3.2. Согласно 1.7,

$$m_{n_1 \ldots n_j} < 60\, \mathfrak{A}_{n_1 \ldots n_{j-1}} \alpha_{n_1 \ldots n_j},$$

где

$$\alpha_{n_1 \ldots n_j} = \frac{r'_{n_1 \ldots n_j}}{r''_{n_1 \ldots n_j}}$$

и

$$\mathfrak{A}_{n_1 \ldots n_{j-1}} = \max_{K_{n_1 \ldots n_{j-1}}} | U_0(P) + U_{n_1}(P) + \ldots + U_{n_1 \ldots n_{j-1}}(P) | .$$

Легко проверить, что $\mathfrak{A}_{n_1 \ldots n_{j-1}} < 1$. Действительно, потенциал $U_0(P) + U_1(P)$ в K_{n_1} заключен между нулем и значением $U_0(P)$ в центре K_{n_1}, т. е. между нулем и единицей (1.2 и 1.7). Применяя индукцию, получаем ту же оценку для потенциала

$$U_0(P) + U_{n_1}(P) + \ldots + U_{n_1 \ldots n_{j-1}}(P)$$

в $K_{n_1 \ldots n_{j-1}}$.

Таким образом, $m_{n_1 \ldots n_j} < 60\, \alpha_{n_1 \ldots n_j}$. Полагаем

$$60\, \alpha_{n_1 \ldots n_j} = \frac{1}{N_1^2 \ldots N_j^2 \cdot 2^{i_1+\cdots+i_j+2j-1}} .$$

Тогда

$$r'_{n_1 \ldots n_j} = \frac{r''_{n_1 \ldots n_j}}{60 N_1^2 \ldots N_j^2 \cdot 2^{i_1+\cdots+i_j+2j-1}} .$$

Но

$$r''_{n_1 \ldots n_j} = \frac{l_{n_1 \ldots n_{j-1}}}{2^{i_j+2}},$$

где

$$l_{n_1 \ldots n_{j-1}} = r''_{n_1 \ldots n_{j-1}} - r'_{n_1 \ldots n_{j-1}},$$

т. е.

$$r'_{n_1 \ldots n_j} = \frac{l_{n_1 \ldots n_{j-1}}}{60 N_1^2 \ldots N_j^2 \cdot 2^{i_1+\cdots+i_{j-1}+2i_j+2j+1}}.$$

3.3. В силу 2.1 и 2.7, $N_j < 2^{2i_j+8}$. Кроме того,

$$l_{n_1 \ldots n_j} > \frac{r''_{n_1 \ldots n_j}}{2},$$

т. е.

$$l_{n_1} > \frac{l_0}{2^{i_1+3}},\; l_{n_1 n_2} > \frac{l_{n_1}}{2^{i_2+3}} > \frac{l_0}{2^{i_1+i_2+2\cdot 3}}, \ldots, l_{n_1 \ldots n_{j-1}} > \frac{l_0}{2^{i_1+\cdots+i_{j-1}+3(j-1)}}.$$

Отсюда

$$r'_{n_1 \ldots n_j} > \frac{l_0}{2^6 \cdot 2^{i_1+\cdots+i_{j-1}+3(j-1)} \cdot 2^{4(i_1+\cdots+i_j)+16j} \cdot 2^{i_1+\cdots+i_{j-1}+2i_j+2j+1}} =$$

$$= \frac{l_0}{2^{6(i_1+\cdots+i_j)+21j+4}} > \frac{\zeta}{2^{27(i_1+\cdots+i_j)}} \quad \left(\zeta = \frac{l_0}{2^4}\right),$$

ибо $i_j \geqslant 1$ и $i_1 + \cdots + i_j \geqslant j$.

3.4. Переходим к проверке регулярности точек множества $\mathfrak{K}'$. Пусть $Q \in \mathfrak{K}'$. Сопоставим точке Q последовательность вложенных колец $K_0 \supset K_{n_1} \supset K_{n_1 n_2} \supset \ldots$, пересечением которых служит Q. Вместо $K_{n_1 \ldots n_j}$ будем просто писать K_j. Зафиксируем номер j и рассмотрим кольца K_j и K_{j+1}. Пусть s^j означает ту s-полосу в K_j, которой принадлежит K_{j+1}, и S^j — соответствующую S-полосу. В отличие от 2.9, точке Q в кольце K_j соответствует *конечное* число вложенных полос $\{S_k\}$, последней из которых является S^j. Производя в K_j конструкцию 2.9 — 2.11, получаем отрезок ряда Винера, который порождается кольцами K^* $j+1$-го порядка, лежащими внутри K_j и вне S^j.

Соединяя отрезки ряда, соответствующие различным j, получаем ряд Винера для точки Q.

3.5. Конструкция группы колец K^*, расположенных внутри S_1 и вне S^j, полностью определена в 2.9—2.11. Нужно уточнить, какие кольца K^*, лежащие в K_j вне S_1, причисляются к этой группе.

Полоса S_1 принадлежит к первому разбиению K_j на S-полосы (2.3) и потому не пересекается никакими кругами. Для выбора колец K^*, лежащих вне S_1, применяем конструкцию 1), п. 2.10. При этом, если отрезок S_1 лежит в левой половине основного интервала, соответствующего кольцу K_j, то повторяем построение 1) п. 2.10 дословно; если же S_1 лежит в правой половине основного интервала, то меняем положительное направление на обратное. Внешний радиус r_0^* построен-

ной j-группы окружностей Γ^* полагаем равным диаметру кольца K_j (по 2.10, он был бы равен $2l_{n_1 \dots n_j}$); внутренний радиус равен диаметру кольца K_{j+1}.

3.6. Нужно проверить расходимость ряда $\sum \frac{1}{\ln \frac{1}{C}}$, где C — емкости внутренних кругов колец K^*, порождающих ряд Винера.

Занумеруем емкости $C: \{C_{n_1 \dots n_j \dots}\}$. Тут номер j означает j-группу колец K^*, а n_{j+1} пробегает все кольца этой группы. Согласно 3.3,

$$C_{n_1 \dots n_j} > \frac{\zeta}{2^{27(i_1 + \dots + i_j)}}.$$

Таким образом, достаточно доказать расходимость ряда

$$\sum \frac{1}{27(i_1 + \dots + i_j)\ln 2 - \ln \zeta}.$$

Когда мы двигаемся по ряду Винера, оставаясь в пределах j-группы колец K_*, то приращение i_{j+1} при переходе от данного кольца K^* к следующему $\leqslant 11$ (2.12). Выясним, что происходит при переходе от j к $j+1$-группе колец K^*. Пусть $\frac{l_{n_1 \dots n_{j+1}}}{2^{i_j+2+2}}$ — внешний радиус первого кольца в $j+1$-группе. В силу 3.5, этот радиус равен $\frac{l_{n_1 \dots n_{j+1}}}{2^7}$, т. е. $i_{j+2} = 5$ — приращение величины $(i_1 + \dots + i_{j+1})$ при переходе от j к $j+1$-группе равно 5. Итак, приращение величины $i_1 + \dots i_j$ при переходе от любого кольца K^* в ряде Винера к следующему $\leqslant 11$, т. е. ряд

$$\sum \frac{1}{27(i_1 + \dots + i_j)\ln 2 - \ln \zeta} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{27 \cdot 11\, n \cdot \ln 2 - \ln \zeta}$$

расходится.

Поступило
15.VII. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Vallée-Poussin Ch., Points irréguliers. Détermination des masse par les potentiels, Acad. royale de Belgique, Bull. de la classe des sciences, 5 série, t. XXIV, n° 11 (1938), 672—689.

[2] Ландкоф Н., Аппроксимация непрерывных функций гармоническими, Мат. сб., т. 25, вып. 1 (1949), 95—106.

[3] Гурса, Курс математического анализа, М.—Л., 1933, т. II, ч. I, стр. 124.

[4] Неванлинна, Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941.

[5] Guhnar of Hällström, Reguläre und irreguläre Randpunkte der Greenschen Funktion in der Ebene, Acta Soc. sci. Fenn. N. s., t. III, n° 5 (1944), 1—30.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 493–500

А. О. ГЕЛЬФОНД и Н. И. ФЕЛЬДМАН

О МЕРЕ ВЗАИМНОЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧИСЕЛ

В статье дается нижняя граница, в зависимости от высоты и степени, полинома от a^{α} и a^{α^2}, где $a \neq 0,1$ — алгебраическое число, а α — кубическая иррациональность.

В работах А. О. Гельфонда [1], [4] доказана алгебраическая независимость некоторых трансцендентных чисел. Применяемый в этих работах метод позволяет произвести также и оценку меры взаимной трансцендентности изучаемых чисел. В настоящей работе в виде примера производится оценка меры взаимной трансцендентности чисел a^{α} и a^{α^2}, где $a \neq 0,1$ — алгебраическое число, α — алгебраическая иррациональность 3-й степени. Предварительно докажем ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. *Пусть имеется система из m линейных уравнений с n неизвестными, $n > m$,*

$$L_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m, \quad |a_{i,k}| \leqslant a, \tag{1}$$

где все $a_{i,k}$ $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant k \leqslant n)$ — целые рациональные числа. Тогда существует решение системы (1) в целых рациональных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отличных от нуля в совокупности, величины которых удовлетворяют условию

$$|x_k| < (8an)^{\frac{m}{n-m}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Доказательство этой леммы имеется, например, в работе А. О. Гельфонда [2].

ЛЕММА 2 [см. [1], лемма II]. *Пусть $P_1(x_1, \ldots, x_s), \ldots, P_m(x_1, \ldots, x_s)$ будут произвольными полиномами от s переменных с высотами $H_1, H_2, \ldots, H_m$. Обозначим высоту и степени по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_s$ полинома $P(x_1, x_2, \ldots, x_s) = P_1(x_1, \ldots, x_s) \ldots P_m(x_1, \ldots, x_s)$ через H и $n_1, \ldots, n_s$. Тогда*

$$H > e^{-n} H_1 H_2 \cdots H_m, \quad n = \sum_{i=1}^{s} n_i. \tag{3}$$

ЛЕММА 3 [см. [1], лемма II, 1]. *Если $P(x_1, \ldots, x_s)$ — полином высоты h и степеней $n_1, n_2, \ldots, n_s$, а полином $R(x_1, \ldots, x_s) = P^m(x_1, \ldots, x_s)$ имеет высоту H, то*

$$H > h^m \prod_{\nu=1}^{s} (1 + mn_\nu)^{-1}. \tag{4}$$

ЛЕММА 4. *Пусть $P(x, y)$ — полином степеней n_1 и n_2 и высоты H с целыми рациональными коэффициентами, неприводимый в поле рациональных чисел, K — поле алгебраических чисел с базисом кольца целых чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ и ζ_1, ζ_2 — любые фиксированные числа. Если*

$$|P(\zeta_1, \zeta_2)| \leqslant \delta \leqslant 1,$$

то существует полином с целыми коэффициентами из поля K

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{m_1=0}^{n_3} \sum_{m_2=0}^{n_4} a_{i, m_1, m_2} \omega_i x^{m_1} y^{m_2},$$

неприводимый в поле K и такой, что выполняются неравенства

$$\left.\begin{array}{c} |Q(\zeta_1, \zeta_2)| \leqslant H\delta^{\frac{1}{s}}, \quad |a_{i, m_1, m_2}| \leqslant \lambda(\omega_i) e^n H, \quad n = n_1 + n_2, \\ n_3 \leqslant n_1, \quad n_4 \leqslant n_2. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Доказательство. Если $P(x, y)$ неприводим в K, то лемма верна. Пусть $P(x, y)$ разлагается в K на t неприводимых множителей; тогда $t \leqslant s$. Пусть

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{n_i} x^i \sum_{j=0}^{m_i} b_{i,j} y^j, \quad m_i \leqslant n_2.$$

Разложим $P(x, y)$ на множители:

$$P(x, y) = b_{n_1, m_{n_1}} P_1(x, y) \cdots P_t(x, y),$$

$$P_i(x, y) = \sum_{u=0}^{k_i} y^u p_{i, u}(x), \quad p_{i, k_i}(x) = x^{l_i} + c_{i,1} x^{l_i - 1} + \cdots + c_{i, l_i},$$

где коэффициенты полиномов $P_i(x, y)$ — числа из поля K. Пусть $|P_{i_0}(\zeta_1, \zeta_2)|$ — наименьшее из чисел $|P_i(\zeta_1, \zeta_2)|$, $1 \leqslant i \leqslant t$. Положим

$$Q(x, y) = b_{n_1, m_{n_1}} P_{i_0}(x, y).$$

Тогда

$$|Q(\zeta_1, \zeta_2| \leqslant H\delta^{\frac{1}{s}}. \qquad (6)$$

Покажем, что все коэффициенты $Q(x, y)$ суть целые числа поля K. Положим

$$P(x, y) = Q(x, y) Q_1(x, y). \qquad (7)$$

Пусть в некоторые коэффициенты $Q(x, y)$ простой идеал γ поля K входит в отрицательных степенях. Обозначим общие знаменатели коэффициентов $Q(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ через α и α_1. Тогда

$$\overline{P}(x, y) = \alpha\alpha_1 P(x, y) = \alpha Q(x, y) \cdot \alpha_1 Q_1(x, y) = \overline{Q}(x, y) \overline{Q}_1(x, y).$$

Теперь все коэффициенты полинома $\overline{P}(x, y)$ делятся на γ, тогда как среди коэффициентов $\overline{Q}(x, y)$ и среди коэффициентов $\overline{Q}_1(x, y)$ есть не делящиеся на γ. Для полинома $\overline{Q}_1(x, y)$ это вытекает из того, что среди коэффициентов $Q_1(x, y)$ была единица. Но это невозможно [см. ([3]), теорема 86]. Итак, все коэффициенты полинома $Q(x, y)$ суть целые числа

поля K. Лемма 2 показывает, что абсолютные величины коэффициентов полинома $Q(x, y)$ не больше величины

$$H_1 \leqslant He^n.$$

Если в равенстве (7) перейти к сопряженным величинам, то опять при помощи леммы 2 получим неравенство

$$H_i \leqslant He^n, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{8}$$

где H_i — максимум абсолютных величин, сопряженных в поле K_i с коэффициентами полинома $Q(x, y)$, причем $K_1 = K$, $K_2, \ldots, K_s$ — поля, сопряженные относительно поля рациональных чисел. Теперь из неравенств (8) легко выводится второе из неравенств (5). Справедливость первого из неравенств (5) вытекает из (6), а справедливость третьего и четвертого неравенств очевидна.

ЛЕММА 5 [см. ([1]), лемма V]. *Пусть α — фиксированное число, $P(x)$ и $R(x)$ — полиномы с целыми рациональными коэффициентами, степени которых n_1 и n_2, а высоты h_1 и h_2. Тогда, если*

$$|P(\alpha)| + |R(\alpha)| \leqslant (1 + |\alpha|)^{-p-r} e^{-2pr} (p + r)^{-p-r},$$

$$p = \max[n_1, \ln h_1], \quad r = \max[n_2, \ln h_2],$$

то $P(x)$ и $R(x)$ имеют общий корень.

ЛЕММА 6 [см. ([1]), леммы VI и VI, 1]. *Пусть α — фиксированное число, $P(x)$ — полином с целыми рациональными коэффициентами степени n и высоты H. Тогда, если имеют место неравенства*

$$|P(\alpha)| < H^{-\mu n}, \quad \mu > 6, \quad \ln H \geqslant n \geqslant n_0,$$

то существует неприводимый делитель $Q(x)$ полинома $P(x)$ с целыми рациональными коэффициентами высоты H_1 и степени n_1, удовлетворяющий условиям

$$|Q(\alpha)| \leqslant H^{-(\mu-6)\frac{n}{s}}, \quad H_1 \leqslant H^{\frac{1}{s}} e^{\frac{2n}{s}}, \quad n_1 \leqslant \frac{n}{s},$$

где s — некоторое целое число.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть α — алгебраическое число третьей степени, $a \neq 0,1$ — алгебраическое число, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$|P(a^\alpha, a^{\alpha^2})| > e^{-e^{\sigma^{4+\varepsilon}}}, \qquad \sigma = \max[n, \ln H] \geqslant \sigma_0(a, \alpha, \varepsilon), \qquad n = n_1 + n_2,$$

где $P(x, y)$ — неприводимый полином с целыми рациональными коэффициентами степеней n_1 и n_2 и высоты H.

Доказательство. Пусть теорема неверна, т. е. неравенство

$$|P(a^\alpha, a^{\alpha^2})| < e^{-e^{\sigma^{4+\varepsilon}}} \tag{9}$$

справедливо для сколь угодно больших σ. Пусть

$$e^{\sigma^4} \leqslant q \leqslant e^{\sigma^{4+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad q_1 = \left[q^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q\right]. \tag{10}$$

Буквами λ, $\overline{\lambda}_i$, λ_k будем обозначать положительные числа, зависящие лишь от ε, a и α. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{k_0=0}^{q} \sum_{k_1=0}^{q} \sum_{k_2=0}^{q} A_{k_0, k_1, k_2} e^{(k_0+k_1\alpha+k_2\alpha^2)\eta z},$$

где

$$\eta = \ln a, \quad A_{k_0, k_1, k_2} = \sum_{0}^{qq_1} \sum_{0}^{qq_1} A_{k_0, \ldots, k_4} a^{k_3\alpha+k_4\alpha^2}. \tag{11}$$

Целые рациональные числа $A_{k_0, k_1, \ldots, k_4}$, не все равные нулю, выбираем, пользуясь леммой 1, так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{gathered} f^{(s)}(l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0 = \left[\lambda_0 q^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{3}{4}} q\right], \\ 0 \leqslant l_i \leqslant q_1, \quad \lambda_0 < 1, \\ |A_{k_0, \ldots, k_4}| \leqslant e^{\lambda q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q}, \quad \lambda \geqslant 1. \end{gathered} \tag{12}$$

Если при этом окажется, что все полиномы

$$A_{k_0, k_1, k_2}(x, y) = \sum_{k_3=0}^{qq_1} \sum_{k_4=0}^{qq_1} A_{k_0, \ldots, k_4} x^{k_3} y^{k_4}$$

имеют общий делитель, то на этот делитель при $x = a^{\alpha}$, $y = a^{\alpha^2}$ можно разделить функцию A_{k_0, k_1, k_2} *. Получившаяся функция, которую мы опять обозначим символом $f(z)$, будет иметь форму (11) и удовлетворять условиям (12), может быть, лишь с другим λ. Таким образом, можно считать, что полиномы $A_{k_0, k_1, k_2}(x, y)$ не имеют общего делителя.

Оценив по модулю правую часть формулы

$$f^{(s)}(t) = -\frac{s!}{4\pi^2} \int_{\Gamma}\int_{\Gamma_1} \prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1}\prod_{0}^{q_1} \left[\frac{x - k_0 - k_1\alpha - k_2\alpha^2}{z - k_0 - k_1\alpha - k_2\alpha^2}\right]^{s_0+1} \frac{f(z)\,dz\,dx}{(x-t)^{s+1}(z-x)},$$

где Γ есть окружность $|x| = \sqrt{q \ln q}$, а Γ_1 — окружность $|z| = q^2$, получим неравенства для $\sigma > \sigma_0$:

$$\begin{gathered} |\eta^{-s} f^{(s)}(l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2)| < e^{-\frac{\lambda_0}{2} q^2 \ln q}, \\ 0 \leqslant s \leqslant s_1 = \left[4 q^{\frac{3}{2}} \ln^{-\frac{3}{4}} q\right], \quad 0 \leqslant l_i \leqslant q_1. \end{gathered} \tag{13}$$

Неравенства (9) и (13) дают возможность построить полином от одного переменного, принимающий «очень маленькое» значение в точке a^{α}. Построением этого полинома мы сейчас и займемся.

Пусть K — поле алгебраических чисел, образованное присоединением α и a к полю рациональных чисел, а $\omega_1, \ldots, \omega_r$ — базис кольца целых чисел этого поля. Лемма 4 и неравенство (9) показывают, что существует полином

---

* Взаимная трансцендентность a^{α} и a^{α^2} уже доказана [см. ([4])].

$$Q(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{m_1=0}^{n_3} \sum_{m_2=0}^{n_4} a_{i, m_1, m_2} \omega_i x^{m_1} y^{m_2}, \quad n_3 \leqslant n_1, \quad n_4 \leqslant n_2,$$

с целыми коэффициентами из поля K, неприводимый в поле K и такой, что

$$|Q(a^\alpha, a^{\alpha^2})| \leqslant H^{-\frac{1}{2} e^{\sigma^{4+\varepsilon}}}, \quad |a_{i, m_1, m_2}| \leqslant \bar{\lambda} e^n H \leqslant \bar{\lambda} e^{2\sigma}. \tag{14}$$

Пусть $f_{s, l_0, l_1, l_2}(x, y)$ — полином, получающийся из $\eta^{-s} f^{(s)}(l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2)$ заменой a^α на x и a^{α^2} на y. Этот полином имеет коэффициентами числа из поля K. Рассмотрим два случая.

1. Все полиномы $f_{s, l_1, l_2, l_3}(x, y)$ делятся на $Q(x, y)$, т. е.

$$f_{s, l_1, l_2, l_3}(x, y) = Q(x, y)\, Q_{s, l_1, l_2, l_3}(x, y), \quad 0 \leqslant s \leqslant s_1, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant q_1, \tag{15}$$

где $Q_{s, l_1, l_2, l_3}(x, y)$ — полином. Неравенство (14) и известное неравенство Лиувилля показывают, что коэффициенты $Q(x, y)$, отличные от нуля, не меньше по абсолютной величине чем $\bar{\bar{\lambda}} e^{-2r\sigma}$. Коэффициенты полиномов $f_{s, l_0, l_1, l_2}(x, y)$ не превосходят по абсолютной величине $\exp\left[\lambda_1 q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q\right]$, а степени — величины $\lambda_1 q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q$; поэтому, по лемме 2 и вследствие условия (10), коэффициенты полинома $Q_{s, l_0, l_1, l_2}(x, y)$ не превосходят величины $\exp\left[\lambda_2 q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q\right]$. Теперь (15) и (14) приводят нас к более сильным неравенствам, чем (13):

$$|\eta^{-s} f^{(s)}(l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2)| < e^{-4q^3 \ln q}, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_1, \quad 0 \leqslant l_i \leqslant q_1, \quad \sigma > \sigma_1. \tag{16}$$

Воспользуемся интерполяционной формулой

$$f^{(s)}(z) = \frac{s!}{4\pi^2} \int_{\Gamma'}\int_{\Gamma} \left[\frac{(y-t_1)\cdots(y-t_p)}{(\zeta-t_1)\cdots(\zeta-t_p)}\right]^{s_1+1} \frac{f(\zeta)\, d\zeta\, dy}{(y-z)^{s+1}(y-\zeta)} +$$

$$+ \frac{s!}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu=0}^{s_1} \frac{f^{(\nu)}(t_i)}{\nu!} \int_{\Gamma'}\int_{\Gamma_i} \left[\frac{(y-t_1)\cdots(y-t_p)}{(\zeta-t_1)\cdots(\zeta-t_p)}\right]^{s_1+1} \frac{(\zeta-t_i)^\nu\, d\zeta\, dy}{(y-z)^{s+1}(\zeta-y)},$$

где $p = (q_1+1)^3$, Γ', Γ, Γ_i, $i \leqslant p$, — окружности $|y| = \sqrt{q \ln q}$, $|\zeta| = q^2$, $|\zeta - t_i| = \frac{\lambda_3}{2q_1^2}$ $\left(\lambda_3 > 0 \text{ — такое число, что } |l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2| > \frac{\lambda_3}{q_1^2}\text{, если } |l_i| \leqslant q_1 \text{ и } \sum_1^3 l_i^2 > 0\right)$, $|z| \leqslant 1$, $s \leqslant (q+1)^3$, а числа $t_1, t_2, \ldots, t_p$ совпадают с числами $l_0 + l_1\alpha + l_2\alpha^2$, $0 \leqslant l_i \leqslant q_1$. Оценив правую часть этой формулы по модулю, получим неравенства

$$|f^{(s)}(0)| \leqslant e^{-\frac{2}{3} q^3 \ln q}, \quad 0 \leqslant s \leqslant (q+1)^3.$$

Но тогда

$$|A_{k_0, k_1, k_2}| < e^{-\frac{1}{2} q^3 \ln q}, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant q, \tag{17}$$

потому что

$$|A_{k_0, k_1, k_2}| = \left| \sum_{k=0}^{(q+1)^3-1} C_k(\beta) f^{(k)}(0) \right|, \quad \beta = k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2,$$

где

$$\sum_{k=0}^{(q+1)^3-1} C_k(\beta) z^k = \prod_{\substack{r_0=0 \\ r_0+r_1\alpha+r_2\alpha^2 \neq \beta}}^{q} \prod_{r_1=0}^{q} \prod_{r_2=0}^{q} \frac{z - r_0 - r_1\alpha - r_2\alpha^2}{\beta - r_0 - r_1\alpha - r_2\alpha^2}.$$

Полиномы $A_{k_0, k_1, k_2}(x, y)$ не имеют общего делителя, поэтому среди них есть полином, взаимно простой с $P(x, y)$. Обозначим его через $Q_1(x, y)$. Построим результант $R_1(x)$ полиномов $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, считая их полиномами от y. Воспользовавшись неравенствами (9), (10), (17) и тем, что степени и логарифм высоты полинома $Q_1(x, y)$ не превосходят величины $\lambda q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q$, получим неравенства

$$\left. \begin{aligned} |R_1(a^\alpha)| &\leqslant e^{-\frac{\lambda_0}{3} q^3 \ln q}, \\ \tau_1 = \max[\nu_1, \ln h_1] &\leqslant \lambda_4 \sigma q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q, \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

где ν_1 и h_1 — степень и высота полинома $R_1(x)$.

2. Среди полиномов $f_{s, l_0, l_1, l_2}(x, y)$ есть взаимно простой с полиномом $Q(x, y)$; обозначим его через $Q_2(x, y)$. Построим результант $R_2(x)$ полиномов $Q(x, y)$ и $Q_2(x, y)c$, $c = d^{\lambda_5 q_1 q}$, где d — такое целое рациональное число, что $d\alpha$, da — целые алгебраические, а $\lambda_5 = \lambda_5(\alpha)$. Тогда

$$R_2(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{m=0}^{\nu_2} a_{i, m} x^m,$$

причем справедливы неравенства

$$\left. \begin{aligned} &\tau_2 = \max[\nu_2, \ln h_2] \leqslant \lambda_6 \sigma q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q, \\ &h_2 = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 0 \leqslant m \leqslant \nu_2}} |a_{i, m}|, \quad |R_2(a^\alpha)| \leqslant e^{-\frac{\lambda_0}{3} q^3 \ln q}. \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Умножив $R_2(a^\alpha)$ на все полиномы с сопряженными коэффициентами, получим полином с целыми рациональными коэффициентами $R_3(x)$ степени ν_3 и высоты h_3, для которого выполняются неравенства

$$\left. \begin{aligned} |R_3(a^\alpha)| &\leqslant e^{-\frac{\lambda_0}{4} q^3 \ln q}, \\ \tau_3 = \max[\nu_3, \ln h_3] &\leqslant \lambda_7 \sigma q^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q. \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Итак, мы показали, что для любого q, удовлетворяющего условиям (10), можно построить полином с целыми рациональными коэффи-

циентами $R_q(x)$ степени ν_q и высоты h_q, для которого справедливы неравенства

$$\left.\begin{aligned} |R_q(a^\alpha)| &\leqslant e^{-\frac{\lambda_0}{4} q^2 \ln q}, \\ \tau_q = \max[\nu_q, \ln h_q] &\leqslant \lambda_8 \sigma q^{\frac{3}{2}} \ln q. \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

Пусть

$$q = q_2 = [e^{\sigma^{4+\frac{\varepsilon}{2}}}]. \quad (22)$$

Построим полином $R_{q_2}(x)$. По лемме 6, существует полином $Q(x)$ с целыми рациональными коэффициентами степени ν и высоты h, для которого справедливы неравенства

$$\left.\begin{aligned} |Q(\alpha^\alpha)| &\leqslant e^{-\frac{\lambda_0}{5s} q_2^3 \ln q_2}, \\ \tau = \max(\nu, \ln h) &\leqslant \frac{\lambda_0}{s} \sigma q_2^{\frac{3}{2}} \ln^{\frac{1}{4}} q_2, \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

где s — некоторое целое число, не зависящее от q_2, откуда вытекает неравенство

$$|Q(a^\alpha)| \leqslant e^{-\lambda_{10}\tau^2}, \quad \lambda_{10} > 0. \quad (24)$$

Для τ легко выводится оценка снизу. Действительно, теорема III работы ([1]) показывает, что должно выполняться неравенство

$$\frac{\lambda_0}{5s} q_2^3 \ln q_2 < \frac{2\tau^4}{(\ln 2\tau)^{1-\delta}}, \quad \delta > 0, \quad \sigma > \sigma_3(\delta),$$

т. е.

$$\frac{\lambda_{11}}{s} q_2^3 \ln q^{2-\delta} q_2 < \tau^4,$$

$$q_2^{\frac{1}{2}} \leqslant \tau, \quad \sigma > \sigma_4.$$

Пусть $q_3 = [\tau^{\frac{2}{3}} \ln^{-\frac{1}{3}} \tau]$. Тогда q_3 попадет для $\sigma > \sigma_5$ в интервал (10), следовательно, существует полином $R_{q_3}(x)$, удовлетворяющий неравенствам (21), т. е.

$$\left.\begin{aligned} |R_{q_3}(a^\alpha)| \, e^{-\frac{\lambda_0}{4} q^2 \ln q} &\leqslant e^{-\lambda_{12}\tau^2}, \quad \lambda_{12} > 0, \\ \tau_{q_3} \leqslant \lambda_{13}\sigma\tau \ln^{-\frac{1}{2}} \tau \ln^{\frac{1}{4}} \tau &\leqslant \lambda_{14}\tau^2 \ln^{-\frac{\varepsilon}{4(8+\varepsilon)}} \tau. \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Применим к полиномам $Q(x)$ и $R_{q_3}(x)$ лемму 5. Так как

$$\tau\tau_{q_3} \leqslant \lambda_{14}\tau^2 \ln^{-\frac{\varepsilon}{32+4\varepsilon}} \tau,$$

то неравенства (24) и (25) показывают, что $Q(x)$ и $R_{q_s}(x)$ имеют общий корень. Но $R_{q_s}(x)$ неприводим, следовательно, $R_{q_s}(x)$ делится на $Q(x)$. Теперь, по лемме 2, должно быть

$$\ln h \leqslant 2\tau_{q_s},$$

следовательно, $\nu = \tau$ и степень делителя больше степени делимого. Получившееся противоречие доказывает нашу теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть α — алгебраическое число третьей степени, $a \neq 0,1$ — алгебраическое число, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$|P(a^\alpha, a^{\alpha^2})| \geqslant e^{-e^{\sigma^{4+\varepsilon}}}, \quad \sigma = \max[n, \ln H] > \sigma_0, \quad n = n_1 + n_2,$$

где $P(x, y)$—полином с целыми рациональными коэффициентами степеней n_1 и n_2 и высоты H.

Доказательство. Разложим $P(x, y)$ на множители, неприводимые в поле рациональных чисел

$$P(x, y) = P_1(x, y) \cdots P_t(x, y), \quad t \leqslant n \leqslant \delta.$$

Если m_i', m_i'', h_i — степени и высота полинома $P_i(x, y)$, то справедливы неравенства

$$\sigma_i = \max[m_i, h_i] \leqslant 2\sigma, \quad m_i = m_i' + m_i''.$$

По теореме 1, для $\sigma \leqslant \sigma_0$

$$|P(a^\alpha, a^{\alpha^2})| \geqslant \prod_{i=1}^{t} e^{-e^{\sigma_i^{4+\varepsilon}}} \geqslant e^{-\sigma e^{(2\sigma')^{4+\varepsilon}}} \geqslant e^{-e^{\sigma^{4+2\varepsilon}}}.$$

Поступило
5. V. 1950

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гельфонд А. О., Об алгебраической независимости трансцендентных чисел некоторых классов, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 5 (33) (1949), 14—48.
[2] Гельфонд А. О., Аппроксимация алгебраических иррациональностей и их логарифмов, Вестник МГУ, № 9 (1948), 3—25.
[3] Гекке Э., Теория алгебраических чисел, ГИТТ, Л., 1940.
[4] Гельфонд А. О., Об алгебраической независимости алгебраических степеней алгебраических чисел, Доклады Ак. Наук СССР, т. 64, № 3 (1949), 277—280.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 501—522

Ю. В. ЛИННИК

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ СТАТИСТИКИ ЗАВИСИМЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В статье строятся «доверительные множества» в задаче статистической оценки параметров для случая простейшего стационарного ряда. Задача поставлена А. Н. Колмогоровым.

Предложенные «доверительные множества» не являются наилучшими и будут подвергнуты дальнейшему исследованию.

Пусть дан ряд случайных величин

$$\ldots X_{-2},\ X_{-1},\ X_0,\ X_1,\ X_2, \ldots,\ X_n, \tag{1}$$

связанных в простую однородную цепь Маркова, причем любая пара соседей X_{m-1}, X_m имеет невырожденное двумерное нормальное распределение, характеризуемое параметрами:

$$E(X_{m-1}) = E(X_m) = a, \quad D(X_{m-1}) = D(X_m) = \sigma^2,$$
$$R(X_{m-1},\ X_m) = \lambda, \quad |\lambda| \neq 1,$$

λ — коэффициент корреляции. Очевидно, ряд (1) будет стационарным в узком смысле.

Пусть над случайными величинами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ произведено n последовательных наблюдений, давших результаты:

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n; \tag{2}$$

что же касается до параметров a, σ, λ, то пусть не все из них известны. Как использовать тогда наблюдения (2) для оценки неизвестных нам параметров?

В несколько измененном виде такая задача была поставлена А. Н. Колмогоровым на Всесоюзной конференции по математической статистике в Ташкенте в октябре 1948 года.

А. Н. Колмогоров указал также «достаточные статистики» [см. ([1])] для случая неизвестных a, σ, λ и поставил вопрос о существовании доверительных интервалов для a, σ, λ.

В данной работе проводится построение доверительных множеств для коэффициента корреляции λ при четырех возможных предположениях относительно известности a и σ.

§ 1

Из предыдущего непосредственно следует, что n величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ для любого n имеют совокупное нормальное распределение. В силу стационарности ряда, это верно для любых подряд идущих n величин.

Так как для любых i имеем

$$E(X_i) = a, \quad D(X_i) = \sigma^2, \tag{3}$$

то для полной характеристики нормального распределения вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ достаточно указать $\frac{n(n-1)}{2}$ коэффициентов корреляции $R(X_i, X_j)$ $(i < j \leqslant n)$. Простые соображения теории цепей Маркова и теории нормальной корреляции приводят к тому, что

$$R(X_i, X_j) = \lambda^{j-i}. \tag{4}$$

Из стационарности ряда (1) следует тогда, что для любых величин X_M, X_N будет:

$$R(X_M, X_N) = \lambda^{|N-M|}.$$

§ 2

Таким образом, матрица корреляции для вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ будет иметь вид*

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \ldots & \lambda^{n-1} \\ \lambda & 1 & \lambda & \ldots & \lambda^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} & \ldots & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Простые алгебраические вычисления дают тогда:

$$\mathrm{Det}(\Lambda) = (1-\lambda^2)^{n-1}.$$

Далее, вне главной диагонали и двух непосредственно с ней смежных, все элементы имеют миноры, равные 0; взаимная матрица Λ имеет вид:

$$\Lambda^* = \begin{Vmatrix} (1-\lambda^2)^{n-2} & -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} & (1+\lambda^2)(1-\lambda^2)^{n-2} & -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} & (1+\lambda^2)(1-\lambda^2)^{n-2} & -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \cdots 0 & -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} & (1-\lambda^2)^{n-2} \end{Vmatrix},$$

т. е.

$$\{\Lambda^*\}_{11} = \{\Lambda^*\}_{nn} = (1-\lambda^2)^{n-2}, \quad \{\Lambda^*\}_{kk} = (1+\lambda^2)(1-\lambda^2)^{n-2}$$

при $1 < k < n$,

$$\{\Lambda^*\}_{k,\,k+1} = \{\Lambda^*\}_{k,\,k-1} = -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2}$$

при $2 \leqslant k \leqslant n$ и

$$\{\Lambda^*\}_{ij} = 0$$

---

* В постановке задачи А. Н. Колмогорова эта матрица является исходной.

при $|i-j|>1$. Полагая $y_i=\frac{x_i-a}{\sigma}$ $(i=1, 2, \ldots n)$, мы видим, что плотность вероятности для вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n(1-\lambda^2)^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \tag{5}$$

где

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\frac{1}{1-\lambda^2}\{(y_1^2+\cdots+y_n^2)+$$

$$+\lambda^2(y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2)-2\lambda(y_1y_2+\cdots+y_{n-1}y_n)\} \tag{5a}$$

(мы считаем, что число наблюдений $n\geqslant 2$).

§ 3

Здесь будем считать a и σ известными. Не нарушая общности, положим $a=0$, $\sigma=1$, так что $y_i=x_i$ $(i=1, \ldots, n)$ будет неизвестной нам величиной, для которой мы будем искать «доверительное множество». Мы имеем для нашего случая:

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(1-\lambda^2)^{\frac{n-1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}Q(x_1, \ldots, x_n)}. \tag{5б}$$

При этом квадратичная форма Q содержит неизвестное постоянное λ в своих коэффициентах.

Докажем простую лемму.

ЛЕММА 1. *Форма* $Q(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, *взятая из формулы* (5a), *при случайных переменных* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *с совокупной плотностью распределения* (5a) *имеет закон роспределения, зависящий только от* n. *Именно, если* $\beta\geqslant\alpha\geqslant 0$, *то*

$$P\{\alpha\leqslant Q(X)\leqslant\beta\}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-x}\,dx \tag{6}$$

(разумеется, всегда $Q(X)\geqslant 0$).

Доказательство. Пусть $s\geqslant 0$ — реальное число; обозначая

$$Q(X_1, \ldots, X_n)=Q(X),$$

рассмотрим производящую функцию

$$F(-s)=E\left(e^{-\frac{s}{2}Q(X)}\right)=\int\limits_{\Omega_n}\cdots\int f(x_1, \ldots, x_n)\,e^{-\frac{s}{2}Q(X)}\,d\omega, \tag{7}$$

где Ω_n — n-мерное пространство, $d\omega=dx_1\ldots dx_n$; тогда имеем

$$F(-s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(1-\lambda^2)^{\frac{n-1}{2}}} \int \cdots \int_{\Omega_n} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1\sqrt{1+s},\, x_2\sqrt{1+s},\, \ldots,\, x_n\sqrt{1+s})}\, d\omega,$$

где $\sqrt{1+s}$ взят с положительным знаком. Введя переменные $x_i' = x_i\sqrt{1+s}$, получаем отсюда:

$$F(-s) = \frac{1}{(1+s)^{\frac{n}{2}}}.$$

Полагая $s = -it$ и пользуясь принципом аналитического продолжения, находим характеристическую функцию для $\frac{1}{2}Q(X)$:

$$E\left(e^{it\cdot\frac{1}{2}Q(X)}\right) = \frac{1}{(1-it)^{\frac{n}{2}}}.$$

Отсюда заключаем [см. ([2])], что

$$P\left\{\frac{1}{2}Q(X) < \xi\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \displaystyle\int_0^{\xi} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx & \text{при } \xi \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } \xi < 0, \end{cases}$$

откуда и следует наша лемма. Мы получили распределение типа χ^2 с n степенями свободы.

§ 4

Из (5а) мы видим, что при $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$

$$P\left\{\alpha \leqslant \frac{1}{1-\lambda^2}(S_1 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K) \leqslant \beta\right\} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx = \varphi(\alpha, \beta). \tag{8}$$

Здесь через S_1, S_2 и K обозначены следующие статистики:

$$S_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \quad S_2 = x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2,$$

$$K = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n.$$

Из (8) следует, что $\varphi(\alpha, \beta)$ есть вероятность совмещения двух неравенств:

$$\lambda^2(S_2 + \beta) - 2\lambda K + S_1 - \beta \leqslant 0$$

и

$$\lambda^2(S_2 + \alpha) - 2\lambda K + S_1 - \alpha \geqslant 0$$

или

$$\lambda^2 - 2\lambda\frac{K}{S_2+\beta} + \frac{S_1-\beta}{S_1+\beta} \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \lambda^2 - 2\lambda\frac{K}{S_2+\alpha} + \frac{S_1-\alpha}{S_1+\alpha} \geqslant 0.$$

Обозначая

$$\frac{K}{S_2+\beta} = K_1(\beta), \quad \frac{K}{S_2+\alpha} = K_1(\alpha),$$

$$\frac{S_1-\beta}{S_2+\beta} = K_2(\beta), \quad \frac{S_1-\alpha}{S_1+\alpha} = K_2(\alpha),$$

находим, что вероятность совмещения неравенств

$$\left.\begin{aligned}(\lambda - K_1(\beta))^2 + K_2(\beta) - (K_1(\beta))^2 \leqslant 0,\\ (\lambda - K_1(\alpha))^2 + K_2(\alpha) - (K_1(\alpha))^2 \geqslant 0\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

есть $\varphi(\alpha, \beta)$. Неравенства (9) равносильны неравенствам

$$\left.\begin{aligned}(\lambda - K_1(\beta))^2 \leqslant (K_1(\beta))^2 - K_2(\beta),\\ (\lambda - K_1(\alpha))^2 \geqslant (K_1(\alpha))^2 - K_2(\alpha).\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

§ 5

В дальнейшем нам придется говорить о событиях, заключающихся в том, что некоторые выражения, содержащие квадратный корень из случайной величины y, $\sqrt{y}$, будут больше или меньше некоторой постоянной. Если при этом $\sqrt{y}$ существует в реальной области, то будем его всегда считать положительным; если же он не существует, то будем считать соответствующее событие невозможным. При этих условиях легко усматриваем, что совмещение событий (10) равносильно событию $\mathfrak{A}_1$, или $\mathfrak{A}_2$, или $\mathfrak{A}_3$, или $\mathfrak{A}_4$, где

$$\mathfrak{A}_1: \quad K_1(\beta) < \lambda < \min\{K_1(\beta) + \sqrt{(K_1(\beta))^2 - K_2(\beta)},$$
$$K_1(\alpha) - \sqrt{(K_1(\alpha))^2 - K_2(\alpha)}\},$$

$$\mathfrak{A}_2: \quad \max\{K_1(\beta),\ K_1(\alpha) + \sqrt{(K_1(\alpha))^2 - K_2(\alpha)}\} < \lambda <$$
$$< K_1(\beta) + \sqrt{(K_1(\beta))^2 - K_2(\beta)},$$

$$\mathfrak{A}_3: \quad K_1(\beta) - \sqrt{(K_1(\beta))^2 - K_2(\beta)} < \lambda < \min\{K_1(\beta),$$
$$K_1(\alpha) - \sqrt{(K_1(\alpha))^2 - K_2(\alpha)}\},$$

$$\mathfrak{A}_4: \quad \max\{K_1(\beta) - \sqrt{(K_1(\beta))^2 - K_2(\beta)},$$
$$K_1(\alpha) + \sqrt{(K_1(\alpha))^2 - K_2(\alpha)}\} < \lambda < K_1(\beta),$$

так что

$$P(\mathfrak{A}_1 \text{ или } \mathfrak{A}_2, \text{ или } \mathfrak{A}_3, \text{ или } \mathfrak{A}_4) = \varphi(\alpha, \beta). \tag{11}$$

§ 6

Четыре интервала $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ со случайными концами (мы знаем, как при этом понимать случаи мнимых концов) образуют множество $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ такое, что, каково бы ни было неизвестное λ, вероятность того, что $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ покрывает λ, будет

$$\varphi(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} c^{-x}\, dx. \tag{12}$$

Множество $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ можно считать доверительным множеством для λ. Но оно будет иметь какую-либо ценность, только если при увеличении числа наблюдений n концы его интервалов сойдутся по вероятности к какой-либо одной точке при подходящем подборе α и β как функций n таких, что $\varphi(\alpha, \beta) \to 1$ при $n \to \infty$. Ввиду этого, будем изучать поведение $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ в этих условиях.

§ 7

Введенные в § 4 статистики:

$$S_1 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2, \quad S_2 = x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2, \quad K = x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n \tag{13}$$

состоят из «слабо зависимых» случайных величин и потому подчиняются закону больших чисел [см. ([3]), ([4])]. При этом, очевидно, имеем

$$E(S_1) = n, \quad E(S_2) = n - 2, \quad E(K) = (n-1)\lambda. \tag{14}$$

Так как $|\lambda| < 1$, то из свойств слабо зависимых величин следует, что

$$D(S_1) = O_\lambda(n), \quad D(S_2) = O_\lambda(n), \quad D(K) = O_\lambda(n), \tag{15}$$

где знак O_λ указывает, что порядок зависит от λ.

Статистика K в некоторых случаях может быть и сама использована для суждений о λ, имеющих теоретико-вероятностное обоснование. Именно, довольно громоздкий подсчет, который мы здесь не будем приводить, дает следующее выражение для производящей функции $E(e^{-sK}) = F_1(-s)$. Вблизи $s = 0$ имеем

$$F_1(-s) = \left(\frac{d(0)}{d(s)}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$d(s) = h(w) + h(-w), \quad h(w) = \frac{\left[B - \left(\frac{A}{2} - w\right)\right]^2}{2w}\left(\frac{A}{2} + w\right)^{n-1},$$

$$w = \sqrt{\frac{A^2}{4} - X^2}, \quad X = -\lambda(1-\lambda^2)^{n-2} - s(1-\lambda^2)^{n-1},$$

$$A = (1+\lambda^2)(1-\lambda^2)^{n-2}, \quad B = (1-\lambda^2)^{n-2}.$$

Из этих формул следует выражение для дисперсии K:

$$D(K) = 2(n-1)\lambda^2 + \frac{(n-1)(1-\lambda^4)(1+\lambda^2) - 4(\lambda^2 - \lambda^{2n})}{(1-\lambda^2)^2}. \tag{16}$$

В частности, при $\lambda \to 1$ $D(K) \to 2(n-1)^2$, что и естественно, так как статистику K можно считать обобщением χ^2 на случай зависимых слагаемых.

Если мы знаем заранее, что $|\lambda| < 1 - \varepsilon_0$, то некоторые сведения о λ получим из неравенства Чебышева для статистики K при использовании (16):

$$P\left\{\left|\lambda - \frac{K}{n-1}\right| < \alpha\right\} \geqslant 1 - \frac{D(K)}{(n-1)^2\alpha^2} \tag{17}$$

для любого $\alpha > 0$. Однако, это не имеет прямого отношения к конструкции доверительных множеств для λ.

§ 8

Закон больших чисел приложим при $n \to \infty$ также к форме $S_1^2 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K$, рассматриваемой в § 4. Нам понадобится его уточнение в виде следующей леммы:

ЛЕММА 2. *Если* $\alpha_n = (1 - \varepsilon_n) n$, $\beta_n = (1 + \varepsilon_n) n$, *где* $\varepsilon_n \geqslant \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ *и* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\varphi(\alpha_n, \beta_n) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_{\frac{\alpha_n}{2}}^{\frac{\beta_n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx \to 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. По формуле Стирлинга,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sim \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi \cdot \frac{n}{2}};$$

далее, при $n > n_0$ имеем

$$\int\limits_{\frac{\beta n}{2}}^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx = \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{z=\varepsilon_n}^{\infty} \frac{1}{1+z} e^{\frac{n}{2}[\ln(1+z)-z]} dz <$$

$$< \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}\left(\frac{\varepsilon_n^2}{2} - \frac{\varepsilon_n^3}{3} + \frac{\varepsilon_n^4}{4} - \dots\right)} < \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) e^{-\frac{1}{16}\ln^2 n};$$

$$\int\limits_0^{\frac{\alpha_n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx < \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} (1-\varepsilon_n)^{\frac{n}{2}-1} e^{\frac{n}{2}\varepsilon_n} <$$

$$< \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{4}\varepsilon_n^2} < \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) e^{-\frac{1}{16}\ln^2 n}.$$

Это и доказывает лемму, ввиду равенства

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-x}\, dx = 1.$$

§ 9

Пусть теперь число наблюдений $n \to \infty$; рассмотрим поведение доверительного множества $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$ при $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$. При этом будем различать 3 случая:

I) $0<\lambda<1$. Здесь, ввиду (14) и (15), статистики

$$K_1(\beta_n)=\frac{K}{S_2+\beta_n},\quad K_1(\alpha_n)=\frac{K}{S_2+\alpha_n},$$

$$K_2(\beta_n)=\frac{S_1-\beta_n}{S_1+\beta_n},\quad K_2(\alpha_n)=\frac{S_1-\alpha_n}{S_1+\alpha_n}$$

будут одновременно стремиться по вероятности соответственно к константам:

$$\begin{matrix}\frac{\lambda}{2}, & \frac{\lambda}{2}, \\ 0, & 0.\end{matrix} \tag{18}$$

Рассмотрим поведение событий $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$, связанных с множеством $\mathfrak{A}_{\alpha_n\beta_n}$ (§ 5). Вероятность события $\mathfrak{A}_1$ должна стремиться к 0, ибо она не превосходит вероятности события

$$K_1(\beta_n)<K_1(\alpha_n)-\sqrt{(K_1(\alpha_n))^2-K_2(\alpha_n)},$$

которое, ввиду (18) и того, что $\lambda>0$, не будет происходить с вероятностью, сколь угодно близкой к 1 при $n\to\infty$.

Событие $\mathfrak{A}_4$ влечет событие

$$K_1(\alpha_n)+\sqrt{(K_1(\alpha_n))^2-K_2(\alpha_n)}<K_1(\beta_n),$$

которое также, ввиду (18), будет иметь вероятность, сколь угодно близкую к 0. Значит, $P(\mathfrak{A}_2$ или $\mathfrak{A}_3)\to 1$, причем связанные с событиями $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ интервалы будут с вероятностью $\to 1$ стягиваться соответственно к точкам λ и 0. (В каком смысле «стягиваться», ясно из предыдущего.) Поэтому встает вопрос: какое же из этих двух значений надо будет принимать за истинное значение коэффициента корреляции? На этот вопрос мы ответим, разобрав остальные случаи.

II) $-1<\lambda<0$. Наши 4 статистики будут опять стремиться по вероятности к (18). Событие $\mathfrak{A}_1$ приводит к событию

$$K_1(\beta_n)<K_1(\alpha_n)-\sqrt{(K_1(\alpha_n))^2-K_2(\alpha_n)},$$

которое, ввиду (18) и $\lambda<0$, имеет вероятность $\to 0$.

Событие $\mathfrak{A}_4$ приводит к событию

$$K_1(\alpha_n)+\sqrt{(K_1(\alpha_n))^2-K_2(\alpha_n)}<K_1(\beta_n),$$

которое, ввиду тех же соображений, имеет вероятность $\to 0$.

Событие $\mathfrak{A}_2$ (или $\mathfrak{A}_3$) происходит с вероятностью $\to 1$ и с вероятностью $\to 1$ дает интервалы, стягивающиеся соответственно к точкам 0 и λ.

Снова встает вопрос, что считать коэффициентом корреляции?

III) $\lambda=0$. В этом случае четыре события $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ дают интервалы либо несуществующие, либо стягивающиеся к 0 с вероятностью $\to 1$. Хоть один из последних должен существовать с вероятностью $\to 1$.

Такое поведение доверительного множества $\mathfrak{A}_{\alpha_n\beta_n}$ позволяет сказать: при большом числе наблюдений оно приводит почти достоверным образом

либо к узкому интервалу вблизи 0 и узкому интервалу, несколько удаленному от 0, когда n достаточно велико, либо к $\nu \leqslant 4$ узким интервалам вблизи 0.

Таким образом, если считать, что λ находится в интервале, наиболее удаленном от 0, то с вероятностью $\to 1$ λ определится с ошибкой $\to 0$.

§ 9 a

Можно предложить и другую конструкцию доверительного множества для λ в предыдущих условиях ($a=0$, $\sigma=1$). Оно будет гораздо проще, но зато, повидимому, менее выгодно использует наблюдения (1). Положим

$$Z_1 = X_1 - \lambda X_2, \quad Z_2 = X_3 - \lambda X_4, \quad Z_\mu = X_{2\mu-1} - \lambda X_{2\mu},$$

где 2μ — наибольшее четное число $\leqslant n$.

Величины Z_1, Z_2, Z_μ, как легко подсчитать, попарно некоррелированы, и так как они в совокупности нормальны, то и независимы [см. ([2])]. Далее, имеем

$$E(Z_i) = 0, \quad D(Z_i) = 1 - \lambda^2.$$

Поэтому квадратичная форма

$$U(x) = \frac{1}{1-\lambda^2}\{Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_\mu^2\}$$

имеет распределение χ^2 с μ степенями свободы, т. е. плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} x^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-x} \quad (x > 0).$$

Полагая

$$S_1 = x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_{2\mu-1}^2,$$
$$S_2 = x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{2\mu}^2,$$
$$K = x_1 x_2 + \cdots + x_{2\mu-1} x_{2\mu},$$

получим, что вероятность совмещения неравенств

$$(S_1 - \alpha) + \lambda^2 (S_2 + \alpha) - 2\lambda K \geqslant 0$$

и

$$(S_1 - \beta) + \lambda^2 (S_2 + \beta) - 2\lambda K \leqslant 0$$

есть $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$. Они образуют доверительное множество $\mathfrak{A}'_{\alpha\beta}$. Учитывая, что $\mu = \frac{n}{2} + O(1)$, можно доказать, что поведение множества $\mathfrak{A}'_{\alpha\beta}$ совершенно аналогично поведению предыдущего множества $\mathfrak{A}_{\alpha\beta}$.

Заметим, что можно было брать в начале рассуждений и независимые величины $X_1 - \lambda X_2$, $X_2 - \lambda X_3, \ldots,$ $X_{n-1} - \lambda X_n$; это выгоднее.

§ 10

Перейдем теперь к случаю, когда параметр a неизвестен, а σ известно; тогда можно считать, что $\sigma = 1$. Будем искать доверительное множество для неизвестного λ ($|\lambda| < 1$).

Для этой цели введем вместо $X_1, X_2, \ldots, X_n$ новые переменные по формулам:

$$\left.\begin{aligned} &X = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n), \\ &Z_1 = \overline{X},\ Z_2 = X_2 - \overline{X}, \ldots, Z_n = X_n - \overline{X}, \\ &X_2 = Z_2 + Z_1, \ldots, X_n = Z_n + Z_1, \\ &X_1 = Z_1 - (Z_2 + Z_3 + \cdots + Z_n). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Тогда (5) и (5а) приводят к следующему закону распределения для вектора $(Z_1, \ldots, Z_n)$:

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(1-\lambda^2)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}Q(z)},$$

где

$$Q_1(z) = Q(z_1 - a - (z_2 + \cdots + z_n);\ z_1 - a + z_2, \ldots, z_1 - a + z_n).$$

Нас будет интересовать плотность вероятности для вектора $(Z_2, \ldots, Z_n)$, равная

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{\pi}{2}}(1-\lambda^2)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}Q(\xi-(z_2+\ldots+z_n),\ \xi+z_2, \ldots, \xi+z_n)}\, d\xi.$$

Имеем

$$Q(\xi - (z_2 + \cdots + z_n), z_2 + \xi, \ldots, z_n + \xi) = \frac{1}{1-\lambda^2}[A_n\xi^2 + \xi L(z) + Q_2(z)],$$

где

$$A_n = n(1-\lambda)\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\lambda\right),$$

$$L(z) = 2\lambda(1-\lambda)(z_2 + \cdots + z_{n-1}),$$

$$Q_2(z) = Q((-z_2 + \cdots + z_n),\ z_2, \ldots, z_n)\ 1 - \lambda^2).$$

Отсюда

$$\varphi(z_2, \ldots, z_n) = C_0(\lambda, n)\, e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\lambda^2}Q_3(z_2, \ldots, z_n)}, \tag{20}$$

где

$$Q_3(z_2, \ldots, z_n) = Q_2(z) - \frac{(L(z))^2}{A_n}. \tag{21}$$

Здесь $C_0(\lambda, n)$ зависит лишь от λ и n; распределение $(n-1)$-мерное невырожденное.

§ 11

Полагая $Q_4(z) = \frac{1}{1-\lambda^2} Q_3(z)$, находим, повторяя рассуждения § 3, что закон распределения $Q_4(z)$ зависит только от n и при $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$ имеет вид:

$$P\{\alpha \leqslant Q_4(z) \leqslant \beta\} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x}\, dx = \varphi_1(\alpha, \beta). \qquad (22)$$

Введем статистики

$$S_1 = (z_2 + \cdots + z_n)^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2,$$

$$S_2 = z_2^2 + \cdots + z_{n-1}^2 = (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_{n-1} - \bar{x})^2,$$

$$K = -(z_2 + \cdots + z_n) z_2 + z_2 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n =$$

$$= (x_1 - \bar{x})(x_2 - \bar{x}) + \cdots + (x_{n-1} - \bar{x})(x_n - \bar{x}),$$

$$L = z_2 + \cdots + z_{n-1} = x_1 - \bar{x} + x_n - \bar{x},$$

где $z_i = x_i - \bar{x}$; соответственно формулам (19) получим

$$\left.\begin{aligned} Q_4(z) &= \frac{2}{1-\lambda^2}\left\{S_1 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K - \frac{4\lambda^2(1-\lambda)^2}{A_n} L^2\right\}, \\ A_n &= n(1-\lambda)\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\lambda\right). \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

При заданных α и $\beta \geqslant \alpha \geqslant 0$ получим, рассуждая как и в § 4, что вероятность совмещения неравенств:

$$\left.\begin{aligned} \lambda^2(S_2 + \beta) - 2\lambda K + (S_1 - \beta) - \frac{4\lambda^2(1-\lambda^2)}{A_n} L^2 \leqslant 0, \\ \lambda^2(S_2 + \alpha) - 2\lambda K + (S_1 - \alpha) - \frac{4\lambda^2(1-\lambda)^2}{A_n} L^2 \geqslant 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

будет

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\beta}{2}} x^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-x}\, dx.$$

Помножая неравенства на $A_n > 0$, получаем неравенства четвертой степени со случайными коэффициентами — статистиками. В силу этого, каждое из наших неравенств отвечает местонахождению λ в некотором количестве $\nu \leqslant 3$ отрезков реальной оси.

Совмещение этих неравенств отвечает местонахождению в некотором множестве $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$ на реальной оси, которое и будет доверительным множеством.

После производства наблюдений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

доверительное множество будет находиться при помощи конечного числа алгебраических операций.

§ 12

Положим

$$\alpha = \alpha_n = (n-1)(1-\varepsilon_n), \quad \beta = \beta_n = (n-1)(1+\varepsilon_n),$$

где $\varepsilon_n \geqslant \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и выясним поведение $\mathfrak{B}_{\alpha_n \beta_n}$. Для наших статистик S_1, S_2, K, L имеем

$$E(x_i - \overline{x})^2 = E(y_i - \overline{y})^2,$$

где $y_i = x_i - a$:

$$E(y_i - \overline{y})^2 = E(y_i^2) - 2E(y_i\overline{y}) + E(\overline{y}^2) =$$

$$= 1 - \frac{2}{n}(\lambda^{i-1} + \lambda^{i-2} + \cdots + 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-i}) + \frac{2}{n^2}\sum_{i<j}\lambda^{j-i} = 1 + O_\lambda\left(\frac{1}{n}\right);$$

аналогично,

$$E(z_i z_j) = \lambda^{j-i} + O_\lambda\left(\frac{1}{n}\right).$$

Далее,

$$E(S_1) = n + O_\lambda(1), \tag{25}$$

$$E(S_2) = n + O_\lambda(1), \tag{26}$$

$$E(K) = (n-1)\lambda + O_\lambda(1), \tag{27}$$

$$E(L^2) = O(1). \tag{28}$$

На основании свойств «слабо зависимых» величин [см. (3), (4)], имеем

$$D(S_1) = O_\lambda(n), \quad D(S_2) = O_\lambda(n), \quad D(K) = O_\lambda(n), \quad D(L^2) = O(1). \tag{29}$$

§ 13

Перепишем неравенства (24), заменив λ переменной ξ (так что, в частности, $A_n = n(1-\xi)\left(1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)\xi\right)$), и разделим на $S_2 + \beta_n$ и $S_2 + \alpha_n$; тогда получим

$$\left.\begin{aligned} &\xi^2 - 2\xi K_1(\beta_n) + K_2(\beta_n) - \frac{4\xi^2(1-\xi)^2}{A_n} M(\beta_n) \leqslant 0, \\ &\xi^2 - 2\xi K_1(\alpha_n) + K_2(\alpha_n) - \frac{4\xi^2(1-\xi)^2}{A_n} M(\alpha_n) \geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

где

$$K_1(\gamma_n) = \frac{K}{S_2 + \gamma_n}, \quad K_2(\gamma_n) = \frac{S_1 - \gamma_n}{S_1 + \gamma_n}, \quad M(\gamma_n) = \frac{L^2}{S_2 + \gamma_n}$$

$$(\gamma_n = \alpha_n \text{ или } \beta_n).$$

Вероятность совмещения (24 а) при $\xi = \lambda$ есть $\varphi_1(\alpha_n, \beta_n)$. Ввиду (25), (26), (27), (28) и (29) получаем, что при $n \to \infty$, с вероятностью сколь

угодно близкой к 1, наши неравенства будут сколь угодно близки (покоэффициентно) к таким:

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 - \xi\lambda \geqslant 0, \\ \xi^2 - \xi\lambda \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{24б}$$

Отсюда и следует, что с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, точки множества $\mathfrak{B}_{\alpha_n\beta_n}$ будут сколь угодно близки к следующим точкам:

$$0 \text{ при } \lambda = 0; \text{ либо } \lambda; \text{ либо } 0 \text{ при } \lambda \neq 0.$$

Так что при $\lambda = 0$ положение удовлетворительное, вообще же надлежит считать, что λ лежит в наиболее удаленном от 0 интервале множества $\mathfrak{B}_{\alpha_n\beta_n}$. Вероятность ошибки при $\lambda \neq 0$ будет стремиться к 0; при $\lambda = 0$ это может быть и не так, но зато указанное значение λ будет с вероятностью $\to 1$ сколь угодно мало отличаться от истинного (это же будет и при $\lambda \neq 0$).

И в этом случае можно указать более простую конструкцию доверительного множества.

Положим

$$Z_1 = X_1 - \lambda X_2, \quad Z_2 = X_2 - \lambda X_3, \ldots, \quad Z_{n-1} = X_{n-1} - \lambda X_n.$$

Легко замечаем, что эти величины попарно некоррелированы и, значит, независимы. Далее,

$$E(Z_1 - Z_2)^2 = 2(1 - \lambda^2),$$

поэтому квадратичная форма

$$U(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \{(Z_1 - Z_2)^2 + (Z_3 - Z_4)^2 + \cdots + (Z_{2\mu-1} - Z_{2\mu})^2\},$$

где 2μ — наибольшее четное число $\leqslant n-1$, будет распределена по закону χ^2 с μ степенями свободы. Введя статистики

$$S_1 = (x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_4)^2 + \cdots + (x_{2\rho-1} - x_{2\rho})^2 + \cdots,$$

$$S_2 = (x_2 - x_3)^2 + (x_4 - x_5)^2 + \cdots,$$

$$K = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) + (x_3 - x_4)(x_4 - x_5) + \cdots,$$

в каждой из которой число членов μ будет при $n \to \infty$ равно $\frac{n}{2} + O(1)$, получаем, что вероятность совмещения неравенств

$$S_1 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K - \alpha\left(\frac{1-\lambda^2}{2}\right) \geqslant 0,$$

$$S_1 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K - \beta\left(\frac{1-\lambda^2}{2}\right) \leqslant 0$$

будет

$$\frac{1}{2^{\frac{\mu}{2}}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)} \int_\alpha^\beta x^{\frac{\mu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx. \tag{30}$$

Отсюда получаем доверительное множество $\mathfrak{B}'_{\alpha\beta}$ для λ в форме совмещения неравенств:

$$\xi^2 - 2\xi \frac{K}{S_2 + \frac{\alpha}{2}} + \frac{S_1 - \frac{\alpha}{2}}{S_1 + \frac{\alpha}{2}} \geqslant 0,$$

$$\xi^2 - 2\xi \frac{K}{S_2 + \frac{\beta}{2}} + \frac{S_1 - \frac{\beta}{2}}{S_2 + \frac{\beta}{2}} \leqslant 0$$

с надежностью (30).

Это множество состоит из $\nu \leqslant 4$ интервалов того же типа, что и в § 5.

Полагая

$$\alpha = \alpha_n = 2\mu(1 - \varepsilon_n),$$

$$\beta = \beta_n = 2\mu(1 + \varepsilon_n),$$

$$\varepsilon_n \to 0,$$

$$\varepsilon_n > \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}},$$

убеждаемся, как и в § 9, что при увеличении числа наблюдений множество $\mathfrak{B}'_{\alpha_n\beta_n}$ ведет себя удовлетворительным образом — именно, с вероятностью $\to 1$ будет состоять из двух стягивающихся интервалов, «сползающих» к точкам 0 и λ. Один из них будет содержать λ и, полагая, что оно находится в наиболее удаленном от 0 интервале, мы с вероятностью $\to 1$ будем иметь в оценке λ ошибку $\Delta \to 0$.

Множество $\mathfrak{B}'_{\alpha\beta}$ проще предыдущего, но возможно, что оно не так полно, как $\mathfrak{B}_{\alpha\beta}$, использует опытную информацию.

§ 14

Пусть теперь неизвестно σ, а среднее a известно; полагаем $a = 0$.

Введем новые переменные

$$V_i = \frac{X_i}{\sigma}.$$

Пусть μ и ν — натуральные числа; составим две квадратичные формы

$$U(V_1, \ldots, V_\mu) = \frac{1}{1-\lambda^2}\{V_1^2 + \cdots + V_{\mu-1}^2 + \lambda^2(V_2^2 + \cdots + V_\mu^2) - 2\lambda(V_1 V_2 + \cdots + V_{\mu-1} V_\mu)\}, \tag{31}$$

$$W(V_\mu, V_{\mu+2}, \ldots, V_{\mu+2\nu}) = \frac{1}{1-\lambda^4}\{V_\mu^2 + \cdots + V_{\mu+2\nu-2}^2 + \lambda^4(V_{\mu+2}^2 + \cdots + V_{\mu+2\nu}^2) - 2\lambda^2(V_\mu V_{\mu+2} + \cdots + V_{\mu+2\nu-2} V_{\mu+2\nu})\}. \tag{32}$$

§ 15

ЛЕММА 3. *Формы $U(V_1, \ldots, V_\mu)$ и $W(V_\mu, V_{\mu+2}, \ldots, V_{\mu+2\nu})$ независимы и имеют распределения χ^2 с соответственно $\mu - 1$ и ν степенями свободы.*

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
U(V_1, \ldots, V_\mu) &= \sum_{i=1}^{\mu-1} \frac{1}{1-\lambda^2}(V_i - \lambda V_{i+1})^2;\\
W(V_\mu, V_{\mu+2}, \ldots, V_{\mu+2\nu}) &= \sum \frac{1}{1-\lambda^4}(V_i - \lambda^2 V_{i+2})^2,
\end{aligned} \tag{33}
$$

где суммирование идет через 2 от μ до $\mu+2(\nu-1)$. Величины $V_i - \lambda V_{i+1}$ $(i=1, 2, \ldots, \mu-1)$ в совокупности нормальны и некоррелированы, стало быть, независимы. То же относится и к величинам $V_i - \lambda^2 V_{i+2}$. Средние значения этих величин суть 0, а дисперсии — соответственно $1-\lambda^2$ и $1-\lambda^4$. Отсюда и следует лемма.

§ 16

Введем случайную величину $T = \dfrac{U(V_1, \ldots, V_\mu)}{W(V_\mu, V_{\mu+2}, \ldots, V_{\mu+2\nu})}$. Имеем, очевидно,

$$
T = \frac{U(X_1, \ldots, X_\mu)}{W(X_\mu, X_{\mu+2}, \ldots, X_{\mu+2\nu})}.
$$

ЛЕММА 4. *Плотность распределения величины T имеет вид*

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Psi(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}} \quad (x>0),\\
&\Psi(x) = 0 \quad (x<0)
\end{aligned}
\right\} \tag{34}
$$

(распределение типа Фишера).

Доказательство. U и W независимы и имеют распределения χ^2 соответственно с μ и ν степенями свободы. Поэтому нетрудно сосчитать плотность распределения $\frac{U}{W}$ [см. ([2])] и доказать, что она выражается формулой (34).

Таким образом, нами найдена плотность распределения случайной величины $T = \dfrac{U(X_1, \ldots, X_\mu)}{W(X_\mu, X_{\mu+2}, \ldots, X_{\mu+2\nu})}$. Она имеет вид (34) и не зависит от параметров a, σ, λ.

§ 17

Пусть произведено $n \geqslant 3$ наблюдений:

$$
x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{2}
$$

Положим $\mu = \left[\frac{n}{3}\right]$ и определим ν как наибольшее целое число, для которого $\mu + 2\nu \leqslant n$. При $n \to \infty$ имеем, очевидно,

$$
\mu = \frac{n}{3} + O(1), \quad \nu = \frac{n}{3} + O(1). \tag{35}
$$

Будем при данных μ и ν рассматривать квадратичные формы $U(X_1, \ldots, X_\mu)$ и $W(X_\mu, X_{\mu+2}, \ldots, X_{\mu+2\nu})$. При $\beta \geqslant \alpha > 0$ имеем: вероятность неравенства

$$\alpha \leqslant \frac{U(X_1, \ldots, X_\mu)}{W(X_\mu, X_{\mu+2}, \ldots, X_{\mu+2\nu})} < \beta \tag{36}$$

будет

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int\limits_\alpha^\beta \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}}\, dx. \tag{37}$$

Введем статистики

$$S_1 = x_1^2 + \cdots + x_{\mu-1}^2, \quad S_2 = x_2^2 + \cdots + x_\mu^2,$$

$$K = x_1x_2 + \cdots + x_{\mu-1}x_\mu,$$

$$S_1' = x_\mu^2 + x_{\mu+2}^2 + \cdots + x_{\mu+2(\nu-1)}^2, \quad S_2' = x_{\mu+2}^2 + \cdots + x_{\mu+2\nu}^2,$$

$$K' = x_\mu x_{\mu+2} + \cdots + x_{\mu+2\nu-2}x_{\mu+2\nu}.$$

§ 18

ЛЕММА 5. *При указанных ранее* μ *и* ν *при* $n \to \infty$ *и при* $\alpha = 1 - \varepsilon_n$, $\beta = 1 + \varepsilon_n$, *где* $\varepsilon_n \to 0$ *и* $\varepsilon_n > \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$, *вероятность* (37) *стремится к* 1.

(Нетрудно убедиться, что это утверждение содержит в себе закон больших чисел для $T = \frac{U}{W}$ и, обратно, следует из него, за исключением оценки для ε_n.)

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mu-1}{2} = \left[\frac{n}{6}\right] + O(1), \quad \frac{\nu}{2} = \left[\frac{n}{6}\right] + O(1).$$

Положим $\left[\frac{n}{6}\right] = N$.

При помощи формулы Стирлинга получим

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} < C_0 N^4 2^{2N};$$

при $\varepsilon_n \geqslant \frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$ имеем

$$\int\limits_{1+\varepsilon_n}^\infty \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}}\, dx < \int\limits_{1+\varepsilon_n}^\infty \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1+x)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{dx}{(1+x)^{\frac{\nu}{2}}} <$$

$$< \int\limits_{1+\varepsilon_n}^{15} \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1+x)^{\frac{\mu-1}{2}}} \frac{dx}{(1+x)^{\frac{\nu}{2}}} + \int\limits_{15}^\infty \frac{dx}{(1+x)^{\frac{\nu}{2}}};$$

$$\int\limits_{24}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^{\frac{\nu}{2}}} < C_1 \cdot 5^{-N};$$

$$\int\limits_{1+\varepsilon_n}^{24} \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}}}{(1+x)^{\frac{\mu-1}{2}+\frac{\nu}{2}}} dx < \int\limits_{1+\varepsilon_n}^{24} \left[\frac{x}{(1+x)}\right]^N dx =$$

$$= C_2 \int\limits_{2+\varepsilon_n}^{24} \left(\frac{z-1}{z^3}\right)^N dz < C_3 \left[\frac{1+\varepsilon_n}{(2+\varepsilon_n)^2}\right]^N =$$

$$= C_3 2^{-2N} \left(\frac{1+\varepsilon_n}{1+\varepsilon_n+\frac{\varepsilon_n^2}{4}}\right)^N < C_4 2^{-2N} e^{-\ln^2 N}.$$

Таким образом, собирая предыдущие оценки, находим

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int\limits_{1+\varepsilon_n}^{\infty} \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}} dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Изучим теперь сегмент $[0,\ 1-\varepsilon_n]$. Полагая

$$f(x) = \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}},$$

найдем

$$\int\limits_0^{1-\varepsilon_n} f(x)\,dx < C_5 \int\limits_1^{2-\varepsilon_n} \left(\frac{z-1}{z}\right)^N dz < 2C_5 \left[\frac{1-\varepsilon_n}{4-4\varepsilon_n+\varepsilon_n^2}\right]^N < C_6 2^{-2N} e^{-\ln^2 N}.$$

Отсюда

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int\limits_0^{1-\varepsilon_n} f(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

что доказывает лемму.

§ 19

Возвращаясь к неравенству (36), перепишем его в виде:

$$\alpha \leqslant \frac{(1+\lambda^2)(S_1+\lambda^2 S_2 - 2\lambda K)}{S_1' + \lambda^4 S_2' - 2\lambda^2 K} \leqslant \beta.$$

Отсюда замечаем, что вероятность совмещения неравенств

$$\left.\begin{aligned} (1+\lambda^2)(S_1+\lambda^2 S_2-2\lambda K)-\alpha(S'_1+\lambda^4 S'_2-2\lambda^2 K') \geqslant 0, \\ (1+\lambda^2)(S_1+\lambda^2 S_2-2\lambda K)-\beta(S'_1+\lambda^4 S'_2-2\lambda^2 K') \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

зависит только от α β и n и выражается формулой (37). Эти неравенства имеют степень $\rho \leqslant 4$ и каждое из них отвечает местонахождению λ в некотором количестве $\rho_1 \leqslant 3$ отрезков реальной оси. Совмещение их помещает λ в некоторое множество $\mathfrak{C}$, находимое при помощи конечного числа алгебраических операций. Это и будет доверительное множество для λ.

§ 20

Положим $\alpha = \alpha_n = 1 - \varepsilon_n$, $\beta = \beta_n = 1 + \varepsilon_n$, где ε_n — числа из § 18, и будем изучать поведение $\mathfrak{C}$ при $n \to \infty$. Для этого заметим, рассуждая, как и в § 12, что при $n \to \infty$

$$E(S_1) \sim E(S_2) \sim E(S'_1) \sim E(S'_2) \sim \frac{n}{3},$$

$$E(K) \sim \frac{n}{3}\lambda, \qquad E(K') \sim \frac{n}{3}\lambda^2,$$

$$D(M) = O_\lambda(n),$$

где M — любая из статистик $S_1, S'_1, S_2, S'_2, K, K'$. Ввиду этого, деля неравенства (38) на $\frac{n}{3}$ и заменяя λ на ξ, найдем, что после такого деления и при $n \to \infty$ наши неравенства с вероятностью $\to 1$ будут покоэффициентно сколь угодно близки к следующим:

$$(1+\xi^2)(1+\xi^2-2\xi\lambda)-(1+\xi^4-2\xi^2\lambda^2) \geqslant 0,$$

$$(1+\xi^2)(1+\xi^2-2\xi\lambda)-(1+\xi^4-2\xi^2\lambda^2) \leqslant 0,$$

которые можно переписать так:

$$2\xi(\xi-\lambda)(1-\xi\lambda) \geqslant 0,$$

$$2\xi(\xi-\lambda)(1-\xi\lambda) \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что при $n \to \infty$ с вероятностью $\to 1$ случайные интервалы, составляющие множество $\mathfrak{C}_{\alpha_n \beta_n}$, должны стягиваться и приближаться к точкам

$$0, \quad \lambda, \quad \frac{1}{\lambda},$$

либо не существовать. При $\lambda = 0$ один из интервалов либо не существует, либо удаляется в ∞.

Так как $|\lambda| < 1$, то очевидно, что интервал, стягивающийся и приближающийся к $\frac{1}{\lambda}$, не может покрывать λ при достаточно большом n. Будем брать пересечение $\mathfrak{C}_{\alpha\beta} \cap I$, где I — сегмент $[-1, 1]$.

Если мы будем считать, что неизвестное нам λ находится в интервале, наиболее удаленном от 0 во множестве $\mathfrak{C}_{\alpha\beta} \cap I$, то при $n \to \infty$ с вероятностью $\to 1$ мы будем определять λ с ошибкой $\to 0$.

§ 21

Перейдем к случаю, когда a и σ неизвестны. Положим, как и ранее,

$$V_i = \frac{X_i}{\sigma} \quad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Наблюдения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ используем следующим образом:

Пусть μ — наибольшее нечетное число $\leqslant \frac{n}{3}$: ν — наибольшее четное число такое, что $\mu + 2\nu \leqslant n$. Положим

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 = V_1 - \lambda V_2, \quad Z_2 = V_2 - \lambda V_3, \ldots, \quad Z_{\mu-1} = V_{\mu-1} - \lambda V_\mu, \\ Y_1 = V_\mu - \lambda^2 V_{\mu+2}, \quad Y_2 = V_{\mu+2} - \lambda^2 V_{\mu+4}, \ldots, Y_\nu = V_{\mu+2(\nu-1)} - \lambda^2 V_{\mu+2\nu}. \end{array}\right\} \quad (39)$$

Как и в § 13, мы увидим, что эти величины независимы и нормальны. Составим теперь величины:

$$\left.\begin{array}{l} Z_1 - Z_2, \ Z_3 - Z_4, \ldots, Z_{\mu-2} - Z_{\mu-1}, \\ Y_1 - Y_2, \ Y_3 - Y_4, \ldots, Y_{\nu-1} - Y_\nu. \end{array}\right\} \quad (39a)$$

В первой строчке (39а) имеется $\frac{\mu-1}{2}$ величин; во второй — $\frac{\nu}{2}$ величин со средними значениями 0. Так как

$$D(Z_i) = 1 - \lambda^2, \quad D(Y_i) = 1 - \lambda^4,$$

то

$$D(Z_i - Z_{i+1}) = 2(1 - \lambda^2), \quad D(Y_i - Y_{i+1}) = 2(1 - \lambda^4).$$

Введем квадратичные формы:

$$U(Z_1, \ldots, Z_{\mu-1}) = \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \{(Z_1 - Z_2)^2 + (Z_3 - Z_4)^2 + \cdots + (Z_{\mu-2} - Z_{\mu-1})^2\}, \quad (40)$$

$$W(Y_1, \ldots, Y_\nu) = \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \{(Y_1 - Y_2)^2 + (Y_3 - Y_4)^2 + \cdots + (Y_{\nu-1} - Y_\nu)^2\}. \quad (41)$$

Из предыдущего явствует, что они независимы и распределены по χ^2 соответственно с $\frac{\mu-1}{2}$ и $\frac{\nu}{2}$ степенями свободы.

§ 22

Введем в рассмотрение дробь $T = \frac{U}{W}$. Легко видеть, что T не изменяется, если в формулах (39), (40), (41) вместо величин $V_1, V_2, \ldots, V_{\mu+2\nu}$ подставить исходные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{\mu+2\nu}$.

Отсюда видно, что T имеет распределение z Фишера [см. (2)] и что при $\beta > \alpha > 0$

$$P\{\alpha \leqslant T < \beta\} = z(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_\alpha^\beta \frac{x^{\frac{\mu-1}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{\mu+\nu-1}{2}}} dx. \quad (42)$$

Далее, имеем:

$$\frac{1}{2(1-\lambda^2)}\{[(x_1-\lambda x_2)-(x_2-\lambda x_3)]^2+[(x_3-\lambda x_4)-(x_4-\lambda x_5)]^2+\cdots$$
$$\cdots+[(x_{\mu-2}-\lambda x_{\mu-1})-(x_{\mu-1}-\lambda x_\mu)]^2\}=\frac{1}{2(1-\lambda^2)}[S_1+\lambda^2 S_2-2\lambda K],$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= (x_1-x_2)^2+(x_3-x_4)^2+\cdots+(x_{\mu-2}-x_{\mu-1})^2,\\ S_2 &= (x_2-x_3)^2+(x_4-x_5)^2+\cdots+(x_{\mu-1}-x_\mu)^2,\\ K &= (x_1-x_2)(x_2-x_3)+\cdots+(x_{\mu-2}-x_{\mu-1})(x_{\mu-1}-x_\mu).\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

Аналогично,

$$\frac{1}{2(1-\lambda^4)}\{[(x_\mu-\lambda^2 x_{\mu+2})-(x_{\mu+2}-\lambda^2 x_{\mu+4})]^2+\cdots$$
$$\cdots+[(x_{\mu+2\nu-4}-\lambda^2 x_{\mu+2\nu-2})-(x_{\mu+2\nu-2}-\lambda^2 x_{\mu+2\nu})]^2\}=$$
$$=\frac{1}{2(1-\lambda^4)}\{S_1'+\lambda^4 S_2'-2\lambda^2 K'\},$$

где

$$\left.\begin{aligned} S_1' &= (x_\mu-x_{\mu+2})^2+\cdots+(x_{\mu+2\nu-4}-x_{\mu+2\nu-2})^2,\\ S_2' &= (x_{\mu+2}-x_{\mu+4})^2+\cdots+(x_{\mu+2\nu-2}-x_{\mu+2\nu})^2,\\ K' &= (x_\mu-x_{\mu+2})(x_{\mu+2}-x_{\mu+4})+\cdots\\ &\qquad\cdots+(x_{\mu+2\nu+4}-x_{\mu+2\nu-2})(x_{\mu+2\nu-2}-x_{\mu+2\nu}).\end{aligned}\right\}\quad(44)$$

Отсюда следует, что вероятность совмещения неравенств

$$\alpha\leqslant\frac{(1+\lambda^2)(S_1+\lambda^2 S_2-2\lambda K)}{S_1'+\lambda^4 S_2'-2\lambda K'}<\beta \quad(45)$$

есть $z(\alpha,\beta)$ (формула (42)).

Эти неравенства дают доверительное множество $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ для λ того же типа, что и $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ из § 19. Оно состоит из $\nu\leqslant 9$ интервалов и находится при помощи конечного числа операций рациональных и извлечения ради калов.

§ 23

Пусть, как и в § 18, $n\to\infty$, $\alpha=\alpha_n=1-\varepsilon_n$, $\beta=\beta_n=1+\varepsilon_n$, $\varepsilon_n\to 0$, $\varepsilon_n>\frac{\ln^2 n}{\sqrt{n}}$.

Очевидно, имеем

$$\frac{\mu-1}{2}=\frac{n}{6}+O(1),\qquad \frac{\nu}{2}=\frac{n}{6}+O(1).$$

Отсюда следует, что $z(\alpha_n, \beta_n) \to 1$. Далее,

$$E(S_1) = \frac{\mu - 1}{2} \cdot 2\sigma^2 (1 - \lambda);$$

в силу стационарности основного ряда,

$$E(S_2) = E(S_1) = \frac{\mu - 1}{2} \cdot 2\sigma^2 (1 - \lambda),$$

$$E(K) = -\frac{\mu - 1}{2} \sigma (1 - \lambda)^2.$$

Аналогично,

$$E(S_1') = E(S_2') = \frac{\nu}{2} \cdot 2\sigma^2 (1 - \lambda^2),$$

$$E(K') = -\frac{\nu}{2} \sigma^2 (1 - \lambda^2)^2,$$

$$D(M) = \sigma^2 \cdot O_\lambda(n),$$

где M — любая из статистик S_1, S_1', S_2, S_2', K, K'.

Ввиду этого, деля эквивалентные неравенствам (45) неравенства

$$(1 + \lambda^2)(S_1 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K) - \alpha_n (S_1' + \lambda^4 S_2' - 2\lambda K') \geqslant 0,$$

$$(1 + \lambda^2)(S_1 + \lambda^2 S_2 - 2\lambda K) - \beta_n (S_1' + \lambda^4 S_2' - 2\lambda K') \leqslant 0 \qquad (46)$$

на $\frac{n}{3}\sigma^2$ и заменяя в них λ на ξ, получим, что при $n \to \infty$ такие неравенства будут с вероятностью $\to 1$ покоэффициентно сколь угодно близки к следующим:

$$(1 + \xi^2)\{(1 - \lambda) + \xi^2(1 - \lambda) + \xi(1 - \lambda)^2\} - \{(1 - \lambda^2) + \xi^4(1 - \lambda^2) + \xi^2(1 - \lambda^2)^2\} \geqslant 0,$$

$$(1 + \xi^2)\{(1 - \lambda) + \xi^2(1 - \lambda) + \xi(1 - \lambda)^2\} - \{(1 - \lambda^2) + \xi^4(1 - \lambda^2) + \xi^2(1 - \lambda^2)^2\} \leqslant 0.$$

Но элементарный подсчет показывает, что такие неравенства равносильны следующим:

$$(\xi - \lambda)(1 - \xi\lambda)(\xi^2 + \xi(1 + \lambda) + 1) \geqslant 0,$$

$$(\xi - \lambda)(1 - \xi\lambda)(\xi^2 + \xi(1 + \lambda) + 1) \leqslant 0.$$

Так как $|\lambda| < 1$, то многочлен $\xi^2 + \xi(1 + \lambda) + 1$ положительно определенный, и потому наши неравенства приводятся к следующим:

$$(\xi - \lambda)(1 - \xi\lambda) \geqslant 0,$$

$$(\xi - \lambda)(1 - \xi\lambda) \leqslant 0. \qquad (47)$$

Поведение этих неравенств исследовано в § 19. Таким образом, доверительное множество $\mathcal{E}_{\alpha_n \beta_n}$ ведет себя при $n \to \infty$ так же, как множество $\mathfrak{E}_{\alpha_n \beta_n}$ из § 19, т. е. удовлетворительным образом.

§ 24

Полученные доверительные множества не обязаны, разумеется, быть в каком-либо смысле наивыгоднейшими. Вопрос об их выгодности, как и вопрос об их общей форме, нуждается в дополнительном изучении как для случая данного числа наблюдений, так и для случая последовательной процедуры типа А. Вальда. Далее, повидимому, возможно при помощи предыдущих методов изучить вопрос о доверительных множествах для a и σ в случае неизвестного λ. Для известного λ этот вопрос тривиальным образом сводится к классической постановке.

Поступило
12. XI. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Определение центра рассеивания и меры точности по ограниченному числу наблюдений, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 6 (1942), 3—32.

[2] Крамер Г., Математические методы статистики, М., 1948.

[3] Бернштейн С. Н., Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann., 97 (1926), 1—59.

[4] Сапогов Н. А., О законе больших чисел для зависимых случайных величин, Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 14 (1950), 145—154.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 523–536

Ю. В. ПРОХОРОВ

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Работа содержит доказательства некоторых новых результатов, относящихся к условиям приложимости усиленного закона больших чисел, предварительное сообщение о которых было опубликовано в ([5]). Указанные результаты получены применением методов, развитых А. Н. Колмогоровым ([1]), ([3]).

§ 1. **Введение**. Определение 1. Случайные величины η_n последовательности $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ *усиленно устойчивы*, если существует такая числовая последовательность $d_1, d_2, \ldots, d_n$, что

$$P\{\eta_n - d_n \to 0\} = 1. \text{ *} \quad (1.1)$$

Замечание 1. Если последовательность d'_n такова, что $d_n - d'_n \to 0$, то

$$P\{\eta_n - d'_n \to 0\} = 1.$$

Замечание 2. Если выполнено (1.1), то $d_n - m\eta_n \to 0$ и, следовательно,

$$P\{\eta_n - m\eta_n \to 0\} = 1. \quad (1.2)$$

В самом деле, из (1.1) следует, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|\eta_n - d_n| \leqslant \varepsilon\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad (1.3)$$

а в силу неравенства **

$$P\{|\eta_n - d_n| \leqslant \varepsilon\} \leqslant \max\left[\frac{1}{2}, P\{|\eta_n - m\eta_n| \leqslant 2\varepsilon\}\right], \quad (1.4)$$

из (1.3) вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$

$$P\{|\eta_n - m\eta_n| \leqslant \varepsilon\} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \quad (1.5)$$

Из (1.3) и (1.5) выводим, что $d_n - m\eta_n \to 0$.

---

* $P\{\ \}$ означает вероятность события, указанного в фигурных скобках, $M\xi$ — математическое ожидание, $D\xi$ — дисперсия, $m\xi$ — медиана случайной величины ξ.

** Для любой случайной величины ξ и любых действительных a и $h > 0$

$$P\{|\xi - a| \leqslant h\} \leqslant \max\left[\frac{1}{2}, P\{|\xi - m\xi| \leqslant 2h\}\right].$$

Действительно, если $P\{|\xi - a| \leqslant h\} > \frac{1}{2}$, то $|m\xi - a| \leqslant h$ и из $|\xi - a| \leqslant h$ следует, что $|\xi - m\xi| \leqslant 2h$.

Определение 2. Усиленная устойчивость η_n нормальна, если в (1.1) можно выбрать $d_n = M\eta_n$.

Всюду в дальнейшем рассматривается специальный случай средних арифметических

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}, \tag{1.6}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность взаимно независимых случайных величин.

Определение 3. Последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел, если η_n усиленно устойчивы.

Замечание 3. Последовательности ξ_n и $\xi_n + c_n$, где c_n — постоянные, удовлетворяют усиленному закону больших чисел одновременно.

Замечание 4. Определение 3 шире классического определения усиленного закона больших чисел, в котором требуется нормальная усиленная устойчивость η_n.

§ 2. **Результаты.** В § 4 дается необходимое и достаточное условие усиленного закона больших чисел в терминах, содержащих вероятности неравенств для некоторых сумм случайных величин (теорема 2).

Далее, как следствие теоремы 2, получается необходимое и достаточное условие усиленного закона больших чисел в терминах дисперсий $D\xi_n$ для случая, когда либо все ξ_n распределены по нормальному закону, либо $|\xi| = o\left(\frac{n}{\ln \ln n}\right)$.

Кроме того, как следствие той же теоремы 2, получается достаточное условие А. Н. Колмогорова ([1]) и его обобщение, данное Brunk'ом ([2]).

§ 3. ЛЕММА 1*. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины и*

$$\zeta_k = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Тогда

$$P\{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\zeta_k - m\zeta_k| > h\} \leqslant 4P\left\{|\zeta_n - m\zeta_n| > \frac{h}{2}\right\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Если $P\left\{|\zeta_n - m\zeta_n| > \frac{h}{2}\right\} \geqslant \frac{1}{4}$, то лемма тривиально верна. Допустим, поэтому, что

$$P\left\{|\zeta_n - m\zeta_n| > \frac{h}{2}\right\} < \frac{1}{4}.$$

Введем обозначения:

$$\bar{A} = \left\{|\zeta_n - m\zeta_n| \leqslant \frac{h}{2}\right\},$$

$$B_1 = \{m\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) \geqslant -(\zeta_n - m\zeta_n)\} = \{\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) \geqslant 0\},$$

$$B_2 = \{m\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) \leqslant -(\zeta_n - m\zeta_u)\} = \{\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) \leqslant 0\}.$$

* Эта лемма и ее доказательство принадлежат А. Н. Колмогорову.

Очевидно, что

$$P\{\overline{A}\} > \frac{3}{4}, \qquad P\{B_1\} \geqslant \frac{1}{4}, \qquad P\{B_2\} \geqslant \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$P\left\{m\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) \geqslant -\frac{h}{2}\right\} \geqslant P\{\overline{A} \cap B_1\} > 0$$

и

$$P\left\{m\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) \leqslant \frac{h}{2}\right\} \geqslant P\{\overline{A} \cap B_2\} > 0.$$

Так как здесь под знаками P стоят *не случайные события*, то из положительных их вероятностей следует их достоверность, т. е. всегда

$$| m\zeta_n - m\zeta_k - m(\zeta_n - \zeta_k) | \leqslant \frac{h}{2}. \tag{3.2}$$

Обозначим еще

$$A = \left\{ |\zeta_n - m\zeta_n| > \frac{h}{2}\right\},$$

$$A' = \left\{\zeta_n - m\zeta_n > \frac{h}{2}\right\}, \qquad A'' = \left\{\zeta_n - m\zeta_n < -\frac{h}{2}\right\},$$

$$C = \{\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\zeta_k - m\zeta_k| > h\},$$

$$C'_k = \{|\zeta_i - m\zeta_i| \leqslant h, \quad i < k; \quad \zeta_k - m\zeta_k > h\},$$

$$C''_k = \{|\zeta_i - m\zeta_i| \leqslant h, \quad i < k; \quad \zeta_k - m\zeta_k < -h\}.$$

Тогда

$$A = A' \cup A'', \quad C = \bigcup_1^n C'_k \cup \bigcup_1^n C'_k,$$

причем отдельные события в последних двух суммах попарно несовместимы. Следовательно,

$$P\{A\} = P\{A \cap C\} \geqslant \sum_{k=1}^{n} P\{A' \cap C'_k\} + \sum_{k=1}^{n} P\{A'' \cap C''_k\}, \tag{3.3}$$

$$P\{A' \cap C'_k\} \geqslant P\left\{\zeta_n - m\zeta_n - \zeta_k + m\zeta_k \geqslant -\frac{h}{2}\right\} \cdot P\{C'_k\} =$$

$$= P\left\{\zeta_n - \zeta_k \geqslant m\zeta_n - m\zeta_k - \frac{h}{2}\right\} \cdot P\{C'_k\}. \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.4) вытекает, что

$$P\{A' \cap C'_k\} \geqslant \frac{1}{2} P\{C'_k\}. \tag{3.5}$$

Аналогично находим, что

$$P\{A'' \cap C''_k\} \geqslant \frac{1}{2} P\{C''_k\}. \quad (3.6)$$

Из (3.5), (3.6), вместе с очевидным равенством

$$P\{C\} = \sum_{k=1}^{n} P\{C'_k\} + \sum_{k=1}^{n} P\{C''_k\},$$

следует (3.1).

§ 4. ЛЕММА 2. *Пусть $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ — последовательность взаимно независимых событий. С вероятностью единица наступает конечное или бесконечное число из событий $\mathcal{E}_n$ в зависимости от того, сходится или расходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\mathcal{E}_n\}.$$

Доказательство. Событие X, состоящее в том, что наступает одновременно бесконечное число $\mathcal{E}_n$, может быть записано в виде:

$$X = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} \mathcal{E}_n.$$

Теперь легко находим, что

$$P\{X\} = \lim_{N\to\infty} P\{\bigcup_{n>N} \mathcal{E}_n\} = 1 - \lim_{N\to\infty} \{\bigcap_{n>N} \overline{\mathcal{E}_n}\} =$$

$$= 1 - \lim_{N\to\infty} \prod_{n>N} [1 - P\{\mathcal{E}_n\}] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\{\mathcal{E}_n\} < \infty, \\ 0, & \text{если} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\{\mathcal{E}_n\} = \infty. \end{cases}$$

ЛЕММА 3. *Для усиленной устойчивости последовательности независимых случайных величин χ_r необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{r=0}^{\infty} P\{|\chi_r - m\chi_r| > \varepsilon\} < \infty \quad \textit{при любом} \quad \varepsilon > 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Для того чтобы

$$P\{\chi_r - m\chi_r \to 0\} = 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ с вероятностью единица наступило лишь конечное число из независимых событий

$$\mathcal{E}_{r,\varepsilon} = \{|\chi_r - m\chi_r| > \varepsilon\}.$$

Поэтому лемма 3 есть непосредственное следствие леммы 2.

ТЕОРЕМА 1 *. *Для усиленной устойчивости η_n, определенных по*

---

* Формулировка этой теоремы была в качестве гипотезы сообщена автору А. Н. Колмогоровым.

(1.6), *необходима и достаточна усиленная устойчивость последовательности*

$$\chi_r = \frac{1}{2^r} \sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} \xi_n, \quad \chi_0 = \xi_1. \tag{4.2}$$

Из теоремы 1 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы последовательность независимых случайных величин* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *удовлетворяла усиленному закону больших чисел, необходимо и достаточно условие* (4.1), *где* χ_r *определены по* (4.2).

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Пусть $P\{\eta_n - m\eta_n \to 0\} = 1$. Тогда $P\{\eta_{2^r} - m\eta_{2^r} \to 0\} = 1$ или, что то же самое,

$$P\left\{\frac{\chi_0 + 2\chi_1 + 2^2\chi_2 + \cdots + 2^{r-1}\chi_{r-1}}{2^r} - m\eta_{2^r} \to 0\right\} = 1. \tag{4.3}$$

Очевидно, что можно найти последовательность чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, для которой

$$\frac{a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \cdots + 2^{r-1} a_{r-1}}{2^r} = m\eta_{2^r}.$$

При таком подборе a_r из (4.3) получим

$$P\left\{\frac{(\chi_0 - a_0) + 2(\chi_1 - a_1) + \cdots + 2^{r-1}(\chi_r - a_r)}{2^r} \to 0\right\} = 1,$$

откуда

$$P\{\chi_r - a_r \to 0\} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть $P\{\chi_r - m\chi_r \to 0\} = 1$. Тогда, по лемме 3,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P\{|\chi_r - m\chi_r| > \varepsilon\} < \infty. \tag{4.4}$$

В силу же леммы 1, введя обозначение

$$\chi_r^n = \frac{1}{2^r} \sum_{k>2^r}^{n} \xi_k,$$

из (4.4) получим

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\{\max_{2^r < n \leq 2^{r+1}} |\chi_r^n - m\chi_r^n| > \varepsilon\} < \infty \tag{4.5}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Из (4.5) и леммы 2 заключаем, что с вероятностью единица, начиная с некоторого случайного номера ρ_0, выполнены все неравенства

$$\max_{2^r < n \leq 2^{r+1}} |\chi_r^n - m\chi_r^n| \leq \varepsilon \quad (r \geq \rho_0(\varepsilon)).$$

Положим $k_n = \left[\frac{\ln n}{\ln 2}\right]$ ($[x]$ — целая часть x) и

$$d_n = \left(\frac{m\chi_0}{2^{k_n}} + \frac{m\chi_1}{2^{k_n-1}} + \cdots + \frac{m\chi_{k_n-1}}{2} + \frac{m\chi_{k_n}^n}{1}\right) \cdot \frac{2^{k_n}}{n}.$$

Легко видеть, что для $n \geqslant \nu_0(\rho_0, \varepsilon)$

$$|\eta_n - d_n| \leqslant \frac{|\chi_0 - m\chi_0|}{2^{k_n}} + \frac{|\chi_1 - m\chi_1|}{2^{k_n-1}} + \cdots + \frac{\chi_{k_n}^n - m\chi_{k_n}^n}{1} \leqslant$$
$$\leqslant \cdots + \frac{\varepsilon}{2^{k_n-\rho_0}} + \frac{\varepsilon}{2^{k_n-\rho_0-1}} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon.$$

Итак, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, с вероятностью единица найдется такой случайный номер ν_0, что для $n \geqslant \nu_0$

$$|\eta_n - d_n| \leqslant \varepsilon,$$

а это равносильно тому, что

$$P\{\eta_n - d_n \to 0\} = 1.$$

§ 5. Случай, когда все ξ_n распределены по нормальному закону.

ЛЕММА 4. *Пусть закон распределения ξ — нормальный закон, причем $M\xi = 0$ и $D\xi = b$. Тогда при $x > 0$*

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{b}} \leqslant P\{\xi > x\} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2b}}.$$

Доказательство. При любом z

$$ze^{-z^2} < e^{-\frac{z^2}{2}},$$

откуда

$$\int_y^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz > \int_y^\infty ze^{-z^2} dz = \frac{1}{2} e^{-\frac{y^2}{2}}. \qquad (5.1)$$

При $y \geqslant \frac{1}{2}$

$$\int_y^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz \leqslant \frac{1}{y} \int_y^\infty ze^{-z^2} dz \leqslant 2e^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad (5.2)$$

при $y \leqslant \frac{1}{2}$

$$\int_y^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz < \int_y^1 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + e^{-\frac{1}{2}} < e^{-\frac{y^2}{2}} + e^{-\frac{1}{2}} \leqslant 2e^{-\frac{y^2}{2}}. \qquad (5.3)$$

Из неравенств (5.1), (5.2), (5.3) и из того, что

$$P\{\xi > x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \int_x^\infty e^{-\frac{z^2}{2b}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{b}}}^\infty e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

сразу следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы распределенные по нормальному закону* ξ_n *удовлетворяли усиленному закону больших чисел, необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{H_r}} < \infty, \tag{5.4}$$

где

$$H_r = D\chi_r = \frac{1}{2^{2r}} \sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} D\xi_n.$$

Доказательство. Закон распределения для χ_r — нормальный, следовательно, $M\chi_r = m\chi_r$. Далее, можно предположить (см. замечание 3 в § 1), что $M\xi_n = 0$. Тогда $M\chi_r = 0$ и теорема 3 есть очевидное следствие теоремы 2 и леммы 4.

§ 6. Определение 4. Последовательности ξ_n и ξ_n' случайных величин эквивалентны, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n \neq \xi_n'\} < \infty. \tag{6.1}$$

ЛЕММА 5. *Какова бы ни была последовательность событий* $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots, \mathscr{E}_n, \ldots$ *(зависимых или независимых), если* $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\mathscr{E}_n\} < \infty$, *то с вероятностью единица наступает одновременно лишь конечное число* $\mathscr{E}_n$.

Действительно (ср. лемму 2 в § 4),

$$P\left\{\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n>N} \mathscr{E}_n\right\} = \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n>N} \mathscr{E}_n\right) \leqslant \lim_{N\to\infty} \sum_{n>N} P\{\mathscr{E}_n\} = 0.$$

ТЕОРЕМА 4. *Эквивалентные последовательности случайных величин удовлетворяют усиленному закону больших чисел одновременно.*

Доказательство. Из леммы 5 и (6.1) следует, что, начиная с некоторого случайного номера, $\xi_n = \xi_n'$, откуда теорема вытекает уже почти непосредственно.

ТЕОРЕМА 5. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - m\xi_n| > \varepsilon\cdot n\} < \infty \tag{6.2}$$

необходимо для усиленного закона больших чисел. С другой стороны, какова бы ни была $\varphi(n) = o(n)$, *условие* (6.2) *перестает быть необходимым, если заменить в нем* $\varepsilon\cdot n$ *на* $\varphi(n)$.

Замечание. Положим

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_n &= \xi_n - m\xi_n, && \text{если} \quad |\xi_n - m\xi_n| \leqslant n, \\ \bar{\xi}_n &= 0, && \text{если} \quad |\xi_n - m\xi_n| > n. \end{aligned}$$

Переписав (6.2) в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n \neq \bar{\xi}_n\} < \infty,$$

замечаем, что ξ_n и $\bar{\xi}_n$ удовлетворяют усиленному закону больших чисел одновременно. Таким образом, приходим к выводу, что при исследовании условий приложимости усиленного закона больших чисел можно ограничиться случаем $|\xi_n| = O(n)$ (но нельзя ограничиться случаем $|\xi_n| = O(\varphi(n))$, где $\varphi(n) = o(n)$!).

Доказательство теоремы 5. Из того, что

$$P\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n} - d_n \to 0\right\} = 1,$$

следует

$$P\left\{\frac{\xi_n}{n} - d'_n \to 0\right\} = 1, \quad d'_n = d_n - \frac{n}{n-1} d_{n-1},$$

и необходимость (6.2) вытекает из леммы 3.

Пусть теперь $\varphi(n) = o(n)$. Доказательство теоремы 5 будет завершено, если мы построим последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, удовлетворяющих усиленному закону больших чисел, такую, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - m\xi_n| > \varphi(n)\} = \infty.$$

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда

1) $\varphi(n) \to \infty$ монотонно,

2) $\frac{\varphi(n)}{n} \to 0$ монотонно.

Заставим S пробегать все целые положительные числа и обозначим через n_S первое из тех n (целых и положительных), для которых

$$\frac{n}{\varphi(n)} > \frac{S^2}{3}.$$

При $S \geqslant S_0$ соответствие между S и n_S взаимно однозначно, так как, в силу 1) и 2),

$$\frac{n+1}{\varphi(n+1)} - \frac{n}{\varphi(n)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Положив (при $c > 1$)

$$\xi_n = -c\varphi(n), \quad 0, \quad c\varphi(n)$$

с вероятностями, равными соответственно

$$u_n \frac{n}{\varphi(n)}, \quad 1 - \frac{2u_n n}{\varphi(n)}, \quad u_n \frac{n}{\varphi(n)},$$

где $u_{n_S} = \frac{1}{S^2}$ и $u_n = \frac{1}{n^2}$, $n \neq n_S$, находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n - m\xi_n| > \varphi(n)\} \geqslant 2 \sum_{n=n_S} u_n \frac{n}{\varphi(n)} = \infty.$$

Что ξ_n удовлетворяют усиленному закону больших чисел, можно видеть, например, из даваемого ниже достаточного условия усиленного закона больших чисел А. Н. Колмогорова:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty,$$

которое в рассматриваемом случае выполнено:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^2(n)\cdot n}{\varphi(n)\cdot n^2} u_n < c^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n < c^2 \cdot 2 \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

ТЕОРЕМА 6. А) *Для того чтобы последовательность независимых случайных величин* $\xi_2, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, *для которых всегда* $|\xi_n| \leqslant n$, *удовлетворяла усиленному закону больших чисел, необходимо и достаточно, чтобы при любом* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\chi_r - M\chi_r| > \varepsilon\} < \infty. \tag{6.3}$$

В) *Если* (6.3) *выполнено, то в* (1.1) *можно положить*

$$d_n = M\eta_n.$$

Доказательство. Достаточность условия (6.3) и пункт В) легко вывести из леммы 2. Докажем необходимость (6.3). При условии $|\xi_n| \leqslant n$ условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} D\xi_k = o(n^2)\ *, \tag{6.4}$$

а следовательно, и условие

$$H_r = \frac{1}{2^{2r}} \left(\sum_{k=1}^{2^{r+1}} D\xi_k - \sum_{k=1}^{2^r} D\xi_k \right) = o(1) \tag{6.5}$$

необходимо для усиленного закона больших чисел. Из (6.5) и неравенства

$$|m\xi - M\xi| \leqslant \sqrt{2D\xi},$$

справедливого для любой случайной величины с конечной дисперсией**, получаем

$$m\chi_r - M\chi_r \to 0,$$

чем, принимая во внимание теорему 2, необходимость (6.3) доказана.

§ 7. ТЕОРЕМА 7. *Условие*

$$\sum_{r=1}^{\infty} H_r < \infty \tag{7.1}$$

достаточно для усиленного закона больших чисел.

---

* Условие (6.4) необходимо даже для обычного закона больших чисел: $P\{|\eta_n - m\eta_n| \leqslant \varepsilon\} \to 1$, при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$, если только $|\xi_n| \leqslant n$ [ср. ([4]), стр. 72].

** Для доказательства достаточно заметить, что, по неравенству Чебышева,

$$P\{\xi \geqslant M\xi - \sqrt{2D\xi}\} \geqslant \frac{1}{2},$$

т. е. $m\xi \geqslant M\xi - \sqrt{2D\xi}$ и $P\{\xi \leqslant M\xi + \sqrt{2D\xi}\} \geqslant \frac{1}{2}$, т. е. $m\xi \leqslant M\xi + \sqrt{2D\xi}$.

В терминах H_r оно является наилучшим достаточным в том смысле, что для любой последовательности чисел H_r, для которой

$$\sum_{r=1}^{\infty} H_r = \infty, \tag{7.2}$$

существует не удовлетворяющая усиленному закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ такая, что $D\chi_r = H_r$.

ТЕОРЕМА 8. *В предположении* $|\xi_n| \leqslant n$ *условие*

$$H_r \to 0 \tag{7.3}$$

необходимо для усиленного закона больших чисел.

В терминах H_r оно является наилучшим необходимым в том смысле, что для любой последовательности чисел H_r, для которой $H_r \to 0$, существует удовлетворяющая усиленному закону больших чисел последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ такая, что $|\xi_n| \leqslant n$ и $D\chi_r = H_r$.

Доказательство теоремы 7. Из неравенств

$$\sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} \frac{D\xi_n}{n^2} \leqslant H_r \leqslant 4 \sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} \frac{D\xi_n}{n^2}$$

вытекает, что (7.1) равносильно условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty. \text{*} \tag{7.4}$$

Теперь, в предположении $|\xi_n| \leqslant n$, достаточность (7.1), а следовательно, и (7.4), следует из теоремы 6 и неравенства Чебышева.

Если ξ_n — любые независимые случайные величины, то полагаем

$$\bar{\xi}_n = \xi_n - M\xi_n, \quad \text{если} \quad |\xi_n - M\xi_n| \leqslant n,$$
$$\bar{\xi}_n = 0, \quad \text{если} \quad |\xi_n - M\xi_n| > n.$$

Из (7.4) и легко проверяемого неравенства

$$D\xi_n \geqslant D\bar{\xi}_n + n^2 P\{\bar{\xi}_n \neq \xi_n - M\xi_n\}$$

находим:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\bar{\xi}_n}{n^2} < \infty$, т. е. $\bar{\xi}_n$ удовлетворяют усиленному закону больших чисел,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} P\{\bar{\xi}_n \neq \xi_n - M\xi_n\} < \infty$, т. е. последовательности $\bar{\xi}_n$ и $\xi_n - M\zeta_n$ эквивалентны, т. е., в конечном счете, что ξ_n удовлетворяют усиленному закону больших чисел.

Докажем вторую часть теоремы. Если для некоторой последовательности постоянных $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$

* В таком виде это условие было дано А. Н. Колмогоровым (1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} = \infty,$$

то в случае $b_n \leqslant cn^2$ полагаем

$$\xi_n = -n, \quad 0, \quad n$$

с вероятностями, равными соответственно

$$\frac{b_n}{2cn^2}, \quad 1 - \frac{b_n}{cn^2}, \quad \frac{b_n}{2cn^2},$$

а в случае, когда бесконечно часто $b_n > n^2$,

$$\xi_n = -\sqrt{b_n}, \quad +\sqrt{b_n}$$

с вероятностями, равными соответственно

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

В обоих случаях $D\xi_n = b_n$, но, как это следует из теоремы 5, ξ_n не удовлетворяет усиленному закону больших чисел.

Доказательство теоремы 8. Необходимость (7.3) была уже доказана мимоходом при доказательстве теоремы 6.

Для доказательства второй части теоремы положим $\xi_n = 0$, $n \neq 2^r$,

$$\xi_{2^r+1} = -2^r\sqrt{H_r}, \quad +2^r\sqrt{H_r}$$

с вероятностями, равными соответственно

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что

$$\chi_r = -\sqrt{H_r}, \quad +\sqrt{H_r}$$

с вероятностями, равными соответственно

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}.$$

Тогда $D\chi_r \to 0$, но, в силу теоремы 6 (или 2), ξ_n удовлетворяют усиленному закону больших чисел.

§ 8. В настоящем параграфе дается необходимое и достаточное условие усиленного закона больших чисел в терминах дисперсий для случая

$$|\zeta_n| = o\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right). \tag{8.1}$$

ЛЕММА 6 *. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — *независимые случайные величины*

---

* См. ([3]). Неравенства (8.2) и (8.3) составляют в ([3]) соответственно содержание лемм 2 и 3. Неравенство (8.4) может быть получено из леммы 4, которая утверждает, что если

$$\frac{xL}{B} = \omega < \frac{1}{256}, \qquad \frac{x^2}{B} = \lambda > 512,$$

то $P\{\zeta > x\} < e^{-\frac{x^2}{2B}(1+\varepsilon)}$, где $\varepsilon = \max\left[32\sqrt{\frac{\log\lambda}{\lambda}},\ 64\sqrt{\omega}\right]$. Но легко видеть, что всегда $\varepsilon < \frac{1}{4}$.

такие, что $|\xi_k| < L$ *и* $M\xi_k = 0$. *Положим* $\zeta = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$ *и* $B = D\xi$. *Тогда, если* $x > 0$, *то*

$$P\{\zeta > x\} < e^{-\frac{x^2}{4B}} \quad \text{при } xL \leqslant B; \tag{8.2}$$

$$P\{\zeta > x\} > e^{-\frac{x}{4L}} \quad \text{при } xL \geqslant B, \tag{8.3}$$

$$P\{\zeta > x\} > e^{-3\cdot\frac{x^2}{B}} \quad \text{при } \frac{xL}{B} < \frac{1}{256}, \quad \frac{x^2}{B} > 512. \tag{8.4}$$

ТЕОРЕМА 9. *Для того чтобы последовательность* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ *независимых случайных величин, подчиненных* (8.1), *удовлетворяла усиленному закону больших чисел, необходимо и достаточно условие:*

$$\sum_{r=1}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon}{H_r}} < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0. \tag{8.5}$$

Без ограничения общности можно предположить $M\xi_n = 0$. Тогда условие (6.3) теоремы 6 перепишется в виде

$$\sum_{r=1}^{\infty} P\{|\chi_r| > \varepsilon\} < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0. \tag{8.6}$$

Введем обозначения:

$$L_r = \sup_{2^r < n < 2^{r+1}} \frac{|\xi_n|}{2^r}, \quad \alpha_r = \frac{H_r}{L_r}.$$

Очевидно, $L_r = \frac{\lambda_r}{\ln r}$, где $\lambda_r \to 0$ при $r \to 0$.

При оценке суммы (8.6) оценим отдельно члены с $\alpha_r \leqslant \varepsilon$ и с $\alpha_r > \varepsilon$.

1) В условиях теоремы всегда

$$\sum_{\alpha_r \leqslant \varepsilon} P\{|\chi_r| > \varepsilon\} < \infty, \quad \sum_{\alpha_r \leqslant \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4H_r}} < \infty. \tag{8.7}$$

Действительно, если $\alpha_r \leqslant \varepsilon$, то, по (8.3), при достаточно большом r

$$P\{|\chi_r| > \varepsilon\} \leqslant 2e^{-\frac{\varepsilon}{4\lambda_r}\ln r} = 2\left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{\varepsilon}{4\lambda_r}} \leqslant \frac{2}{r^2}.$$

Так как, кроме того, при достаточно большом r

$$e^{-\frac{\varepsilon^2}{4H_r}} \leqslant e^{-\frac{\varepsilon^2}{4\varepsilon L_r}} = e^{-\frac{\varepsilon}{4\lambda_r}\ln r} \leqslant \frac{1}{r^2},$$

то оба ряда (8.7) сходятся.

2) Из 1) и (8.6) вытекает, что в условиях теоремы для усиленного закона больших чисел, необходимо и достаточно условие:

$$\sum_{\alpha_r > \varepsilon} P\{|\chi_r| > \varepsilon\} < \infty \quad \text{при любом } \varepsilon > 0. \tag{8.8}$$

Но при $\alpha_r > \varepsilon$, по (8.2),

$$P\{|\chi_r| > \varepsilon\} \leqslant 2e^{-\frac{\varepsilon^2}{4H_r}}.$$

Следовательно, условие

$$\sum_{\alpha_r > \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4H_r}} < \infty \text{ при любом } \varepsilon > 0 \tag{8.9}$$

является достаточным.

3) Условие (8.9) оказывается и необходимым. Докажем это. Пусть ξ_n удовлетворяют усиленному закону больших чисел. Тогда $H_r = o(1)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $r_0(\varepsilon)$ такое, что $\frac{\varepsilon^2}{H_r} > 512$ при $r \geqslant r_0$. Среди номеров $r \geqslant r_0$ рассмотрим те, для которых $\alpha_r > 256\varepsilon$. Для этих r [по (8.4)]

$$P\{|\chi_r| > \varepsilon\} > 2e^{-3\frac{\varepsilon^2}{H_r}}.$$

Из необходимости (8.8) следует наше утверждение:

$$\infty > \sum_{\alpha_r > 256\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{4H_r}} = \sum_{\alpha_r > \varepsilon'} e^{-\frac{\varepsilon'^2}{256^2 \cdot 4H_r}} > \sum_{\alpha_r > \varepsilon'} e^{-\frac{\varepsilon'^2}{4H_r}}.$$

1), 2) и 3) вместе доказывают теорему.

Замечание. Пусть ξ_n удовлетворяют условиям теоремы 9. Если выполнено (7.4), то (8.5) выполнено также. Обратное неверно, как показывает пример:

$$D\xi_n = \frac{n}{(\ln n)^\alpha} \quad (0 < \alpha < 1).$$

§ 9. Положим при $q \geqslant 1$

$$b^{(q)}(\xi_n) = \int |x - M\xi|^q \, dP_{\xi_n}.$$

ТЕОРЕМА 10 *. *Для того чтобы последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ независимых случайных величин удовлетворяла усиленному закону больших чисел, достаточно условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^{(2q)}(\xi_n)}{n^{q+1}} < \infty \text{ при каком-либо } q \geqslant 1. \tag{9.1}$$

Замечание. При $q = 1$ условие (9.1) превращается в достаточное условие А. Н. Колмогорова, но условие (9.1) с произвольным $q \geqslant 1$ шире последнего, как показывает пример:

$$P\left\{\xi_n = -\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^{\frac{1}{q}}}\right\} = P\left\{\xi_n = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(\log n)^{\frac{1}{q}}}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Доказательство теоремы 10. Достаточно рассмотреть случай $q > 1$. Положив

* Brunk ([2]) предполагает q целым. Мы опускаем это предположение.

$$\left.\begin{aligned}\bar{\xi}_n &= \xi_n - M\xi_n, \quad \text{если} \quad |\xi_n - M\xi_n| \leqslant n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}},\\ \bar{\xi}_n &= 0, \qquad\qquad \text{если} \quad |\xi_n - M\xi_n| > n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}},\end{aligned}\right\} \tag{9.2}$$

легко находим

$$D\xi_n \geqslant D\bar{\xi}_n, \tag{9.3}$$

$$|\bar{\xi}_n| = o\left(\frac{n}{\ln\ln n}\right), \tag{9.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\bar{\xi}_n \neq \xi_n - M\xi_n\} < \infty. \tag{9.5}$$

Последнее вытекает из (9.1), так как

$$\frac{1}{n^{q+1}}\int |x - M\xi_n|^{2q}\, dP_{\xi_n} \geqslant \frac{1}{n^{q+1}} \int\limits_{|x-M\xi_n|>n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}}} |x - M\xi_n|^{2q}\, dP_{\xi_n} \geqslant$$
$$\geqslant P\{\bar{\xi}_n \neq \xi_n - M\xi_n\}.$$

Из известных неравенств

$$b^{(2q)}(\xi_n) \geqslant [b^{(2)}(\xi_n)]^q,$$
$$|X_1 + X_2 + \cdots + X_n|^q \leqslant n^{q-1}\,(|X_1|^q + |X_2|^q + \cdots + |X_n|^q),$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — любые действительные числа, выводим:

$$H_r^q \leqslant 4^q \left[\sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} \frac{b^{(2)}(\xi_n)}{n^2}\right]^q \leqslant 4^q 2^{r(q-1)} \left[\sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} \frac{b^{(2q)}(\xi_n)}{n^{2q}}\right] \leqslant 4^q \left[\sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} \frac{b^{(2q)}}{n^{q+1}}\right],$$

т. е., в силу (9.1), $\sum_{r=1}^{\infty} H_r^q < \infty$. Из определения H_r, (9.3), (9.4), теоремы 9 и верного при достаточно больших r неравенства

$$e^{-\frac{\varepsilon}{\bar{H}_r}} \leqslant \bar{H}_r^q \leqslant H_r^q,$$

где $\bar{H}_r = \frac{1}{2^{2r}} \sum_{n>2^r}^{2^{r+1}} D\bar{\xi}_n$, следует утверждение теоремы.

В заключение выражаю благодарность А. Н. Колмогорову, под руководством которого была написана настоящая заметка.

Поступило
9. II. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н., Sur la loi forte des grands nombres, C. R. Ac. Sci. Paris, 191 (1930), 910—911.

[2] Brunk H. D., The strong law of great numbers, Duke Math. Journal, 1 (1948), 181—189.

[3] Колмогоров А. Н., Über das Gesetz des iterierten Logarithmus, Math. Ann., 109 (1928), 26—37.

[4] Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, М. — Л., 1936.

[5] Прохоров Ю. В., Об усиленном законе больших чисел, Доклады Ак. Наук СССР, 69 (1949), 607—610.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 537—548

А. А. ГУРЕВИЧ и В. А. РОХЛИН

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ИЗМЕРИМЫХ ПОТОКОВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе устанавливается возможность очень точной аппроксимации произвольного измеримого потока периодическими потоками. С помощью такой аппроксимации исследуется массивность важнейших классов измеримых потоков.

Предлагаемая работа посвящена изучению расположения важнейших классов измеримых потоков в пространстве всех измеримых потоков. Результаты во многом аналогичны уже известным результатам, касающимся отдельных преобразований с инвариантной мерой (см. ([1]), § 1 и § 4). Однако аналогия неполна: в то время как в случае отдельных преобразований с инвариантной мерой исследование может быть проведено в двух существенно различных топологиях, в пространстве измеримых потоков удается ввести только одну естественную топологию.

По поводу используемых в работе понятий теории меры (пространство Лебега, мера Лебега, изоморфизм и т. п.) см. ([2]), §§ 1 и 2.

Основные результаты этой работы были опубликованы в ([3]).

§ 1. Основные определения. Теорема о представлении

В этом параграфе мы кратко изложим необходимые для дальнейшего определения и факты теории измеримых потоков. Подробное изложение читатель найдет в ([1]), §§ 5 и 6.

Говорят, что в пространстве Лебега M с мерой μ задан п о т о к $\{S_t\}$, если каждому вещественному числу t поставлен в соответствие определенный автоморфизм пространства M (т. е. изоморфное отображение пространства M на все M), S_t, таким образом, что для любой точки $x \in M$ и любых значений s, t

$$S_s S_t x = S_{s+t} x.$$

Поток называется и з м е р и м ы м, если, каково бы ни было измеримое множество $A \subset M$, множество тех точек (x, t) теоретико-множественного произведения $M \times (t)$ множества M на числовую прямую (t), для которых $S_t x \in A$, измеримо относительно меры, естественно возникающей в $M \times (t)$ из меры μ в M и обычной меры Лебега в (t).

Множество точек $S_t x \, (-\infty < t < +\infty)$ называется т р а е к т о р и е й точки $x \in M$. Множества, состоящие из целых траекторий, называются и н в а р и а н т н ы м и. Точка x называется н е п о д в и ж н о й, если все точки $S_t x$ тождественны между собой, т о ч к о й а п е р и о д и ч н о с т и,

если все точки $S_t x$ различны между собой, и точкой периодичности с периодом $p = p(x)$, если при $0 \leqslant t < p$ все точки $S_t x$ различны между собой, а при $q \equiv r \pmod p$ всегда $S_q x = S_r x$. Для измеримого потока все три множества — множество неподвижных точек, множество точек апериодичности и множество точек периодичности — измеримы и вместе покрывают почти все пространство M. Функция $p(x)$ также измерима. Указанные три множества, конечно, инвариантны. На первом из них поток не заслуживает никакого изучения. Структура потока на втором и третьем множествах весьма глубоко вскрывается принадлежащей в основных чертах В. Амброзе и С. Какутани теоремой о представлении. Мы приведем эту теорему в несколько усиленной формулировке, притом отдельно для всюду апериодических, или, как мы будем говорить просто, апериодических потоков, и отдельно для всюду периодических потоков.

Условимся называть ненормированной мерой Лебега меру, которая отличается от меры Лебега только не равным единице числовым множителем, и предположим, что заданы:

пространство Y с нормированной или ненормированной мерой Лебега ν;

автоморфизм T пространства Y;

измеримая вещественная функция F точки $y \in Y$, удовлетворяющая условиям:

$$\int\limits_Y F(y)\, d\nu = 1, \quad F(y) \geqslant \text{const} > 0.$$

Условимся обозначать через u вещественное переменное, через $Y \times (u)$ — снабженное естественной мерой $\hat\nu$ произведение пространства Y на числовую прямую (u), через $\hat Y$ — подпространство пространства $Y \times (u)$, состоящее из тех точек (y, u), для которых $0 \leqslant u < F(y)$, и положим:

$$T_t(y, u) = \begin{cases} (y,\ u + t) & \text{при } -u \leqslant t < -u + F(y) \\ (T^n y, u + t - F(y) - \cdots - F(T^{n-1} y)) & \\ \text{при} -u + \sum\limits_{k=0}^{n-1} F(T^k y) \leqslant t < -u + \sum\limits_{k=0}^{n} F(T^k y), & n = 1, 2, \ldots \\ (T^{-n} y, u + t + F(T^{-1} y) + \cdots + F(T^{-n} y)) & \\ \text{при} -u - \sum\limits_{k=1}^{n} F(T^{-k} y) \leqslant t < -u - \sum\limits_{k=1}^{n-1} F(T^{-k} y), & n = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{1}$$

Очевидно, $\hat Y$ есть пространство Лебега (с нормированной мерой: $\hat\nu \hat Y = 1$), и нетрудно показать, что $\{T_t\}$ есть измеримый поток в $\hat Y$. Он называется специальным потоком, построенным по автоморфизму T и функции F. Он апериодичен в том и только в том случае, если апериодичен автоморфизм T, т. е. если для всякой точки $y \in Y$ все точки $T^n y$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ различны между собой. Очевидно также, что периоды потока $\{T_t\}$ во всех точках ограничены снизу одним и тем же положительным числом. Теорема о представлении гласит:

а) *Всякий апериодический поток изоморфен некоторому специальному потоку.* Последний всегда можно выбрать так, чтобы функция F, по

которой он построен, была ограничена и даже удовлетворяла неравенству вида

$$\tau \leqslant F(y) < 2\tau, \tag{2}$$

где τ — положительное число.

b) *Всякий поток, который во всех точках пространства M периодичен и имеет периоды, ограниченные снизу одним и тем же положительным числом, изоморфен специальному потоку. Последний всегда можно выбрать так, чтобы автоморфизм, по которому он построен, был тождественным преобразованием.*

Второе из этих предложений дает исчерпывающую характеристику произвольного всюду периодического потока. Особенно простым является тот случай, когда поток просто периодичен, т. е. имеет во всех точках один и тот же период p. В этом случае функция F, по которой построен указанный в теореме b) специальный поток (1), тождественно равна p, так что структура потока всецело определяется структурой пространства Y. Если, в частности, поток не имеет траекторий положительной меры, то пространство Y не имеет точек положительной меры, и его метрический тип, а вместе с ним и метрический тип потока, определяется числом p. Периодические потоки, все траектории которых имеют меру нуль, мы будем называть стандартными. Из изложенного следует, что *все стандартные потоки с данным периодом p изоморфны между собой.*

§ 2. Перестройка специального потока

Если автоморфизм T пространства Лебега M апериодичен, то для всякого натурального числа n и всякого положительного числа ε существует измеримое множество $X \subset M$, не пересекающееся ни с одним из своих образов $TX, T^2X, \ldots, T^{n-1}X$ и имеющее меру, большую $\frac{1-\varepsilon}{n}$. Эту теорему, доказательство которой читатель найдет в (¹) [см. (¹), § 1, п. 7], мы хотим перенести в этом параграфе на апериодические потоки.

Условимся говорить, что специальный поток (1) обладает свойством (p, ε), если интеграл функции F по множеству тех точек $y \in Y$, в которых $F(y) \neq p$, меньше ε. Наша теорема утверждает, что *для всякого апериодического потока $\{S_t\}$ при любых положительных p и ε существует изоморфный ему специальный поток, удовлетворяющий условию (p, ε).*

Доказательство. Пусть (1) — какой-нибудь специальный поток, изоморфный потоку $\{S_t\}$ и удовлетворяющий условию (2). Мы перестроим поток (1) в новый специальный поток $\{T'_t\}$, изоморфный потоку (1) и удовлетворяющий условию (p, ε).

Положим

$$f_n(y) = \sum_{k=0}^{n-1} F(T^k y).$$

В силу эргодической теоремы, последовательность функций $\frac{1}{n} f_n$ схо-

дится в среднем к некоторой инвариантной относительно T измеримой функции f. В силу (2), мы имеем:

$$\tau \leqslant f(y) < 2\tau. \tag{3}$$

Возьмем какое-нибудь натуральное число m, удовлетворяющее неравенству

$$m > \frac{12}{\varepsilon}, \tag{4}$$

положим

$$\tau_i = \tau + \frac{i}{m}\tau \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{5}$$

и обозначим через Y_i множество тех точек $y \in Y$, в которых

$$\tau_i \leqslant f(y) < \tau_{i+1}. \tag{6}$$

Так как из сходимости последовательности $\frac{1}{n} f_n$ в среднем следует ее сходимость по мере, то существует столь большое N, что при $n > N$ во всех точках $y \in Y$, не принадлежащих к некоторому исключительному множеству E, для которого

$$\nu(E \cdot Y_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \nu Y_i \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{7}$$

имеет место неравенство

$$\left| \frac{1}{n} f_n(y) - f(y) \right| < \frac{\varepsilon\tau}{12}. \tag{8}$$

Взяв такое N, выберем столь большое натуральное число q, чтобы имели место неравенства

$$n_i = \left[\frac{pq}{\tau_i - \frac{\varepsilon\tau}{6}} \right] + 1 > \max\left(N, \frac{12}{\varepsilon}\right) \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{9}$$

Очевидно, мы вправе считать, что $\varepsilon < 6$ и что, следовательно, $\tau_i - \frac{\varepsilon\tau}{6} > 0$. Y_i суть попарно непересекающиеся и покрывающие Y инвариантные измеримые множества, и автоморфизмы, индуцируемые в них автоморфизмом T, апериодичны. К ним применима, таким образом, теорема, формулированная в начале этого параграфа: существует измеримое множество $X_i \subset Y_i$ с мерой

$$\nu X_i \geqslant \frac{\nu Y_i}{n_i} - \frac{\varepsilon}{12} \cdot \frac{\nu Y_i}{n_i}, \tag{10}$$

не пересекающееся ни с одним из множеств

$$TX_i, \ldots, T^{n_i - 1} X_i. \tag{11}$$

При этом мы вправе считать, что

$$\nu(E \cdot X_i) \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \cdot \frac{\nu Y_i}{n_i}, \tag{12}$$

ибо если неравенство (12) не выполнено для множества X_i, то, в силу (7), оно непременно выполнено для одного из множеств (11), а X_i можно заменить любым из этих множеств.

Положим $A_i = X_i - E \cdot X_i$. Множества A_i будут играть в нашем построении основную роль. Мы утверждаем, что на A_i

$$\frac{\varepsilon\tau}{12} n_i < f_{n_i}(y) - pq < \frac{2\varepsilon\tau}{3} n_i \quad (y_i \in A_i). \tag{13}$$

Действительно,

$$f_{n_i}(y) - pq = (f_{n_i}(y) - n_i f(y)) + (n_i f(y) - n_i \tau_i) + (n_i \tau_i - pq), \tag{14}$$

причем, в силу неравенства $n_i > N$ [см. (9)] и выбора числа N [см. (8)],

$$-\frac{\varepsilon\tau}{12} n_i < f_{n_i}(y) - n_i f(y) < \frac{\varepsilon\tau}{12} n_i \quad (y_i \in A_i), \tag{15}$$

в силу (4),

$$0 \leqslant n_i f(y) - n_i \tau_i < \frac{\tau_i}{m} n_i \leqslant \frac{2\tau}{m} n_i < \frac{\varepsilon\tau}{6} n_t \quad (y \in Y_i) \tag{16}$$

[см. (5) и (6)] и, в силу (9),

$$\frac{\varepsilon\tau}{6} n_i < n_i \tau_i - pq < \frac{\varepsilon\tau}{6} n_i + \tau_i \leqslant \frac{\varepsilon\tau}{6} n_i + 2\tau < 2\,\frac{\varepsilon\tau}{6} n_i. \tag{17}$$

Из (14), (15), (16) и (17) следует (13).

Теперь мы можем построить нужный нам специальный поток $\{T'_t\}$. Возьмем $q+1$ экземпляров

$$A_i^0 = A_i,\ A_i^1, \ldots,\ A_i^{q-1},\ A_i^q$$

множества A_i, связанных в циклическом порядке какими-нибудь изоморфными отображениями $R_i^{(l)}$:

$$A_i^0 \underset{R_i^{(0)}}{\rightarrow} A_i^1 \underset{R_i^{(1)}}{\rightarrow} \cdots \rightarrow A_i^{q-1} \underset{R_i^{(q-1)}}{\rightarrow} A_i^q \underset{R_i^{(q)}}{\rightarrow} A_i$$

и положим

$$B_i = \bigcup_{k=0}^{n_i-1} T^k (E \cdot X_i), \qquad C_i = Y_i - \bigcup_{k=0}^{n_i-1} T^k X_i,$$

$$D = \bigcup_{i=0}^{m-1} (A_i^q + B_i + C_i), \quad Y' = \bigcup_{i=0}^{m-1} \left(B_i + C_i + \bigcup_{l=0}^{q} A_i^l\right).$$

Мы будем считать, что каждое из множеств A_i^l. B_i, C_i входит в множество Y' со своей естественной мерой. Тем самым в Y' возникает определенная мера ν'. Пусть

$$T'y' = \begin{cases} R_i^{(l)} y', & \text{если } y' \in A_i^l,\ l = 0, 1, \ldots, q-1; \\ T^{m_i} R_i^{(q)} y', & \text{если } y' \in A_i^q; \\ Ty, & \text{если } y' = y \in B_i + C_i \end{cases}$$

и

$$F'(y') = \begin{cases} p, \text{ если } y' \in A_i^l, \ l = 0, 1, \ldots, q-1; \\ f_{n_i}(R_i^{(q)} y') - pq, \text{ если } y' \in A_i^q; \\ F(y), \text{ если } y' = y \in B_i + C_i. \end{cases}$$

Из построения видно, что T' есть автоморфизм пространства Y' с мерой ν', что функция F' удовлетворяет условиям

$$\int_{Y'} F'(y')\, d\nu' = \int_Y F(y)\, d\nu = 1, \quad F'(y') \geqslant \text{const} > 0$$

[см. первое из неравенств (13)] и что специальный поток $\{T_t'\}$, построенный по автоморфизму T' и функции F', изоморфен потоку (1). Мы покажем — и этим доказательство будет завершено, что

$$\int_D F'(y')\, d\nu' < \varepsilon. \tag{18}$$

Так как множества $A_i, TA_i, \ldots, T^{n_i-1}A_i$ попарно не пересекаются, имеют одинаковые меры и содержатся в Y_i, то $n_i \cdot \nu A_i \leqslant \nu Y_i$ и, в силу (13),

$$\int_{A_i^q} F'(y')\, d\nu' = \int_{A_i} (f_{n_i}(y) - pq)\, d\nu < \frac{2\varepsilon\tau}{3} n_i \cdot \nu A_i \leqslant \frac{2\varepsilon\tau}{3} \cdot \nu Y_i. \tag{19}$$

Далее, в силу (12) и (10),

$$\nu B_i \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \cdot \nu Y_i, \quad \nu C_i \leqslant \frac{\varepsilon}{12} \cdot \nu Y_i$$

и, следовательно,

$$\int_{B_i + C_i} F'(y')\, d\nu' = \int_{B_i + C_i} F(y)\, d\nu < 2\tau \cdot \nu(B_i + C_i) \leqslant \frac{\varepsilon\tau}{3} \cdot \nu Y_i. \tag{20}$$

Из (19) и (20) мы получаем:

$$\int_D F'(y')\, d\nu' = \sum_{i=0}^{m-1} \left(\int_{A_i^q} F'(y')\, d\nu' + \int_{B_i + C_i} F'(y')\, d\nu' \right) <$$

$$< \varepsilon\tau \sum_{i=0}^{m-1} \nu Y_i = \varepsilon\tau \cdot \nu Y. \tag{21}$$

Но, в силу (2),

$$\tau \cdot \nu Y \leqslant \int_Y F(y)\, d\nu = 1,$$

так что из (21) следует (18).

§ 3. Аппроксимационная теорема

Пусть $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ — два измеримых потока, определенных в одном и том же пространстве Лебега M. Обозначим через $D(\{S_t\}, \{T_t\})$ множество тех точек $x \in M$, для которых $S_t x \neq T_t x$ *хотя бы при одном значении*

в интервале $0 < t \leqslant 1$. Простые примеры показывают, что это множество может быть неизмеримо; обозначим ее внешнюю меру $\mu_e D(\{S_t\}, \{T_t\})$ через $d(\{S_t\}, \{T_t\})$. Очевидно, что

$$d(\{S_t\}, \{T_t\}) = d(\{T_t\}, \{S_t\}).$$

Далее, каков бы ни был измеримый поток $\{R_t\}$,

$$d(\{R_t\}, \{T_t\}) \leqslant d(\{R_t\}, \{S_t\}) + d(\{S_t\}, \{T_t\}),$$

ибо

$$D(\{R_t\}, \{T_t\}) \subset D(\{R_t\}, \{S_t\}) + D(\{S_t\}, \{T_t\}).$$

Наконец, нетрудно проверить, что если $d(\{S_t\}, \{T_t\}) = 0$, то потоки $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$ принадлежат к одному и тому же метрическому классу, т. е. могут отличаться друг от друга только на (инвариантном относительно них обоих) множестве меры нуль. Таким образом, функция d определяет в множестве $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(M)$ классов всех определенных в M измеримых потоков метрику, т. е. превращает $\mathfrak{S}$ в метрическое пространство. Это пространство полно (доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы об автоморфизмах: см. [1], § 1, п. 5), но несепарабельно. Существенным, хотя и вполне очевидным свойством метрики d является ее инвариантность: каковы бы ни были автоморфизм R и потоки $\{S_t\}$ и $\{T_t\}$,

$$d(\{RS_tR^{-1}\}, \{RT_tR^{-1}\}) = d(\{S_t\}, \{T_t\}).$$

Аппроксимационная теорема. *Каковы бы ни были апериодический поток $\{T_t\}$ и положительные числа p и ε, существует такой стандартный поток $\{P_t\}$ с периодом p, что* $d(\{T_t\}, \{P_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon$.

Доказательство. В силу результатов § 2, мы можем считать, что заданный нам поток $\{T_t\}$ есть специальный поток (1), удовлетворяющий условию (p, ε). Обозначим через A множество тех точек $(y, u) \in \hat{Y}$, для которых $F(y) = p$, и через B — множество тех точек $(y, u) \in A$, для которых $u \geqslant p - 1$; построим в множестве $\hat{Y} - A$ какой-нибудь стандартный поток $\{R_t\}$ с периодом p и положим:

$$P_t(y, u) = \begin{cases} \left(y, u + t - \left[\frac{u+t}{p}\right] p\right), & \text{если } (y, u) \in A, \\ R_t(y, u), & \text{если } (y, u) \in \hat{Y} - A. \end{cases}$$

$\{P_t\}$ есть стандартный поток с периодом p, и очевидно, что

$$D(\{T_t\}, \{P_t\}) \subset B + (\hat{Y} - A).$$

Но

$$\hat{\nu} B \leqslant \frac{1}{p}, \quad \hat{\nu}(\hat{Y} - A) = \int_{F(y) \neq p} F(y)\, d\nu < \varepsilon,$$

следовательно,

$$d(\{T_t\}, \{P_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon.$$

Заметим сейчас же, что доказанная теорема не может быть усилена: *каковы бы ни были апериодический поток* $\{S_t\}$ *и периодический поток* $\{P_t\}$ *с периодом* p, *имеет место неравенство*

$$d(\{S_t\}, \{P_t\}) \geqslant \frac{1}{p}.$$

Более того: *пусть* $\{T_t\}$ — *произвольный измеримый поток, и* E_p — *совокупность тех точек* $x \in M$, *в которых он периодичен и его период* $p(x)$ *удовлетворяет неравенству* $p(x) \leqslant p$. *Тогда для всякого апериодического потока* $\{S_t\}$

$$d(\{S_t\}, \{T_t\}) \geqslant \frac{\mu E_p}{p}. \tag{22}$$

Доказательство. Обозначим через C_x множество тех значений t, при которых $T_t x \in D(\{S_t\}, \{T_t\})$. Мы утверждаем, что если $x \in E_p$, то C_x содержит целый числовой отрезок длины 1. Действительно, в противном случае мы могли бы соединить значения $t = 0$ и $t = p(x)$ конечной последовательностью не принадлежащих к C_x значений $t_0 = 0 < t_1 < < t_2 < \ldots < t_m = p(x)$, в которой $t_i - t_{i-1} < 1$ и, перемещаясь по этой последовательности, мы нашли бы:

$$S_{t_1}x = T_{t_1}x,\ S_{t_2}x = T_{t_2}x, \ldots,\ S_{p(x)}x = T_{p(x)}x = x,$$

что противоречит апериодичности потока $\{S_t\}$.

Возьмем положительное число α и обозначим через E_p^α (измеримое) множество тех точек $x \in E_p$, в которых $p(x) \geqslant \alpha$. На основании теоремы о представлении (см. § 1) мы можем считать, что поток, индуцируемый потоком $\{T_t\}$ в E_p^α, есть специальный поток (1), а автоморфизм T, по которому этот специальный поток построен, есть тождественное преобразование пространства $\hat{Y}$. Отрезки $y = \text{const}$ будут траекториями потока, и для функции F мы будем иметь: $F(y) = p((y, u)) \leqslant p$. Конечно, все это имеет смысл только в том случае, если $\mu E_p^\alpha > 0$, и предварительно мы должны нормировать меру μ, рассматриваемую на E_p^α; это значит, что для всякого множества $A \subset E_p^\alpha = \hat{Y}$ имеет место равенство

$$\hat{\nu} A = \frac{\mu A}{\mu E_p^\alpha}.$$

Рассмотрим в $\hat{Y}$ произвольное измеримое множество $D' \supset D(\{S_t\}, \{T_t\}) \cdot E_p^\alpha$. Пусть D'_{y_0} — пересечение множества D' с отрезком $y = y_0$, и λ_{y_0} — обычная мера Лебега на этом отрезке. В силу доказанного выше, для всех точек $y \in Y$ должно быть $\lambda_y D'_y \geqslant 1$, и потому

$$\hat{\nu} D' = \int_Y \lambda_y D'_y d\nu \geqslant \int_Y 1 \cdot d\nu \geqslant \frac{1}{p} \int_Y F(y)\, d\nu = \frac{1}{p}.$$

Таким образом,

$$\mu D' = \hat{\nu} D' \cdot \mu E_p^\alpha \geqslant \frac{\mu E_p^\alpha}{p}$$

и

$$\mu_e D(\{S_t\}, \{T_t\}) \geqslant \mu_e (D(\{S_t\}, \{T_t\}) \cdot E_p^\alpha) \geqslant \frac{\mu E_p^\alpha}{p}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\alpha \to 0$, мы и получим неравенство (22).

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех апериодических потоков и через $\mathfrak{P}_p$ — множество всех периодических потоков с периодом p. Мы доказали, что для всякого потока $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$

$$d(\{S_t\}, \mathfrak{P}_p) = \frac{1}{p} \tag{23}$$

и что это равенство остается справедливым, если заменить в нем $\mathfrak{P}_p$ множеством одних только стандартных потоков с периодом p. Далее, мы доказали, что для всякого потока $\{T_t\} \in \mathfrak{S}$

$$d(\{T_t\}, \mathfrak{N}) \geqslant \frac{\mu E_p}{p}. \tag{24}$$

Из равенства (24) следует, что *множество $\mathfrak{N}$ замкнуто и является, таким образом, полным метрическим пространством.* Далее, из (23) следует, что $\mathfrak{N}$ *нигде не плотно в* $\mathfrak{S}$; впрочем, последнее можно было бы доказать и значительно проще. Заметим еще, что множество $\bigcup \mathfrak{P}_t$, где суммирование распространено на любое компактное множество значений t, также замкнуто и нигде не плотно в $\mathfrak{S}$, и то же относится к множеству $\mathfrak{N} + \bigcup\limits_{-\infty < t < +\infty} \mathfrak{P}_t$. Зато множество всех потоков, не имеющих апериодической компоненты, всюду плотно в $\mathfrak{S}$. Доказательство не представляет труда.

Покажем в заключение, что *множество потоков, изоморфных любому потоку $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$, всюду плотно в $\mathfrak{N}$.* Пусть $\{T_t\}$ — произвольный поток из $\mathfrak{N}$. В силу нашей аппроксимационной теоремы, существуют такие стандартные потоки $\{P_t\}$ и $\{Q_t\}$ с периодом p, что

$$d(\{S_t\}, \{P_t\}) < \frac{2}{p}, \quad d(\{T_t\}, \{Q_t\}) < \frac{2}{p}.$$

Далее, так как все стандартные потоки с периодом p изоморфны между собой, то можно указать такой автоморфизм R пространства M, что $Q_t = RP_tR^{-1}$. Мы имеем:

$$d(\{RS_tR^{-1}\}, \{T_t\}) \leqslant d(\{RS_tR^{-1}\}, \{RP_tR^{-1}\}) + d(\{RP_tR^{-1}\}, \{T_t\}) =$$
$$= d(\{S_t\}, \{P_t\}) + d(\{Q_t\}, \{T_t\}) < \frac{4}{p}.$$

В силу произвольности p, отсюда следует, что поток $\{T_t\}$ является предельным для множества потоков, изоморфных потоку $\{S_t\}$.

§ 4. Перемешивания в пространстве $\mathfrak{N}$

Поток $\{S_t\}$ называется перемешиванием, если для любых двух измеримых множеств $A, B \subset M$

$$\mu(S_t A \cdot B) \to \mu A \cdot \mu B \quad (t \to \infty),$$

и перемешиванием в широком смысле, если при любых A, B

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\mu(S_t A \cdot B) - \mu A \cdot \mu B)^2 \, dt \to 0 \quad (\tau \to \infty)$$

см. ([1]), § 5, п. 9]. Множество перемешиваний в широком смысле мы обозначим через $\mathfrak{M}_0$, множество перемешиваний в собственном смысле — через $\mathfrak{M}_1$. Мы имеем

$$\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1.$$

Хорошо известно, что множества $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$ не пусты [см., например, ([4]), § 10]. В силу последней теоремы предыдущего параграфа, отсюда сразу следует, что оба они всюду плотны в $\mathfrak{N}$. Мы утверждаем, что

(А) $\mathfrak{M}_0$ *есть* G_δ, *так что* $\mathfrak{N} - \mathfrak{M}_0$ *имеет в* $\mathfrak{N}$ *первую категорию*;

(В) $\mathfrak{M}_1$ *имеет в* $\mathfrak{N}$ *первую категорию*.

Доказательство теоремы (А) дословно совпадает с доказательством соответствующей теоремы об автоморфизмах [см. ([1]), § 4, п. 4] и потому здесь не приводится. Напротив, доказательство теоремы (В) проводится для потоков несколько иначе, чем для автоморфизмов [см. ([1]), § 4, п. 5], и мы приводим его полностью. В дальнейшем через $\rho(X, X')$ обозначается расстояние между измеримыми множествами X, X':

$$\rho(X, X') = \mu(X + X' - X \cdot X').$$

Лемма. *Пусть E — измеримое множество в M, p и δ — положительные числа, а $\mathfrak{Q}_p(E, \delta)$ — множество тех потоков $\{Q_t\} \in \mathfrak{N}$, для которых*

$$\rho(Q_p E, E) < \delta. \tag{25}$$

Для всякого потока $\{T_t\} \in \mathfrak{N}$

$$d(\{T_t\}, \mathfrak{Q}_p(E, \delta)) \leqslant \frac{1}{p}.$$

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число. В силу результатов § 2, мы можем считать, что заданный нам поток $\{T_t\}$ есть специальный поток (1), удовлетворяющий условию (p, ε); обозначим через Y' множество тех точек $y \in Y$, в которых $F(y) = p$, через A — множество тех точек $(y, u) \in \hat{Y}$, для которых $y \in Y'$, и через B — множество тех точек $(y, u) \in A$, для которых $u \geqslant p - 1$. Из определения меры $\hat{\nu}$ следует

существование для множества $E \cdot A$ такого измеримого множества $H \subset A$ вида

$$H = \bigcup_{i=1}^{r} Y_i \times C_i,$$

где Y_i — измеримые (относительно ν) попарно не пересекающнеся множества в Y', а C_i — подмножества интервала $0 \leqslant u < p$, что

$$\rho(E \cdot A, H) < \frac{\delta}{2}.$$

Пусть Q — какой-нибудь апериодический автоморфизм множества Y', оставляющий инвариантными все множества Y_i, и $\{Q_t\}$ — поток, который на множестве A строится по автоморфизму Q и функции $F(y) \equiv p$ $(y \in Y')$ как специальный поток, а на множестве $\hat{Y} - A$ определяется как произвольный апериодический поток, оставляющий инвариантным множество $E - E \cdot A$. Очевидно, что

$$Q_p(Y_i \times C_i) = Y_i \times C_i \quad (i = 1, \ldots, r);$$

следовательно, $Q_p H = H$, и

$$\rho(Q_p E, E) = \rho(Q_p(E \cdot A), E \cdot A) \leqslant \rho(Q_p(E \cdot A), Q_p H) + \rho(H, E \cdot A) =$$
$$= 2\rho(E \cdot A, H) < \delta.$$

Таким образом, $\{Q_t\} \in \mathfrak{D}_p(E, \delta)$. Наконец,

$$D(\{T_t\}, \{Q_t\}) \subset B + (\hat{Y} - A),$$

и так как

$$\hat{\nu} B \leqslant \frac{1}{p}, \quad \hat{\nu}(\hat{Y} - A) = \int_{F(y) \neq p} F(y)\, d\nu < \varepsilon,$$

то

$$d(\{T_t\}, \{Q_t\}) < \frac{1}{p} + \varepsilon.$$

Доказательство теоремы (B). Пусть E — какое-нибуь измеримое множество в M меры $\frac{1}{2}$, и $\mathfrak{E}_p$ — множество тех потоков $\{S_t\} \in \mathfrak{N}$, для которых

$$\left| \mu(S_p E \cdot E) - \frac{1}{4} \right| \leqslant \frac{1}{5}.$$

Положим

$$\mathfrak{E}'_n = \bigcap_{p=n+1}^{\infty} \mathfrak{E}_p, \quad \mathfrak{E}' = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{E}'_n,$$

где p пробегает все вещественные, а n — только целочисленные значения. Очевидно, $\mathfrak{E}' \supset \mathfrak{M}_1$; следовательно, теорема будет доказана, если мы обнаружим, что $\mathfrak{E}'_n$ суть нигде не плотные множества.

Так как все $\mathfrak{E}_p$ замкнуты, то и все $\mathfrak{E}_n$ замкнуты, и нужно только установить, что при любом n дополнение

$$\mathfrak{N} - \mathfrak{E}'_n = \bigcup_{p=n+1}^{\infty} (\mathfrak{N} - \mathfrak{E}_p)$$

множества $\mathfrak{E}'_n$ всюду плотно в $\mathfrak{N}$. Заметим для этого, что если $\{Q_t\} \in \mathfrak{D}_p\left(E, \frac{1}{10}\right)$, то, в силу соотношения

$$\rho(Q_pE \cdot E) = \mu(Q_pE - Q_pE \cdot E) + \mu(E - E \cdot Q_pE) = 2(\mu E - \mu(Q_pE \cdot E))$$

и соотношений

$$\mu E = \frac{1}{2}, \quad \rho(Q_pE \cdot E) < \frac{1}{10}$$

[см. (25)], должно иметь место неравенство

$$\mu(Q_pE \cdot E) - \frac{1}{4} > \frac{1}{5}.$$

Это неравенство показывает, что $\mathfrak{D}_p\left(E, \frac{1}{10}\right) \subset \mathfrak{N} - \mathfrak{E}_p$ и что, следовательно, множество

$$\mathfrak{D}'_n = \bigcup_{p=n+1}^{\infty} \mathfrak{D}_p\left(E, \frac{1}{10}\right),$$

которое, в силу только что доказанной леммы, всюду плотно в $\mathfrak{N}$, содержится в $\mathfrak{N} - \mathfrak{E}'_n$. Этим теорема доказана.

Вместе теоремы (A) и (B) показывают, что *в пространстве $\mathfrak{N}$ основную массу потоков составляют перемешивания в широком смысле, не являющиеся перемешиваниями в собственном смысле.*

Поступило
13. X. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рохлин В. А., Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 2 (1949), 57—128.
[2] Рохлин В. А., Об основных понятиях теории меры, Мат. сб., 25 (67): 1 (1949), 107—150.
[3] Гуревич А. и Рохлин В., Об аппроксимации непериодических потоков периодическими, Доклады Наук СССР, т. XIV, № 5 (1949), 619—620.
[4] Хопф Э., Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны, Успехи матем. наук, т. IV, вып. 2 (1949) 129—170.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 549—568

Ф. Д. ГАХОВ

ОДИН СЛУЧАЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ СИСТЕМЫ n ПАР ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

Для частного случая матрицы коэффициентов при помощи теории линейных преобразований строится каноническая система решений и по ней общее решение задачи. Устанавливается, что частные индексы задачи равны показателям элементарных делителей матрицы относительно бесконечно удаленной точки. Исследуется особый случай, когда определитель матрицы коэффициентов обращается на контуре в нуль.

§ 1. Постановка задачи и некоторые сведения о ней

Пусть L — контур, состоящий из некоторого числа простых замкнутых гладких кривых, ограничивающих связную область S^+ и дополнительную к ней область S^-. Области, как всегда, рассматриваются открытые, т. е. контур не причисляется к ним. Для определенности будем в дальнейшем предполагать, что начало координат лежит в области S^+, а бесконечно удаленная точка — в области S^-.

Под краевой задачей Римана для системы n пар функций * понимается следующая задача:

Определить n пар функций $\varphi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$ $(i=1, 2, \ldots n)$, голоморфных соответственно в областях S^+, S^-, предельные значения которых на контуре L непрерывны и удовлетворяют следующим линейным соотношениям:

$$\varphi_i^+(t) = a_{i1}(t)\,\varphi_1^-(t) + \cdots + a_{in}(t)\,\varphi_n^-(t) + b_i(t), \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$ — заданные функции комплексных координат t точек контура, которые будем считать удовлетворяющими условиям Гельдера и дополнительному условию, что определитель $|\,a_{ij}(t)\,| \neq 0$.

Если $b_i(t) = 0$, то мы будем иметь однородную задачу, если $b_i(t) \neq 0$ — неоднородную.

Для краткости, следуя Н. И. Мусхелишвили ([2]), будем называть совокупность n пар функций, удовлетворяющих задаче, кусочно голоморфным вектором и обозначать просто через $\varphi(z)$, считая, что этот вектор в области S^+ имеет составляющие $\varphi_1^+(z), \ldots, \varphi_n^+(z)$, а в области S^- — составляющие $\varphi_1^-(z), \ldots, \varphi_n^-(z)$.

---

* В монографии Н. И. Мусхелишвили([2]), вопреки общепринятому ранее обозначению, эта задача называется без достаточных оснований задачей Гильберта.

Обозначая матрицу коэффициентов $\|a_{ij}(t)\|$ через $A(t)$, а вектор с составляющими $b_i(t)$ — через $b(t)$, можно краевое условие в матричной форме записать так:

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t). \tag{1'}$$

Задача (1) была поставлена Риманом в работе о дифференциальных уравнениях с алгебраическими коэффициентами в связи с задачей построения линейного дифференциального уравнения, интегралы которого при обходе около заданных точек претерпевают заданную линейную подстановку (уравнение с заданной группой монодромии). В постановке Римана контур есть простая замкнутая кривая, проходящая через заданные точки (особые точки дифференциального уравнения). Существенным обстоятельством является то, что здесь искомые функции могут обращаться в бесконечность некоторого конечного порядка в этих точках.

В такой постановке задача была полностью решена сначала Гильбертом сложным способом, а затем Племели при помощи интегралов типа Коши, формулы для предельных значений которых он тут же вывел. Этим самым была полностью решена задача Римана о существовании дифференциального уравнения с заданной группой монодромии. Неоднородная задача (1) впервые была рассмотрена в работе автора ([1]).

Краевая задача Римана оказалась на переднем плане в последнем десятилетии. После того как была полностью решена задача для одной пары функций и на основе этого решения была построена законченная теория сингулярных интегральных уравнений с главным значением интеграла типа Коши, взоры естественно обратились к краевой задаче Римана для системы, так как последняя находится в таком же отношении к системе сингулярных интегральных уравнений, как задачи Римана для одной пары функций к одному сингулярному уравнению.

Интересующей нас задаче посвящена большая работа Н. И. Мусхелишвили ([2]). Метод исследования, изложенный там, тот же, что и у Племели, но самое исследование значительно глубже. Используя интегралы типа Коши, Мусхелишвили и Векуа построили некоторую систему интегральных уравнений Фредгольма, которой удовлетворяют решения краевой задачи, и из решений этой системы построили n решений, составляющих так называемую каноническую систему. Основные свойства этой системы следующие:

1. Определитель системы нигде на конечном расстоянии не обращается в нуль.

2. Порядок этого определителя на бесконечности точно равен сумме порядков отдельных решений*.

Важность канонической системы решений определяется тем, что, имея каноническую систему решений, можно:

1) дать общее решение однородной задачи в виде линейной комбинации составляющих решений с полиноминальными коэффициентами;

---

* Под порядком решения на бесконечности понимается наивысшая степень z в разложении всех функций, составляющих решение, в бесконечно удаленной точке.

2) построить общее решение неоднородной задачи при помощи одних квадратур.

Порядки на бесконечности решений канонической системы с обратными знаками, играющие важнейшую роль, авторы назвали *частными индексами* задачи.

Решающее значение частных индексов определяется двумя фактами:

1. Однородная задача разрешима, если среди частных индексов имеется хотя бы один положительный, причем число линейно независимых решений однородной и неоднородной задач равно сумме положительных частных индексов.

2. Если все частные индексы положительны, то неоднородная задача разрешима при любых свободных членах; если же среди частных индексов имеются отрицательные, то для разрешимости неоднородной задачи свободные члены должны удовлетворять некоторым условиям, число которых равно сумме абсолютных величин отрицательных частных индексов.

Авторы получили явное выражение для суммы частных индексов. Величина эта, которую они назвали суммарным индексом, равна индексу Коши* определителя матрицы коэффициентов. Это есть безусловно важнейший результат работы. Имея величину суммарного индекса, можно сделать некоторые заключения о разрешимости и о числе решений задачи. Например, если суммарный индекс равен $\varkappa > 0$, то можно сделать вывод, что однородная задача в этом случае разрешима и имеет не менее чем $\varkappa$ линейно независимых решений. Но о разрешимости неоднородной задачи по одному только суммарному индексу никаких заключений сделать нельзя. Если суммарный индекс отрицателен, то вообще никаких выводов ни о разрешимости, ни о числе решений как однородной, так и неоднородной задачи сделать нельзя. Только знание всех частных индексов позволяет иметь полное суждение о разрешимости или неразрешимости и о числе решений однородной и неоднородной задач.

Таким образом, определение частных индексов представляет собою важнейшую задачу. Никакого алгорифма для непосредственного решения этой задачи в настоящее время нет. Дело обстоит так: нужно решить некоторую систему интегральных уравнений Фредгольма, из этих решений по некоторым правилам построить каноническую систему, откуда и получаются частные индексы.

§ 2. Один частный случай краевой задачи Римана

Ограничимся пока однородной задачей: $b(t) = 0$. Предположим, что матрица коэффициентов краевой задачи удовлетворяет условию

$$A(t) = \Omega^{+}(t) \cdot U(t), \tag{2}$$

где $\Omega^{+}(t) = \| \omega_{ij}^{+}(t) \|$ есть матрица, элементами которой являются краевые значения аналитических в области S^{+} функций, а $U(t) = \| u_{ij}(t) \|$ имеет элементами краевые значения функций, аналитических в области S^{-}, за

* Индексом некоторой функции точек контура называется приращение аргумента этой функции (угла) при обходе контура, деленное на 2π.

исключением бесконечно удаленной точки, где они могут иметь полюсы некоторого порядка.

Таким образом, краевые условия запишутся в виде

$$\varphi^{+}(t)=\Omega^{+}(t)\cdot U(t)\,\varphi^{-}(t). \tag{3}$$

Вопрос о представимости произвольной матрицы $A(t)$ в виде (2) решается положительно, на основании общей теории краевой задачи Римана, опирающейся на теорию интегральных уравнений Фредгольма. Однако фактическое представление матрицы в такой форме равносильно по существу решению самой краевой задачи. Мы будем считать, что матрица краевого условия уже задана в виде (2). Задача (3) включает, как частные случаи, все рассмотренные до настоящего времени случаи, для которых давались или делались попытки дать эффективные решения.

Н. П. Векуа и Д. А. Квеселава в работах (3), (4) рассматривали краевую задачу вида

$$\varphi_i^{+}(t)=a_1(t)\,\omega_{i1}^{+}(t)\,\varphi_1^{-}(t)+\cdots+a_n(t)\,\omega_{in}^{+}(t)\,\varphi_n^{-}(t), \tag{4}$$

где $\omega_{ij}^{+}(t)$ — краевые значения аналитических в области S^{+} функций, а $a_j(t)$ — произвольные функции.

На основании решения краевой задачи Римана для одной пары функций, произвольные функции $a_j(t)$ с индексом m можно заменить отношением краевых значений аналитических функций

$$a_j(t)=t^{m_j}\,\frac{\chi_j^{+}(t)}{\chi_j^{-}(t)}.$$

Вставляя это отношение в краевое условие (4), мы получим краевую задачу типа (3), причем $U(t)$ будет здесь диагональной матрицей.

Следует отметить, что указанные авторы рассматривают, не упоминая об этом явно, лишь простейший частный случай задачи (3), именно, когда определитель $|\omega_{ij}^{+}(z)|$ не имеет нулей в области S^{+}, т. е. когда $\operatorname{ind}|\omega_{ij}(t)|=0$.

В этом случае обращением краевого условия задача срезу приводится к совокупности n задач Римана для одной пары функций, откуда следует решение задачи в явном виде. Никаких серьезных проблем разрешимости здесь не возникает, так как частные индексы здесь даны непосредственно — они являются индексами функций $a_j(t)$. О частных индексах авторы не упоминают, что и неудивительно, так как самое понятие частных индексов было введено позже. Полное исследование задачи (4) должно было бы привести к тем же рассуждениям, что и для рассматриваемой в настоящей работе более общей задачи (3).

Недавно Н. П. Векуа опубликовал работу (5), в которой рассматривается более частный случай, именно, когда коэффициенты краевого условия предполагаются рациональными функциями. Здесь уже учитывается возможность обращения определителя в нуль в области S^{+}, в связи с чем исследование усложняется, но и в этой работе автор, применяя теоремы о приведении полиномиальной матрицы к канонической форме,

указывает лишь алгорифмы для построения канонической системы, не исследуя величин частных индексов.

Таким образом, в настоящее время нет работ, в которых давалось бы вычисление частных индексов. В настоящей статье я даю рациональный алгорифм для определения частных индексов, а также и для построения самой канонической системы. В этом состоит важнейшая часть работы. Метод исследования — применение общей теории линейных преобразований в специфической, пригодной для данного вопроса, форме.

§ 3. Приведение краевого условия к канонической форме

Запишем краевые условия в матричной форме:

$$\varphi^+(t) = \Omega^+(t)\, U(t)\, \varphi^-(t). \tag{3}$$

Под $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ будем понимать, как и раньше, векторы с составляющими $\varphi_i^+(z)$, $\varphi_i^-(z)$ или, что то же, матрицы с одним столбцом. Для получения общего решения нам потребуется отыскать n отдельных решений задачи. В этом случае под $\varphi(z)$ мы будем понимать квадратную матрицу, составленную из этих решений. Каждый столбец матрицы будет давать отдельное решение задачи.

Будем всюду в дальнейшем определитель некоторой матрицы A обозначать через $|A|$.

Пусть индекс определителя $|\Omega^+(t)|$ равен r, т. е. функция $|\Omega^+(z)|$* имеет r нулей в области S^+, (считая кратный нуль столько раз, какова его кратность).

Нули определителей $|\Omega^+(z)|$, $|U(z)|$ играют существенную роль, так как от них зависят интересующие нас частные индексы задачи. Поэтому в качестве первого преобразования представим матрицу $\Omega^+(z)$ в виде произведения матрицы $\Omega_1^+(z)$, составленной из краевых значений аналитических в S^+ функций с определителем, не обращающимся в нуль в S^+, и полиномной матрицы $Q(z)$, нули определителя которой совпадают с нулями определителя $|\Omega^+(z)|$. Преобразования, производимые в настоящем параграфе, имеют большое сходство с преобразованиями, применяемыми в теории алгебраических функций для приведения базиса алгебраического поля к нормальной форме [см. напр. ([6]), стр. 157—187].

Пусть z_0 есть нуль, порядка p определителя $|\Omega^+(z)|$:

$$|\Omega^+(z)| = (z - z_0)^p f(z), \quad f(z_0) \neq 0.$$

Вычислим разложение определителя в окрестности точки z_0. Пусть α — самая низшая степень разложения элементов j-го столбца в окрестности z_0

$$|\Omega^+(z)| = \begin{vmatrix} a_{11}(z - z_0)^{\alpha_1} + \cdots, & \cdots, & a_{1n}(z - z_0)^{\alpha_n} + \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(z - z_0)^{\alpha_1} + \cdots, & \cdots, & a_{nn}(z - z_0)^{\alpha_n} + \cdots \end{vmatrix} =$$

$$= (z - z_0)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}\,[|a_{ij}| + \cdots].$$

---

* Так как $\omega_{ij}^+(t)$, по условию,— краевые значения аналитических в S^+ функций, то они могут быть непосредственно продолжены в эту область, т. е. переменная t может быть заменена на $z \subset S^+$.

Если элемент $\omega_{ij}(z)$ имеет начальный член разложения по степеням $(z-z_0)$ выше α_j, то коэффициент a_{ij} нужно положить равным нулю.

Очевидно,

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\leqslant p.$$

Знак равенства может иметь место тогда и только тогда, если определитель $|a_{ij}|$ не равен нулю.

Допустим, что в условии (4) имеет место знак неравенства и, следовательно, $|a_{ij}|=0$.

Пусть для некоторого k

$$\alpha_k\geqslant\alpha_j\quad(j=1,2,\ldots,n).$$

Умножая k-й столбец на λ_k и прибавляя к нему остальные столбцы, умноженные на $\lambda_j(z-z_0)^{\alpha_k-\alpha_j}$, получим, что коэффициенты при старших членах k-го столбца будут равны:

$$A_1=a_{11}\lambda_1+\cdots+a_{1n}\lambda_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n=a_{n1}\lambda_1+\cdots+a_{nn}\lambda_n.$$

Так как определитель $|a_{ij}|=0$, то можно подобрать такую систему чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, не обращающихся одновременно в нуль, что все A_n обратятся в нули*. В результате преобразования число α_k увеличится по крайней мере на единицу, а все остальные α_j останутся неизменными. Подобные преобразования можно продолжать до тер пор, пока определитель из начальных коэффициентов $|a_{ij}|$ не станет отличным от нуля, т. е. пока не будет выполняться равенство

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=p.$$

Рассмотренное преобразование принадлежит к числу так называемых элементарных преобразований матрицы и равносильно умножению матрицы справа на полиномную матрицу с постоянным определителем.

Обозначим через T произведение матриц, умножение на которые справа равносильно всем произведенным преобразованиям матрицы Ω^+. Очевидно, T — полиномная матрица с постоянным определителем. Обратная матрица T^{-1} будет также полиномной с постоянным определителем.

Обозначая через $\|(z-z_0)^{\alpha_j}\|$ диагональную матрицу, элементы которой равны $(z-z_0)^{\alpha_j}$, имеем тождество

$$\Omega^+=\Omega^+TT^{-1}=\Omega_1^+\|(z-z_0)^{\alpha_j}\|T^{-1}=\Omega_1^+\cdot M.$$

Здесь Ω_1^+ — матрица, элементы которой являются аналитическими в S^+ функциями с определителем, не обращающимся в нуль в точке z_0, а M — полиномная матрица, определитель которой равен $\mathrm{const}\,(z-z_0)^p$.

Произведя такие же преобразования для всех других нулей определителя, получим для матрицы Ω^+ следующее представление:

$$\Omega^+=\Omega_2^+Q,$$

* Если бы оказалось, что $\lambda_k=0$, то отсюда следовало бы, что все миноры k-го столбца равны нулю; тогда указанное преобразование нужно было бы применить ко всем столбцам, кроме k-го.

где Ω_2^+ — матрица, элементы которой являются аналитическими в области S^+ функциями с определителем, не имеющим нулей в области S^+ а Q — полиномная матрица, имеющая нули, совпадающие с нулями Ω^+ в области S^+.

Таким образом, имеет место

ТЕОРЕМА I. *Матрица Ω^+, элементы которой — аналитические в области S^+ функции, а определитель обращается в нуль в этой области в конечном числе точек, может быть представлена в виде произведения матрицы Ω_2^+ с элементами того же характера, что и у матрицы Ω^+, и с определителем, не обращающимся в нуль в S^+, и полиномной матрицы Q, определитель которой имеет нули, совпадающие с нулями определителя $|\Omega^+|$ в S^+.*

Перепишем краевое условие в форме

$$\varphi^+(t) = \Omega_2^+(t) \cdot U_1(t) \varphi^-(t), \tag{5}$$

где $U_1(t) = Q(t) U(t)$ — матрица того же характера, что и матрица U, т. е. имеющая своими элементами функции, являющиеся краевыми значениями функций, аналитических в области S^-, за исключением бесконечно удаленной точки, где они могут иметь полюс. Такие матрицы в дальнейшем будем для краткости называть U-матрицами.

Проделав со строками матрицы U_1 элементарные преобразования, аналогичные преобразованиям, произведенным над столбцами матрицы Ω^+, легко придем к следующей теореме.

ТЕОРЕМА II. *U-матрицу можно представить в виде произведения полиномной матрицы Q_1, нули определителя которой совпадают с нулями определителя U-матрицы в конечной части S^-, и U-матрицы с определителем, не обращающимся в нуль в конечной части области S^-:*

$$U_1 = Q_1 \cdot U_2. \tag{6}$$

Введем некоторые определения.

Определение I. Порядком строки U-матрицы будем называть наивысшую степень элементов строки. Наивысшую степень определителя назовем его порядком.

Пусть порядки строк есть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, а порядок определителя q; тогда, очевидно,

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n \geqslant q.$$

Определение II. Если сумма порядков строк равна порядку определителя, то будем говорить, что U-матрица имеет нормальную форму.

Напишем разложение элементов U-матрицы в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$U_2(z) = \left\| \begin{matrix} b_{11} z^{\beta_1} + \cdots, & \cdots, & b_{1n} z^{\beta_1} + \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_{n1} z^{\beta_n} + \cdots, & \cdots, & b_{nn} z^{\beta_n} + \cdots \end{matrix} \right\|,$$

причем, если степень некоторого элемента матрицы $u_{ij}(z)$ ниже β_i, то соответствующий коэффициент b_{ij} нужно считать равным нулю.

$$|U_2(z)| = z^{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n}[|b_{ij}| + \cdots].$$

Для того чтобы U-матрица имела нормальную форму, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы определитель $|b_{ij}|$ не обращался в нуль.

Покажем, что всякую U-матрицу элементарными преобразованиями строк можно привести к нормальной форме.

Пусть β_k — наибольший порядок строк матрицы $\beta_k \geqslant \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ Помножая k-ю строку на λ_k и прибавляя к ней остальные строки, помноженные соответственно на $\lambda_i z^{\beta_k - \beta_i}$, получим, что коэффициенты при старших членах k-й строки будут равны;

$$C_1 = b_{11}\lambda_1 + \ldots + b_{n1}\lambda_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n = b_{n1}\lambda_1 + \ldots + b_{nn}\lambda_n.$$

Так как определитель $|b_{ij}| = 0$, то можно подобрать такие $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, не равные одновременно нулю, что все C_i обратятся в нули. В результате преобразования порядок k-й строки понизится по крайней мере на единицу, а остальные останутся неизменными. Указанное преобразование можно применять до тех пор, пока определитель из членов высшего порядка не станет отличным от нуля, т. е. пока матрица не станет нормальной.

Так как подобное элементарное преобразование строк равносильно умножению матрицы слева на полиномную матрицу с постоянным определителем, то нами доказана

ТЕОРЕМА III. *Всякую U-матрицу можно привести к нормальному виду умножением слева на некоторую полиномную матрицу с постоянным определителем.*

Пусть L — матричный множитель слева, приводящий матрицу U_2 к нормальной форме. Обратная матрица L^{-1} будет также полиномной с постоянным определителем. Учитывая равенства (5) и (6), будем иметь

$$\Omega^+ U = \Omega_2^+ Q_1 L^{-1} L U_2 = \Psi \cdot R, \tag{7}$$

где $\Psi = \Omega_2^+ Q_1 L^{-1}$, $R = LU_2$.

Равенство (7) дает следующую теорему.

ТЕОРЕМА IV. *Матрица $\Omega^+ U$ может быть представлена в виде произведения матрицы Ψ с элементами того же характера, что и матрица Ω^+, и с определителем, не обращающимся в нуль в S^+, и U-матрицы R в нормальной форме, определитель которой не имеет нулей в конечной части области S^-.*

Полученное представление матрицы и есть искомое каноническое. Этим мы закончим важнейшую часть решения задачи.

Докажем еще одно вспомогательное предложение, которое нам в дальнейшем понадобится.

ТЕОРЕМА V. *Если U-матрица в нормальной форме R имеет порядок строк $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$, то обратная ей матрица имеет порядками столбцов соответственно числа $-\varkappa_1, \ldots, -\varkappa_n$.*

Доказательство. Как известно,

$$R^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, & \ldots, & \frac{\Delta_{n1}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\Delta_{1n}}{\Delta}, & \ldots, & \frac{\Delta_{nn}}{\Delta} \end{matrix} \right\|,$$

где Δ — определитель матрицы, а Δ_{ij} — минор, соответствующий элементу r_{ij}. Порядки миноров i-й строки не выше, чем

$$\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_{i-1} + \varkappa_{i+1} + \cdots + \varkappa_n = q - \varkappa_i$$

(сумма порядков элементов тех строк, из которых составлены миноры), но с другой стороны, по крайней мере один минор имеет порядок точно $q - \varkappa_i$, так как в противном случае определитель имел бы порядок ниже q.

Следовательно, порядки столбцов равны $(q - \varkappa_i) - q = -\varkappa_i$, что и требовалось доказать.

Теперь мы перейдем к решению самой краевой задачи.

§ 4. Построение канонической системы решений краевой задачи

Учитывая (7), напишем краевое условие (3) в виде:

$$\varphi^+(t) = \Psi \cdot R \cdot \varphi^-(t). \tag{8}$$

Будем искать n решений краевой задачи, так что в последнем равенстве φ^+ и φ^- будут обозначать квадратные матрицы.

Каждый столбец, представляющий кусочно голоморфный вектор, дает отдельное решение задачи, и матричное уравнение (8) равносильно n^2 равенствам его элементов. Сравнение элементов каждого отдельного столбца дает самостоятельную систему n уравнений для каждого отдельного решения задачи.

Расширим временно класс допустимых функций, считая, что искомый вектор $\varphi^-(z)$ может иметь на бесконечности полюс некоторого порядка.

Записав краевое условие (8) в форме

$$\Psi^{-1}\varphi^+(t) = R \cdot \varphi^-(t),$$

легко усмотреть, что матрицы

$$X^+(z) = \Psi(z), \quad X^-(z) = R^{-1}(z) \tag{9}$$

будут решением задачи.

В самом деле, при подстановке в краевое условие матрицы $X^+(t)$, $X^-(t)$ обе стороны обратятся в единичные матрицы и, следовательно, краевое условие удовлетворится. С другой стороны, матрица $\Psi(z)$ имеет своими элементами аналитические в области S^+ функции, а матрица $R^{-1}(z)$ — функции, аналитические в области S^-, за исключением бесконечно удаленной точки, где они могут иметь полюс некоторого порядка, что соответствует наложенным на искомое решение расширенным условиям.

Докажем, что найденное решение представляет собою каноническую систему. Для этого нужно, как указывалось в § 1, установить два свойства системы:

1. Определитель системы нигде на конечном расстоянии не обращается в нуль.

2. Порядок определителя $|X^-(z)|$ на бесконечности точно равен сумме порядков на бесконечности отдельных решений системы.

Справедливость первого условия очевидна, так как, согласно преобразованиям § 3, определитель $|\Psi(z)|$ не имеет нулей в области S^+, а определитель $|R^{-1}(z)| = \frac{1}{|R(z)|}$ не обращается в нуль в области S^-.

Рассмотрим поведение определителя $|X^-(z)|$ на бесконечности.

Порядок определителя $|R(z)|$ равен $\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_n = q$, следовательно, порядок $|X^-(z)| = \frac{1}{|R(z)|}$ равен $-q$.

С другой стороны, на основании теоремы V предыдущего параграфа, порядки столбцов определителя $|X^-(z)|$ будут

$$-\varkappa_1, \quad -\varkappa_2, \quad \ldots, \quad -\varkappa_n.$$

Отсюда получаем, что порядок определителя точно равен сумме порядков его столбцов. Следовательно, построенная система решений — каноническая.

По определению, порядки на бесконечности решений канонической системы с обратными знаками есть частные индексы задачи Римана. Таким образом, частные индексы равны

$$\varkappa_1, \quad \varkappa_2, \quad \ldots, \quad \varkappa_n.$$

ТЕОРЕМА VI. *Определенные таким образом, как порядки строк нормальной U-матрицы, частные индексы являются вместе с тем показателями элементарных делителей U-матрицы относительно бесконечно удаленной точки.*

Для доказательства можно использовать следующую выведенную в [6] (стр. 171—181) теорему:

Если в матрице, имеющей нормальную форму относительно нуля определителя $z = \alpha$, делителями столбцов являются

$$(z-\alpha)^{\rho_1}, \quad (z-\alpha)^{\rho_2}, \quad \ldots, \quad (z-\alpha)^{\rho_n},$$

то эти делители будут вместе с тем элементарными делителями матрицы.

Для того чтобы получить наше утверждение, нужно в формулированной теореме вместо конечной точки $z = \alpha$ взять бесконечно удаленную, а вместо столбцов — строки. Рассуждения, понятно, не изменяются.

Пример.

$$\varphi_1^+(t) = (t-1)\, e^{2t+\frac{1}{t}}\, \varphi_1^-(t) + \frac{1}{t^2}\, e^{-t-\frac{2}{t^2}}\, \varphi_2^-(t),$$

$$\varphi_2^+(t) = (t-1)\, e^{t+\frac{1}{t}}\, \varphi_1^-(t) + \frac{1}{t^2}\, e^{3t-\frac{2}{t^2}}\, \varphi_2^-(t).$$

В качестве контура возьмем произвольное число кривых, ограничивающих связную область S^+, включающую в себя точки $z=0$ и $z=1$, и дополнительную к ней область S^-, включающую бесконечно удаленную точку.

Введя обозначения

$$e^{\frac{1}{z}}\varphi_1^-(z)=\Psi_1^-(z),\quad e^{-\frac{2}{z^2}}\varphi_2^-(z)=\Psi_2^-(z),$$

запишем краевое условие в матричной форме

$$\varphi^+(t)=\left\|\begin{matrix} e^{2t}, & e^{-t}\\ e^t, & e^{3t}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} t-1, & 0\\ 0\ , & t^{-2}\end{matrix}\right\|\Psi^-(z).$$

Определитель матрицы

$$\Omega(z)=\left\|\begin{matrix} e^{2z}, & e^{-z}\\ e^z, & e^{3z}\end{matrix}\right\|$$

$|\Omega(z)|=e^{5z}-1$ имеет нуль 1-го порядка в начале координат, поэтому из этой матрицы нужно выделить полиномный множитель. Вычитая из 2-го столбца 1-й и затем вынося из 2-го столбца t, что равносильно произведению

$$\left\|\begin{matrix} e^{2t}, & e^{-t}\\ e^t\ , & e^{3t}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} e^{2t}, & \dfrac{e^{-t}-e^{2t}}{t}\\ e^t\ , & \dfrac{e^{3t}-e^t}{t}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} 1, & 1\\ 0, & t\end{matrix}\right\|,$$

получим, что определитель 1-й матрицы не имеет нулей в области S^+. Краевое условие запишется в виде:

$$\varphi^+(t)=\left\|\begin{matrix} e^{2t}, & \dfrac{e^{-t}-e^{2t}}{t}\\ e^t\ , & \dfrac{e^{3t}-e^t}{t}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} t-1, & \dfrac{1}{t^2}\\ 0\ , & \dfrac{1}{t}\end{matrix}\right\|\Psi^-(t),$$

второй матричный множитель имеет нормальную форму *, поэтому сразу получаем каноническую систему решений

$$\chi^+(z)=\left\|\begin{matrix} e^{2z}, & \dfrac{e^{-z}-e^{-2z}}{z}\\ e^z\ , & \dfrac{e^{3z}-e^z}{z}\end{matrix}\right\|,\quad \chi^-(z)=\left\|\begin{matrix} \dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z-1}, & -\dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z(z-1)}\\ 0, & ze^{\frac{2}{z^2}}\end{matrix}\right\|.$$

Частные индексы равны (1, —1).

---

* Интересно отметить, что если бы мы в матрице Ω вычли из 1-го столбца 2-й, а затем вынесли t из 1-го столбца, то 2-й матричный множитель $\left\|\begin{matrix} t(t-1) & 0\\ t-1 & t^{-2}\end{matrix}\right\|$ не имел бы нормальной формы и над ним нужно было бы произвести преобразования, указанные в конце § 3. Произведя их, мы получили бы то же, что нами выше получено сразу.

§ 5. Общее решение краевой задачи

Дальнейшие рассуждения представляют собой приложения общей теории и (после того, как построена каноническая система решений) в одинаковой форме приложимы как к рассматриваемому у нас случаю, так и к общему случаю задачи Римана. Мы будем излагать лишь схему решения (подробности можно найти, например, в книге Н. И. Мусхелишвили ([2])).

Будем искать, как это требуется в приложениях к сингулярным интегральным уравнениям, решения не только голоморфные в соответствующих областях, но и обращающиеся на бесконечности в нуль.

Однородная задача.

$$\varphi^{+}(t) = \Omega^{+}(t)\, U(t)\, \varphi^{-}(t). \tag{3}$$

Пусть

$$X(z) = \begin{Vmatrix} \overset{1}{\chi}_1(z), & \ldots, & \overset{n}{\chi}_1(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{1}{\chi}_n(z), & \ldots, & \overset{n}{\chi}_n(z) \end{Vmatrix}$$

— построенная по правилам §§ 3 и 4 каноническая система решений. Будем считать, что решения (столбцы матрицы) расположены в порядке убывания их частных индексов.

Пусть частные индексы $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_k$ положительны, а остальные отрицательны или равны нулю.

Обозначим через $P_1(z), \ldots, P_k(z)$ полиномы с произвольными коэффициентами соответственно степеней $\varkappa_1 - 1, \ldots, \varkappa_k - 1$.

Тогда общее решение задачи может быть записано в матричной форме следующим образом:

$$\varphi(z) = \begin{Vmatrix} \overset{1}{\chi}_1(z), & \ldots, & \overset{k}{\chi}_1(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{1}{\chi}_n(z), & \ldots, & \overset{k}{\chi}_n(z) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} P_1(z) \\ \cdots \\ P_k(z) \end{Vmatrix} \tag{10}$$

или, что все равно,

$$\begin{aligned} \varphi_i^{+}(z) &= \overset{1}{\chi}{}_i^{+}(z)\, P_1(z) + \cdots + \overset{k}{\chi}{}_i^{+}(z)\, P_k(z), \\ \varphi_i^{-}(z) &= \overset{1}{\chi}{}_i^{-}(z)\, {}_1P(z) + \cdots + \overset{k}{\chi}{}_i^{-}(z)\, P_k(z), \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Решение содержит $\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_k$ произвольных постоянных, следовательно, число линейно независимых решений задачи равно сумме положительных частных индексов.

Неоднородная задача.

$$\varphi^{+}(t) = \Omega^{+}(t)\, U(t)\, \varphi^{-}(t) + b(t). \tag{3'}$$

Пусть $X(z)$ — попрежнему каноническая система решений. Тогда решение неоднородной задачи в матричной форме формально выражается в виде

$$\varphi(z) = X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int \frac{[X^+(t)]^{-1}\,b(t)}{t-z}\,dt + P(z)\right]. \tag{11}$$

Если среди частных индексов имеются отрицательные, то первый член последнего выражения на бесконечности имеет, вообще говоря, полюс некоторого порядка. Для того чтобы решение было голоморфным на бесконечности и обращалось там в нуль, необходимо и достаточно, чтобы свободный член удовлетворял некоторым условиям, которые можно получить, раскладывая первый член выражения (11) в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки и приравнивая нулю коэффициенты при положительных степенях и свободный член. Число этих условий будет, как легко усмотреть, равно сумме абсолютных величин отрицательных частных индексов. Мы не будем выписывать этих условий явно.

Для рассмотренного в предыдущем параграфе примера общее решение однородной задачи, обращающееся на бесконечности в нуль, дается в виде

$$\varphi^+(z) = \begin{Vmatrix} e^{2z}, & \dfrac{e^{-z}-e^{2z}}{z} \\ e^{z}, & \dfrac{e^{3z}-e^{z}}{z} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \varphi^-(z) = \begin{Vmatrix} \dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z-1}, & -\dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z(z-1)} \\ 0, & ze^{\frac{2}{z^2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix},$$

где a — произвольная постоянная, или в раскрытом виде:

$$\varphi_1^+(z) = ae^{2z}, \quad \varphi_1^-(z) = a\,\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1},$$

$$\varphi_2^+(z) = ae^{z}, \quad \varphi_2^-(z) = 0.$$

Для неоднородной задачи, учитывая, что

$$[X^+(t)]^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{e^{3t}-e^{t}}{e^{5t}-1}, & \dfrac{e^{2t}-e^{-t}}{e^{5t}-1} \\ -\dfrac{te^{t}}{e^{5t}-1}, & \dfrac{te^{2t}}{e^{5t}-1} \end{Vmatrix},$$

по формуле (11), будем иметь

$$\varphi^+(z) = \begin{Vmatrix} e^{2z}, & \dfrac{e^{-z}-e^{2z}}{z} \\ e^{z}, & \dfrac{e^{3z}-e^{z}}{z} \end{Vmatrix} \left[\frac{1}{2\pi i}\int \begin{Vmatrix} \dfrac{e^{3t}-e^{t}}{e^{5t}-1}, & \dfrac{e^{2t}-e^{-t}}{e^{5t}-1} \\ -\dfrac{te^{t}}{e^{5t}-1}, & \dfrac{te^{2t}}{e^{5t}-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{Vmatrix} \frac{dt}{t-z} + \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix}\right],$$

$$\varphi^-(z) = \begin{Vmatrix} \dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z-1}, & -\dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z(z-1)} \\ 0, & ze^{\frac{2}{z^2}} \end{Vmatrix} \left[\frac{1}{2\pi i}\int \begin{Vmatrix} \dfrac{e^{3t}-e^{t}}{e^{5t}-1}, & \dfrac{e^{2t}-e^{-t}}{e^{5t}-1} \\ \dfrac{-te^{t}}{e^{5t}-1}, & \dfrac{te^{2t}}{e^{5t}-1} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{Vmatrix} \frac{dt}{t-z} + \begin{Vmatrix} a \\ 0 \end{Vmatrix}\right].$$

Чтобы написать условие разрешимости, выпишем $\varphi^-(z)$ в раскрытой форме:

$$\varphi_1^-(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z-1}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\left[\frac{e^{3t}-e^t}{e^{5t}-1}b_1(t) + \frac{e^{2t}-e^t}{e^{5t}-1}b_2(t)\right]\frac{dt}{t-z} + a\right\} +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z(z-1)}\frac{1}{2\pi i}\int\left[\frac{te^t}{e^{5t}-1}b_1(t) - \frac{te^{2t}}{e^{5t}-1}b_2(t)\right]\frac{dt}{t-z},$$

$$\varphi_2^-(z) = ze^{\frac{2}{z^2}}\frac{1}{2\pi i}\int\left[-\frac{te^t}{e^{5t}-1}b_1(t) + \frac{e^{2t}-e^{-t}}{e^{5t}-1}b_2(t)\right]\frac{dt}{t-z}.$$

Последняя функция, ввиду наличия множителя z на бесконечности, вообще говоря, не обращается в нуль. Условием разрешимости неоднородной задачи является выполнение равенства

$$\int\left[-\frac{te^t}{e^{5t}-1}b_1(t) + \frac{e^{2t}-e^{-t}}{e^{5t}-1}b_2(t)\right]dt = 0.$$

Приложения краевой задачи Римана к решению системы сингулярных интегральных уравнений основаны на следующей связи между решением краевой задачи и решением так называемой характеристической системы сингулярных интегральных уравнений:

Пусть

$$\sum_{\beta=1}^{n} c_{\alpha\beta}(t)\psi_\beta(t) + \sum_{\beta=1}^{n}\frac{d_{\alpha\beta}}{\pi i}\int\frac{\psi_\beta(\tau)}{\tau-t}d\tau = g_\alpha(t)$$

или в матричной форме

$$C\psi(t) + \frac{D}{\pi i}\int\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau = g(t)$$

— характеристическая система сингулярных интегральных уравнений.

Решение этой системы может быть получено из решения краевой задачи Римана

$$\varphi^+(t) = (C+D)^{-1}(C-D)\varphi^-(t) + (C+D)^{-1}g$$

по формуле

$$\psi(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t)$$

и, обратно, решение краевой задачи Римана

$$\varphi^+(t) = A(t)\varphi^-(t) + b(t)$$

может быть получено из решения характеристической системы сингулярных уравнений

$$\frac{1}{2}[1+A(t)]\psi(t) + \frac{[1-A(t)]}{2\pi i}\int\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau = b(t)$$

по формуле

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\psi(t)}{t-z}dz,$$

причем мы будем получать $\varphi^+(z)$ или $\varphi^-(z)$ в зависимости от того, берется ли под интегралом z в области S^+ или S^-.

Теория полной системы сингулярных уравнений, т. е. когда ядро имеет вид $\frac{K(t\tau)}{\tau - t}$, может быть получена из теории характеристической системы.

§ 6. Особый случай, когда определитель обращается в нуль

Во всех предшествующих рассуждениях, так же как и в общей теории, предполагалось, что определитель матрицы коэффициентов краевой задачи не обращается в нуль на контуре. Случай обращения определителя в нуль является особым и требует специального исследования, которое до сих пор никем не проводилось. Я приведу это исследование применительно к рассмотренному здесь частному случаю задачи Римана. Будем считать допустимыми лишь нули целого порядка.

Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что мы теперь не в состоянии построить каноническую систему решений в смысле данного ранее определения. Невозможно удовлетворить первому требованию — построить конечные в конечной части плоскости решения с определителем, не обращающимся в нуль.

В самом деле, пусть для краевой задачи

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t)$$

определитель $|G(t)|$ обращается в нуль в некоторой точке t_1 контура и пусть $X(z)$ — матрица решений. Тогда из соотношения

$$|X^+(t)| = |G(t)| \cdot |X(t)|$$

вытекает, что в точке контура t_1 или $|X^+(t)|$ обращается в нуль или $|X^-(t)|$ обращается в бесконечность. Таким образом, при построении вспомогательной (канонической) системы решений мы должны или отказаться от условия необращения в нуль определителя системы, или же от условия конечности решений системы на контуре. Последнее должно сочетаться с условием конечности общего решения задачи всюду, в том числе и на контуре. Чтобы решить вопрос, каким из условий лучше пожертвовать, нужно глубже вдуматься в природу канонической системы: чем вызвано требование необращения в нуль определителя системы? Что произойдет, если определитель обратится в нуль?

Предположим, что определитель матрицы решений обращается в нуль в некоторой точке z_0, лежащей в S^+ или S^-. Беря линейные комбинации решений, можно добиться того, чтобы все функции одного какого-нибудь решения обращались в нуль в точке z_0, т. е. чтобы некоторый столбец матрицы имел множитель $z - z_0$. Тогда в качестве решения можно взять частное от деления соответствующего решения на $z - z_0$. При этом порядок решения на бесконечности понижается на единицу, что означает, что соответствующий частный индекс увеличивается на единицу. Таким образом, каждый неучтенный нуль определителя в матрице решений означает неучтенную единицу в частном индексе, т. е., вообще говоря, потерю одного решения.

Посмотрим теперь, что произойдет, если определитель имеет нуль в точке t_1 контура. Если в этой точке обращаются в нуль оба определителя и $|X^+(t)|$ и $|X^-(t)|$ (что будет иметь место всегда, если $|G(t)| \neq 0$), то дело будет обстоять совершенно так же, как и в рассмотренном выше случае нуля в области. Если же обращается в нуль лишь один определитель (например, $|X^+(t)|$), то дело обстоит иначе. Рассуждая так же как выше, мы придем к тому, что устранение нуля определителя $|X^+(t)|$ приведет к решению $\overset{k}{\varphi}{}^-(z)$, обращающемуся в бесконечность в точке t_1 контура. Отсюда видно, что при сохранении условия конечности искомого решения всюду, в том числе и на контуре, число решений от наличия нуля определителя на контуре не повышается. Увеличение числа решений от возрастания частного индекса компенсируется необходимостью удовлетворить условию конечности в точке t_1 контура.

После этих предварительных рассуждений мы перейдем к решению задачи.

Однородная задача.

$$\varphi^+(t) = \Omega^+(t)\, U(t)\, \varphi^-(t). \tag{3}$$

Произведем преобразование матрицы Ω^+ так, как это сделано в § 3, учитывая только нули определителя $|\Omega^+(t)|$ внутри области S^+, а с матрицей U_1, учитывая также и нули определителя $|U_1|$ на контуре. Получим, по формулам (9), систему решений

$$X^+(z) = \Psi(z), \quad X^-(z) = R^{-1}(z),$$

причем определитель $|X^+(z)|$ обращается в нуль в некоторых точках контура, а определитель $|X^-(z)|$ не обращается на контуре ни в нуль, ни в бесконечность. Общее решение однородной задачи получим по формуле (10).

Доказательство того, что полученное решение является самым общим, может быть проведено тем же способом, что и соответствующее доказательство в случае отсутствия нулей определителя на контуре [ср., например, ([2]), стр. 407]. Написав краевое условие в форме

$$[X^+(t)]^{-1} \cdot \varphi^+(t) = [X^-(t)]^{-1}\, \varphi^-(t),$$

применяем обобщенную теорему Лиувилля. Выражение, стоящее в левой части, может иметь полюсы в соответствующих точках контура. Если допустить это, то выражение в правой части также будет иметь полюсы в этих же точках, но тогда и искомое решение $\varphi^-(z)$ будет иметь полюсы в этих точках. Это невозможно в силу предположенной конечности решения. Таким образом, единственной возможной особенностью является полюс в бесконечно удаленной точке, откуда и получаем формулу (10), как наиболее общее решение. Отсюда получаем вывод:

Число линейно независимых решений однородной задачи Римана (3) не зависит от наличия нулей определителя матрицы коэффициентов на контуре. Число линейно независимых решений в этом случае будет таким же, как и в случае отсутствия нулей.

Неоднородная задача. Решения неоднородной задачи при помощи использованной в предыдущем вспомогательной системы решений невозможно. Матрица $[X^+(t)]^{-1}$ имела бы элементы, обращающиеся в бесконечность. Функции $[X^+(t)]^{-1}\,b(t)$, вообще говоря, были бы неинтегрируемыми и формула (11) потеряла бы смысл.

При решении неоднородной задачи поступим с нулями определителя на контуре так же, как и с нулями области S^+, т. е. отнесем их к матрице $R(z)$.

$$\Omega^+(z)\,U(z)=\Psi(z)\,R(z),$$

причем определитель $|\Psi(z)|$ не имеет нулей ни в области S^+, ни на контуре, а определитель $|R(z)|$ имеет все нули определителя $|\Omega^+_k(z)|\ |U(z)|$ на контуре и не имеет нулей в конечной части области S^-.

В качестве вспомогательного решения возьмем, как и в § 4, матрицы

$$X^+(z)=\Psi(z),\quad X^-(z)=R^{-1}(z).$$

Полученные решения удовлетворяют всем условиям, накладываемым на канонические системы, всюду. кроме точек контура, где определитель обращается в нуль. В этих точках $X^-(z)$ будет обращаться в бесконечность. Легко видеть, что порядки строк матрицы R от наличия нулей определителя на контуре повышаются в совокупности на число этих нулей и, следовательно, частные индексы увеличиваются в совокупности на это же число. Напишем, по формулам (11), решение неоднородной задачи

$$\varphi(z)=X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\frac{[X^+(t)]^{-1}\,b(t)}{t-z}\,dt+P(z)\right]. \tag{11}$$

В последних решениях $\varphi^-(z)$ может обращаться в бесконечность в тех точках, где определитель матрицы коэффициентов обращается в нуль. Для того чтобы решение оставалось конечным и на контуре, выражение в квадратных скобках должно в соответствующих точках обратиться в нуль. Это дает некоторые новые условия разрешимости задачи. Части из них можно будет удовлетворить путем подбора произвольных коэффициентов многочленов $P(z)$, часть останется как дополнительные условия, которым должен удовлетворять свободный член для того, чтобы задача имела решение. Их нужно будет присоединить к условиям разрешимости, возникающим при наличии отрицательных частных индексов, как условие конечности решения в бесконечно удаленной точке.

Исследуем ближе эти условия. Наша задача — показать, что, так же как и в случае однородной задачи, наличие нулей не влияет на число линейно независимых решений, а также и на число условий разрешимости.

Пусть t_1 — нуль порядка p определителя $|R(z)|$,

$$|R(z)|=(z-t_1)^p f(z),\quad (f(t_1)\neq 0).$$

Разложим вектор

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{[X^+(t)^{-1} b(t)}{t-z}\, dt + P(z)$$

по формуле Тейлора в окрестности точки t_1. Для осуществимости этого придется допустить существование у функций $[X^+(t)]^{-1} b(t)$ производных p-го порядка, что будет обеспечено, если коэффициенты краевого условия в этой точке имеют p-ю производную.

Пусть $q_j(z)$ — многочлен, составленный из p начальных членов этого разложения и $\Delta_{ij}(z)$ — миноры определителя $|R(z)|$, которые мы тоже предположим разложенными в окрестности точки t_1. Тогда для конечности решения в точке t_1 n функций

$$\Delta_{1i}(z)\, q_1(z) + \cdots + \Delta_{ni}(z)\, q_n(z)$$

должны в точке t_1 обращаться в нуль порядка p. Это дает всего np условий для полиномов $q_j(z)$. Но можно доказать, что из них независимых будет всего p.

Для доказательства запишем условия конечности в виде сравнений

$$\Delta_{1i}(z)\, q_1(z) + \cdots + \Delta_{ni}\, q_n(z) \equiv 0 \pmod{(z-t_1)^p}.$$

Как известно, сравнения можно умножить на произвольное число или функцию и складывать; следовательно, данную систему сравнений можно заменить ей эквивалентной, в которой матрица $\|\Delta_{ji}(z)\|$ подвергнута некоторому элементарному преобразованию строк. Приведем эту матрицу к нормальной форме относительно бинома $z-t_1$, т. е. к такому виду, когда сумма порядков строк относительно этого бинома равна порядку определителя относительно него.

Пусть p_i — порядки строк относительно бинома $(z-t_1)$, тогда, сокращая сравнения, приведем их к виду

$$\Delta'_{1i}(z)\, q_1(z) + \cdots + \Delta'_{ni}(z)\, q_n(z) \equiv 0 \pmod{(z-t_1)^{p-p_i}},$$

причем определитель $|\Delta'_{ji}|$ в точке t_1 не равен нулю. Таким образом, у нас останется всего $(p-p_1) + \cdots + (p-p_n) = np - (p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$ условий, где $p + \cdots + p_n$ равно порядку определителя $|\Delta_{ji}(z)|$ относительно $z-t_1$.

Так как определитель $|\Delta_{ji}(z)|$ взаимный с $|R(z)|$ и, следовательно, равен $|R(z)|^{n-1}$, то $p_1 + \cdots + p_n = (n-1)\,p$, откуда следует, что число условий разрешимости будет равно p, т. е. порядку нуля t_1. Так как $|\Delta'_{ji}(t_1)| \neq 0$, то все эти условия независимы.

Приведенные рассуждения можно повторять относительно любого нуля и, таким образом, мы получим, что число дополнительных условий разрешимости, вытекающих из конечности на контуре, равно в точности числу нулей.

Таким образом, нули определителя матрицы коэффициентов, с одной стороны, увеличивают число линейно независимых решений неоднородной задачи или уменьшают число условий разрешимости, вытекающих из

конечности решений в бесконечно удаленной точке в совокупности на величину, равную числу нулей. С другой стороны, они влекут столько же условий разрешимости, вытекающих из конечности решения на контуре.

Общее решение неоднородной задачи, как и всякой линейной задачи, складывается из одного частного решения этой задачи и общего решения однородной задачи и, следовательно, содержит столько же произвольных постоянных, как и решение однородной задачи. Но для последней было доказано, что число ее решений не зависит от наличия нулей определителя на контуре.

Суммируя все рассуждения, мы получим общий вывод:

Наличие нулей определителя матрицы коэффициентов на контуре не влияет на число решений и условий разрешимости задачи. Число произвольных постоянных, а также и число условий разрешимости получаются такими же, как и в случае отсутствия нулей.

Условия разрешимости, конечно, меняют свой вид. В частности, для их выполнимости недостаточно, чтобы коэффициенты просто удовлетворяли условию Гельдера, нужно потребовать еще, чтобы в точках нулей определителя коэффициенты имели производные соответствующего порядка.

Пример. Если в примере, разобранном в предыдущих параграфах, считать, что точка $z=1$ лежит не в области S^+, как ранее предполагалась, а на самом контуре, то решение изменится следующим образом. Для однородной задачи вспомогательная система решений, заменяющая каноническую, должна быть взята в виде

$$X^+(z) = \begin{Vmatrix} (z-1)\,e^{2z}, & \dfrac{e^{-z}-e^{2z}}{z} \\ (z-1)\,e^{z}, & \dfrac{e^{3z}-e^{z}}{z} \end{Vmatrix}, \qquad X^-(z) = \begin{Vmatrix} e^{-\frac{1}{z}}, & -\dfrac{e^{-\frac{1}{z}}}{z} \\ 0, & ze^{-\frac{2}{z^2}} \end{Vmatrix}.$$

Частные индексы будут равны $(0, -1)$, откуда следует, что однородная задача не имеет других решений, исчезающих на бесконечности, кроме тождественного нуля. Такой же результат мы получили бы, если бы вовсе исключили из матрицы коэффициентов бином $t-1$ в первом столбце.

Для неоднородной задачи вспомогательная система решений и самое решение могут быть взяты совершенно те же, что и в предыдущем параграфе, но для конечности решения в точке $z=1$ функция

$$e^{-\frac{1}{z}}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\left[\frac{e^{3t}-e^{t}}{e^{5t}-1}\,b_1(t)+\frac{e^{2t}-e^{t}}{e^{5t}-1}\,b_2(t)\right]\frac{dt}{t-z}+a+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{z\cdot 2\pi i}\int\left[\frac{te^{t}}{e^{5t}-1}\,b_1(t)-\frac{te^{2t}}{e^{5t}-1}\,b_2(t)\right]\frac{dt}{t-z}\right\}$$

должна делиться на $(z-1)$, т. е. обращаться в нуль при $z=1$. Отсюда определим произвольную постоянную a:

$$a = -\frac{1}{2\pi i}\int\left[\frac{e^{3t}-e^{t}+te^{t}}{e^{5t}-1}\,b_1(t)+\frac{e^{2t}-e^{t}-te^{2t}}{e^{5t}-1}\,b_2(t)\right]\frac{dt}{t-1}.$$

Таким образом, условию конечности решения в точке $t=1$ можно всегда удовлетворить. Решение не будет содержать произвольных постоянных, что, конечно, и следовало ожидать, так как однородная задача не имеет отличных от нуля решений. Выписанное ранее условие разрешимости, вытекающее из условия исчезновения решения на бесконечности, останется и здесь как единственное условие разрешимости. Такой же результат мы получили бы, если бы вовсе исключили бином $t-1$ из первого столбца матрицы коэффициентов.

Таким образом, рассматриваемая задача полностью исчерпана.

Научно-исследовательский институт
математики и механики
им. Н. Г. Чеботарева при Казанском государственном
университете им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
19.V.1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гахов Ф. Д., Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного, Известия Казанского физ.-мат. общества, т. X, сер. 3 (1938), 40—79.

[2] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946.

[3] Векуа Н. П. и Квеселава Д. А., Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного, Сообщения Ак. Наук Груз. ССР, т. II, № 3 (1941), 233—239.

[4] Векуа Н. П. и Квеселава Д. А., Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного и ее применении к решению системы сингулярных интегральных уравнений, Труды Тбилисского мат. института Ак. Наук Груз. ССР, т. IX (1941), 33—48.

[5] Векуа Н. П., Краевая задача Гильберта с рациональными коэффициентами для нескольких неизвестных функций, Сообщения Ак. наук Груз. ССР, т. VII, № 9—10 (1946), 595—607.

[6] Hensel K. und Landsberg G., Theorie der algebraischen Funktionen, Leipzig, 1902.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
14 (1950), 569—576

Н. Г. АЛИМОВ

ОБ УПОРЯДОЧЕННЫХ ПОЛУГРУППАХ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

В статье вводятся в рассмотрение упорядоченные полугруппы и исследуется один класс их — упорядоченные полугруппы без так называемых аномальных пар. Устанавливается их архимедовость и коммутативность, а также доказывается необходимость и достаточность отсутствия аномальных пар для расширимости упорядоченной полугруппы до архимедовой группы.

Упорядоченной полугруппой мы называем всякое множество, в котором, во-первых, установлены порядковые соотношения между любыми двумя элементами со всеми характерными для этих соотношений свойствами и, во-вторых, установлена операция, называемая сложением, подчиняющаяся следующим постулатам:

I. Любым двум элементам α и β множества $\mathfrak{S}$, взятым в любом порядке, эта операция ставит в соответствие один и только один элемент из множества γ, называемый суммой элементов α и β. Операцию сложения записываем обычным образом:

$$\alpha+\beta=\gamma,$$

где γ есть сумма элементов α и β.

II. Операция сложения ассоциативна:

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

III. Операция сложения обладает двусторонней монотонностью, т. е., если $\alpha<\beta$ и φ — произвольный элемент полугруппы, то имеют место соотношения:

$$\alpha+\varphi<\beta+\varphi \quad \text{и} \quad \varphi+\alpha<\varphi+\beta. \tag{1}$$

Последний постулат устанавливает связь между операцией сложения и порядковыми соотношениями между элементами упорядоченной полугруппы $\mathfrak{S}$. Очевидно, что каждое из соотношений (1) влечет соотношение $\alpha<\beta$. Точно так же из этого постулата следует, что каждое из равенств

$$\alpha+\varphi=\beta+\varphi \quad \text{и} \quad \varphi+\alpha=\varphi+\beta$$

влечет равенство $\alpha=\beta$ — свойство, выступающее как постулат в теории полугрупп неупорядоченных.

Элемент α называется положительным элементом упорядоченной полугруппы $\mathfrak{S}$, если при всяком $\varkappa\in\mathfrak{S}$ имеет место неравенство $\alpha+\varkappa>\varkappa$, отрицательным, если при всяком $\varkappa\in\mathfrak{S}$ имеет место неравенство $\alpha+\varkappa<\varkappa$, и

нулевым или нулем полугруппы, если при всяком $x \in \mathfrak{S}$ имеет место равенство $\alpha + x = x$.

ТЕОРЕМА 1. *Каждый элемент упорядоченной полугруппы принадлежит к одному и только одному из трех классов: он или положителен, или отрицателен, или нуль.*

Возьмем произвольный элемент $\alpha \in \mathfrak{S}$. Чтобы доказать теорему относительно этого элемента, возьмем еще один элемент $\beta \in \mathfrak{S}$, который, вообще говоря, не обязательно должен быть отличен от α. Возможны три случая:

$$\beta + \alpha > \beta, \quad \beta + \alpha < \beta, \quad \beta + \alpha = \beta. \tag{2}$$

Каждый из этих трех случаев при любом $x \in \mathfrak{S}$ дает, в силу постулата о монотонности сложения, соответственно следующие соотношения:

$$\beta + (\alpha + x) > \beta + x, \quad \beta + (\alpha + x) < \beta + x, \quad \beta + (\alpha + x) = \beta + x.$$

Отсюда получаем соответственно соотношения:

$$\alpha + x > x, \quad \alpha + x < x, \quad \alpha + x = x, \tag{3}$$

справедливые при любом $x \in \mathfrak{S}$. Так как из соотношений (2) всегда имеет место одно и только одно соотношение, то то же самое будет иметь место и для соотношений (3). Теорема доказана.

Следствие. Если при каком-либо β имеет место неравенство $\beta + \alpha > \beta$, то α — положительный элемент упорядоченной полугруппы; из $\beta + \alpha < \beta$ следует, что α — отрицательный элемент и из $\beta + \alpha = \beta$ следует, что α есть нуль полугруппы. Обратно, из того, что α — положительный, отрицательный или нулевой элемент следуют соответственно при всяком $x \in \mathfrak{S}$ соотношения $x + \alpha > x$, $x + \alpha < x$ и $x + \alpha = x$.

Ясно, что каждый отрицательный элемент упорядоченной полугруппы меньше каждого положительного элемента; нуль, если он существует, больше всякого отрицательного и меньше всякого положительного элемента полугруппы.

Далее, если $\alpha < \beta$ и α — неотрицательный элемент полугруппы, то β — положительный элемент; если β — неположительный элемент, то α — отрицательный элемент.

В упорядоченной полугруппе не может быть более одного нуля, так как если α и β — нули полугруппы, то, учитывая следствие из первой теоремы, будем иметь:

$$\alpha + \beta = \alpha \quad \text{и} \quad \alpha + \beta = \beta$$

и, в силу единственности суммы, отсюда получаем, что $\alpha = \beta$.

Из всего этого следует, что если в упорядоченной полугруппе нуля нет, то можно ввести в полугруппу новый элемент в качестве нуля полугруппы. В дальнейшем мы будем предполагать, что в каждой полугруппе нуль имеется, причем будем его обозначать через θ. Положительность элемента α будем характеризовать неравенством $\alpha > \theta$ и отрицательность — неравенством $\alpha < \theta$.

Очевидно, сумма двух положительных элементов упорядоченной полугруппы есть положительный элемент и сумма двух отрицательных элементов есть отрицательный элемент.

В дальнейшем греческими буквами будем обозначать элементы упорядоченной полугруппы и латинскими буквами — целые неотрицательные числа. Через $m\alpha$ обозначим сумму m слагаемых, каждое из которых есть α; при этом $0\cdot\alpha=\theta$.

Легко доказываются следующие предложения:

1) Пусть $m<n$; тогда из $\alpha>\theta$ следует неравенство $m\alpha<n\alpha$, а из $\alpha<\theta$ — неравенство $m\alpha>n\alpha$. Обратно, при $m<n$ из $m\alpha<n\alpha$ следует, что $\alpha>\theta$, из $m\alpha>n\alpha$ — что $\alpha<\theta$ и, наконец, из $m\alpha=n\alpha$ следует, что $\alpha=\theta$.

2) Если $m\alpha<n\alpha$, то $\alpha\neq\theta$, причем из $\alpha>\theta$ следует, что $m<n$, и из $\alpha<\theta$ следует, что $m>n$. Из $m\alpha=n\alpha$ при $\alpha\neq\theta$ следует, что $m=n$.

3) Если $\alpha<\beta$ и $\gamma<\delta$, то $\alpha+\gamma<\beta+\delta$. В частности, если $\alpha<\beta$, то при всяком $n\neq 0$ имеет место неравенство $n\alpha<n\beta$.

В дальнейшем будем пользоваться неоднократно следующей леммой:

ЛЕММА. *Если*

$$\alpha+\beta\leqslant\beta+\alpha, \tag{*}$$

то при всяком $n\neq 0$ *имеет место соотношение:*

$$n\alpha+n\beta\leqslant n(\alpha+\beta)\leqslant n(\beta+\alpha)\leqslant n\beta+n\alpha. \tag{**}$$

При этом в (*) *и* (**) *всюду стоит знак неравенства или всюду стоит знак равенства.*

Заметим, что из (*) следует при всяком $n\neq 0$ соотношение

$$n(\alpha+\beta)\leqslant n(\beta+\alpha). \tag{***}$$

Учитывая это, имеем

$$n(\alpha+\beta)=\alpha+(n-1)(\beta+\alpha)+\beta\geqslant\alpha+(n-1)(\alpha+\beta)+\beta=$$
$$=2\alpha+(n-2)(\beta+\alpha)+2\beta\geqslant 2\alpha+(n-2)(\alpha+\beta)+2\beta=\ldots\geqslant$$
$$\geqslant(n-1)\alpha+(\alpha+\beta)+(n-1)\beta=n\alpha+n\beta,$$

т. е. мы получаем левую часть соотношения (**). Аналогично доказывается справедливость правой части этого соотношения, и тогда, учитывая (***), получаем соотношение (**).

Элемент $\alpha\in\mathfrak{S}$ называется *архимедовым* относительно элемента $\beta\neq\theta$, если существует такое N, что при $n\geqslant N$ имеет место неравенство $\beta<n\alpha$, если β положительно, и неравенство $\beta>n\alpha$, если β отрицательно.

Очевидно, что α должен быть того же знака, что и β.

Упорядоченная полугруппа называется *архимедовой*, если любые два ее элемента одинакового знака являются взаимно архимедовыми.

Два элемента α и β упорядоченной полугруппы $\mathfrak{S}$ составляют *аномальную пару*, если при всяком $n\neq 0$ наблюдается одно из следующих двух соотношений:

$$n\alpha<n\beta<(n+1)\alpha,$$
$$n\alpha>n\beta>(n+1)\alpha.$$

Первое неравенство, очевидно, предполагает, что α и β оба положительны, второе,— что они оба отрицательны.

Простейшим примером упорядоченной полугруппы без аномальных пар является множество всех натуральных чисел, упорядоченное обычным способом, с обычным определением суммы.

ТЕОРЕМА 2. *Во всякой неархимедовой полугруппе имеются аномальные пары.*

Так как полугруппа неархимедова, то в ней имеется хотя бы одна пара неархимедовых элементов. Пусть элемент α неархимедов относительно элемента β; следовательно, они одинакового знака. Пусть они оба положительны. Согласно лемме, при всяком $n \neq 0$ будет иметь место одно из двух соотношений:

$$\begin{gathered} n\alpha + n\beta \leqslant n(\alpha+\beta) \leqslant n\beta + n\alpha, \\ n\beta + n\alpha \leqslant n(\beta+\alpha) \leqslant n\alpha + n\beta. \end{gathered} \quad (4)$$

Первое из них будет справедливо при $\alpha+\beta \leqslant \beta+\alpha$, второе — при $\beta+\alpha \leqslant \alpha+\beta$.

Так как при всяком $n \neq 0$ имеет место неравенство $n\alpha < \beta$, то из (4) следует при любом $n \neq 0$ одно из двух соотношений:

$$\begin{gathered} n\beta < n(\alpha+\beta) < (n+1)\beta, \\ n\beta < n(\beta+\alpha) < (n+1)\beta, \end{gathered}$$

т. е. одна из двух пар — β и $\alpha+\beta$ или β и $\beta+\alpha$ — является аномальной парой.

Существуют упорядоченные полугруппы с аномальными парами при любых предположениях относительно архимедовости и коммутативности. Ограничимся примером упорядоченной полугруппы с аномальными парами, архимедовой и некоммутативной. Для этого рассмотрим множество всевозможных «слов», написанных с помощью двух букв α и β, причем число букв в каждом «слове» конечно. Число букв в «слове» будем называть его длиной. Сумма двух «слов», по определению, есть третье «слово», которое получается, если к первому слагаемому приписать справа второе слагаемое; например,

$$\alpha\alpha\beta + \alpha\beta\beta = \alpha\alpha\beta\alpha\beta\beta.$$

Если два «слова» одинаковой длины, то порядковые соотношения между ними определяются словарным способом; если их длины разные, то «слово» с меньшей длиной считается предшествующим. Легко убедиться, что множество всех «слов» представляет собою упорядоченную полугруппу с аномальными парами, архимедову и некоммутативную. Архимедовость очевидна, так как любое «слово», будучи взято слагаемым достаточно большое число раз, даст «слово», превосходящее по длине любое другое «слово». Некоммутативность наблюдается, например, при сложении «слов» α и β. «Слова» α и β образуют аномальную пару.

Ограничимся рассмотрением упорядоченных полугрупп без аномальных пар.

ТЕОРЕМА 3. *Упорядоченная полугруппа без аномальных пар есть архимедова коммутативная полугруппа.*

Если хотя бы одно из слагаемых есть нуль, то коммутативность суммы утверждается следствием из теоремы 1. Пусть α и β отличны от нуля. Возможны три случая:

1) $\alpha > \theta$, $\beta > \theta$. Тогда, если допустить, что

$$\alpha + \beta < \beta + \alpha, \tag{5}$$

то будем иметь при всяком $n \neq 0$:

$$(n+1)(\alpha+\beta) = \alpha + n(\beta+\alpha) + \beta > n(\beta+\alpha) + \beta > n(\beta+\alpha) > n(\alpha+\beta),$$

т. е. $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ образуют аномальную пару, что противоречит условию теоремы. К аналогичному заключению приходим, если допустить неравенство

$$\beta + \alpha < \alpha + \beta.$$

Следовательно, $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

2) $\alpha < \theta$, $\beta < \theta$. Рассматривается аналогично первому случаю.

3) $\alpha < \theta < \beta$. Если $\alpha+\beta = \theta$, то $\alpha + (\beta+\alpha) = \alpha$, откуда $\beta+\alpha = \theta$ и, следовательно, $\alpha+\beta = \beta+\alpha$. Если же $\alpha+\beta > \theta$, то будем иметь также $\beta+\alpha > \theta$. Действительно,

$$(\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) > \alpha+\beta;$$

отсюда:

$$\alpha + (\beta+\alpha) + \beta > \alpha+\beta,$$

$$(\beta+\alpha) + \beta > \beta,$$

$$\beta+\alpha > \theta.$$

Следовательно, согласно первому случаю, имеет место равенство:

$$(\beta+\alpha) + \beta = \beta + (\beta+\alpha).$$

Учитывая это, при допущении (5) получаем:

$$2(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) = \alpha + [(\beta+\alpha)+\beta] = \alpha + [\beta + (\beta+\alpha)] =$$
$$= (\alpha+\beta) + (\beta+\alpha) > (\alpha+\beta) + (\alpha+\beta) = 2(\alpha+\beta),$$

т. е. противоречие. Аналогично получаем противоречие, если допустить, что $\beta+\alpha < \alpha+\beta$. Следовательно, $\alpha+\beta = \beta+\alpha$.

Третий случай в предположении, что $\alpha+\beta < \theta$, рассматривается аналогично.

Архимедовость следует из теоремы 2.

ТЕОРЕМА 4. *В упорядоченной полугруппе тогда и только тогда отсутствуют аномальные пары, когда для любых двух элементов α и β одинакового знака существует такой архимедовый относительно α элемент λ, что при некотором n имеет место соотношение:*

$$n\alpha + \lambda \leqslant n\beta, \quad \text{если} \quad \theta < \alpha < \beta,$$

или соотношение:

$$n\alpha + \lambda \geqslant n\beta, \quad \text{если} \quad \theta > \alpha > \beta.$$

Необходимость условия. Если в полугруппе нет аномальных пар, то она, согласно теореме 2, архимедова, и при некотором n имеет место:

$$(n+1)\alpha \leqslant n\beta, \quad \text{если} \quad \theta < \alpha < \beta,$$

или

$$(n+1)\alpha \geqslant n\beta, \quad \text{если} \quad \theta > \alpha > \beta.$$

Следовательно, условие, изложенное в теореме, выполняется при $\lambda = \alpha$.

Достаточность условия. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\theta < \alpha < \beta$.

Пусть $n_0\alpha + \lambda \leqslant n_0\beta$, причем λ — архимедов относительно α. Согласно лемме, отсюда следует справедливость при всяком $n \neq 0$ одного из двух соотношений:

$$nn_0\alpha + n\lambda \leqslant n(n_0\alpha + \lambda) \leqslant nn_0\beta,$$

$$n\lambda + nn_0\alpha \leqslant n(n_0\alpha + \lambda) \leqslant nn_0\beta. \tag{6}$$

Так как λ архимедов относительно α, то существует такое N, что при всех $n \geqslant N$ имеет место неравенство $\alpha < n\lambda$ и, следовательно, соотношения (6) для всех $n \geqslant N$ дадут неравенство:

$$(nn_0 + 1)\alpha < nn_0\beta,$$

т. е. α и β не образуют аномальной пары. Так как α и β — произвольные элементы, то тем самым доказана достаточность условия.

Из теоремы 4 непосредственно следует

ТЕОРЕМА 5. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы упорядоченная группа была архимедовой, является отсутствие в ней аномальных пар.*

Из теоремы 4 и 5 непосредственно вытекает общеизвестный факт, что упорядоченная архимедова группа коммутативна.

ТЕОРЕМА 6. *Упорядоченная коммутативная полугруппа $\mathfrak{S}$ изоморфно расширима до упорядоченной абелевой группы; если группа $\mathfrak{A}$ является минимальной упорядоченной группой, содержащей полугруппу $\mathfrak{S}$, то для архимедовости группы $\mathfrak{A}$ необходимо и достаточно, чтобы полугруппа $\mathfrak{S}$ не содержала аномальных пар.*

Пусть $\mathfrak{S}$ — упорядоченная коммутативная полугруппа. Рассмотрим множество всех упорядоченных пар элементов из $\mathfrak{S}$ и установим в нем понятие равенства следующим образом: $(\alpha; \beta) = (\gamma; \delta)$ в том и только том случае, если $\alpha + \delta = \beta + \gamma$. Легко проверить, что это определение обеспечивает все обычные свойства, присущие понятию равенства. Тем самым все пары элементов из $\mathfrak{S}$ разобьются на классы, каждый из которых объединяет все равные между собою пары. Обозначая эти классы большими буквами латинского алфавита, определим для них порядковые соотношения следующим образом: $A < B$ в том и только том случае, если из $(\alpha; \beta) \in A$ и $(\gamma; \delta) \in B$ следует, что $\alpha + \delta < \beta + \gamma$. Это определение не зависит от выбора пар в классах A и B и, как легко убедиться, удовлетворяет всем требованиям понятия «меньше — больше». Суммой классов A и B назовем класс C, удовлетворяющий требованию: если $(\alpha; \beta) \in A$ и $(\gamma; \delta) \in B$, то $(\alpha + \gamma; \beta + \delta) \in C$.

Легко проверить, что множество $\mathfrak{A}$ всех классов с так установленными порядковыми соотношениями и операцией сложения образует упорядоченную абелеву группу, и упорядоченная полугруппа $\mathfrak{S}$ содержится в $\mathfrak{A}$ изоморфным образом. Чтобы убедиться в последнем, достаточно каждому элементу $\alpha \in \mathfrak{S}$ привести в соответствие тот класс, в котором находится пара $(\alpha; \theta)$.

Необходимым условием того, чтобы $\mathfrak{A}$ была архимедовой группой, является, очевидно, отсутствие в $\mathfrak{S}$ аномальных пар. Остается доказать обратное, т. е., что из отсутствия в $\mathfrak{S}$ аномальных пар следует, что $\mathfrak{A}$ будет архимедовой группой. Предварительно докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Если в упорядоченной полугруппе имеются положительные элементы и нет аномальных пар, то, каков бы ни был элемент* α, *всегда найдется такой элемент* $\beta > \theta$, *что* $\alpha + \beta > \theta$.

Лемма, очевидно, нуждается в доказательстве лишь при отрицательных α. Допустим, что она неверна. Тогда при некотором $\alpha < \theta$, любом положительном β и любом $n \neq 0$ будет иметь место неравенство:

$$\alpha + (n+2)\beta \leqslant \theta.$$

Учитывая прежде доказанную лемму и наличие в $\mathfrak{S}$ коммутативности, будем иметь:

$$n(\alpha+\beta) = n\alpha + n\beta > n\alpha \geqslant n\alpha + [\alpha + (n+2)\beta] =$$
$$= (n+1)(\alpha+\beta) + \beta > (n+1)(\alpha+\beta),$$

т. е. $\alpha + \beta$ и α образуют аномальную пару, что противоречит условиям леммы.

Из этой леммы следует, что если $\mathfrak{S}$ — без аномальных пар и имеет положительные элементы, то каждый класс (каждый элемент из $\mathfrak{A}$) содержит пары, образованные положительными элементами полугруппы $\mathfrak{S}$. Так как $\mathfrak{A}$ есть упорядоченная группа, то в ней имеются положительные элементы и доказательство достаточно будет провести лишь для ее положительной части. Пусть $\theta < A < B$. Пусть, далее, $(\beta; \alpha) \in A$ и $(\delta; \gamma) \in B$, причем α, β, γ и δ — все положительные элементы полугруппы $\mathfrak{S}$.

Возьмем m так, чтобы имело место неравенство $\delta < m\alpha$. Это возможно, так как $\mathfrak{S}$ есть архимедова полугруппа. Далее, возьмем n_0 так, чтобы для всех $n \geqslant n_0$ выполнялось неравенство:

$$(n+m)\alpha < n\beta,$$

что также возможно, ибо из $A > \theta$ следует неравенство $\theta < \alpha < \beta$ и полугруппа $\mathfrak{S}$ не имеет аномальных пар. Мы получим

$$n\beta + \gamma > n\alpha + m\alpha > n\alpha + \delta.$$

Это означает, что $nA > B$ при $n \geqslant n_0$, чем доказано, что группа $\mathfrak{A}$ архимедова.

Это доказательство, проведенное в предположении, что в $\mathfrak{S}$ имеются положительные элементы, легко обобщается на случай, когда в ней нет положительных элементов.

Из последней теоремы следует, что множество всех действительных чисел есть максимальная упорядоченная полугруппа без аномальных пар. В связи с этим следует отметить, что аксиоматика упорядоченных полугрупп без аномальных пар являет собой минимум требований, какие нужно предъявить ассоциативной системе, чтобы она могла выступать в качестве системы измеримых величин. Исходя из этой аксиоматики, можно обосновать теорию действительных чисел, используя понятие *евклидовского отношения* элемента β к α $(\alpha > \theta,\ \beta > \theta)$, которое будет выступать в форме функции $\varphi(n)$, удолетворяющей при всяком n соотношению:

$$\varphi(n)\,\alpha < n\beta \leqslant (\varphi(n)+1)\alpha.$$

Такое обоснование теории действительных чисел развертывается в плане определений, предложенных А. Н. Колмогоровым в статье «К обоснованию теории вещественных чисел», опубликованной в «Успехах математических наук», т. I, вып. 1 (11), 1946.

Поступило
8. III. 1949

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 14

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛЫ АН СССР НА 1951 г.

Название журнала	Периодичность в год	Подписная цена в год в р.	Название журнала	Периодичность в год	Подписная цена в год в р.
Автоматика и телемеханика	6	45	Известия Академии Наук СССР, серия истории и философии	6	54
Астрономический журнал	6	36	Известия Академии Наук СССР, Отделение литературы и языка	6	54
Биохимия	6	54	Известия Академии Наук СССР, серия математическая	6	54
Ботанический журнал	6	63	Известия Академии Наук СССР, Отделение технических наук	12	180
Вестник Академии Наук СССР	12	96	Известия Академии Наук СССР, серия физическая	6	72
Вестник древней истории	4	120	Известия Академии Наук СССР, Отделение химических наук	6	63
Доклады Академии Наук СССР (без переплета)	36	360	Известия Академии Наук СССР, Отделение экономики и права	6	45
Доклады Академии Наук СССР с 6 папками (коленкоровыми, с тиснением) для переплета	36	384	Известия Всесоюзного географического общества	6	63
Журнал аналитической химии	6	36	Коллоидный журнал	6	45
Журнал высшей нервной деятельности имени И. П. Павлова	6	90	Математический сборник	6	132
Журнал общей биологии	6	45	Микробиология	6	54
Журнал общей химии	12	180	Почвоведение	12	72
Журнал прикладной химии	12	126	Прикладная математика и механика	6	63
Журнал технической физики	12	144	Природа	12	72
Журнал физической химии	12	144	Советское государство и право	12	108
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	108	Советская этнография	4	90
Записки Всесоюзного минералогического общества	4	30	Успехи современной биологии	6	60
Зоологический журнал	6	54	Успехи химии	6	48
Известия Академии Наук СССР, серия биологическая	6	72	Физиологический журнал СССР им. Сеченова	6	72
Известия Академии Наук СССР, серия географическая и геофизическая	6	54			
Известия Академии Наук СССР, серия геологическая	6	90			

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ

ГОРОДСКИМИ И РАЙОННЫМИ ОТДЕЛАМИ «СОЮЗПЕЧАТИ», ОТДЕЛЕНИЯМИ СВЯЗИ, А ТАКЖЕ В МАГАЗИНАХ «АКАДЕМКНИГИ»:
МОСКВА, УЛ. ГОРЬКОГО, 6; ЛЕНИНГРАД, ЛИТЕЙНЫЙ ПРОСПЕКТ, 53-а; СВЕРДЛОВСК, УЛ. БЕЛИНСКОГО, 71-в; ТАШКЕНТ, УЛ. К. МАРКСА, 29; КИЕВ, УЛ. ЛЕНИНА, 42; АЛМА-АТА, УЛ. ФУРМАНОВА, 129; ХАРЬКОВ, ГОРЯИНОВСКИЙ ПЕР., 4/6;

ГЛАВНОЙ КОНТОРОЙ «АКАДЕМКНИГА»

Москва, Пушкинская ул., 23